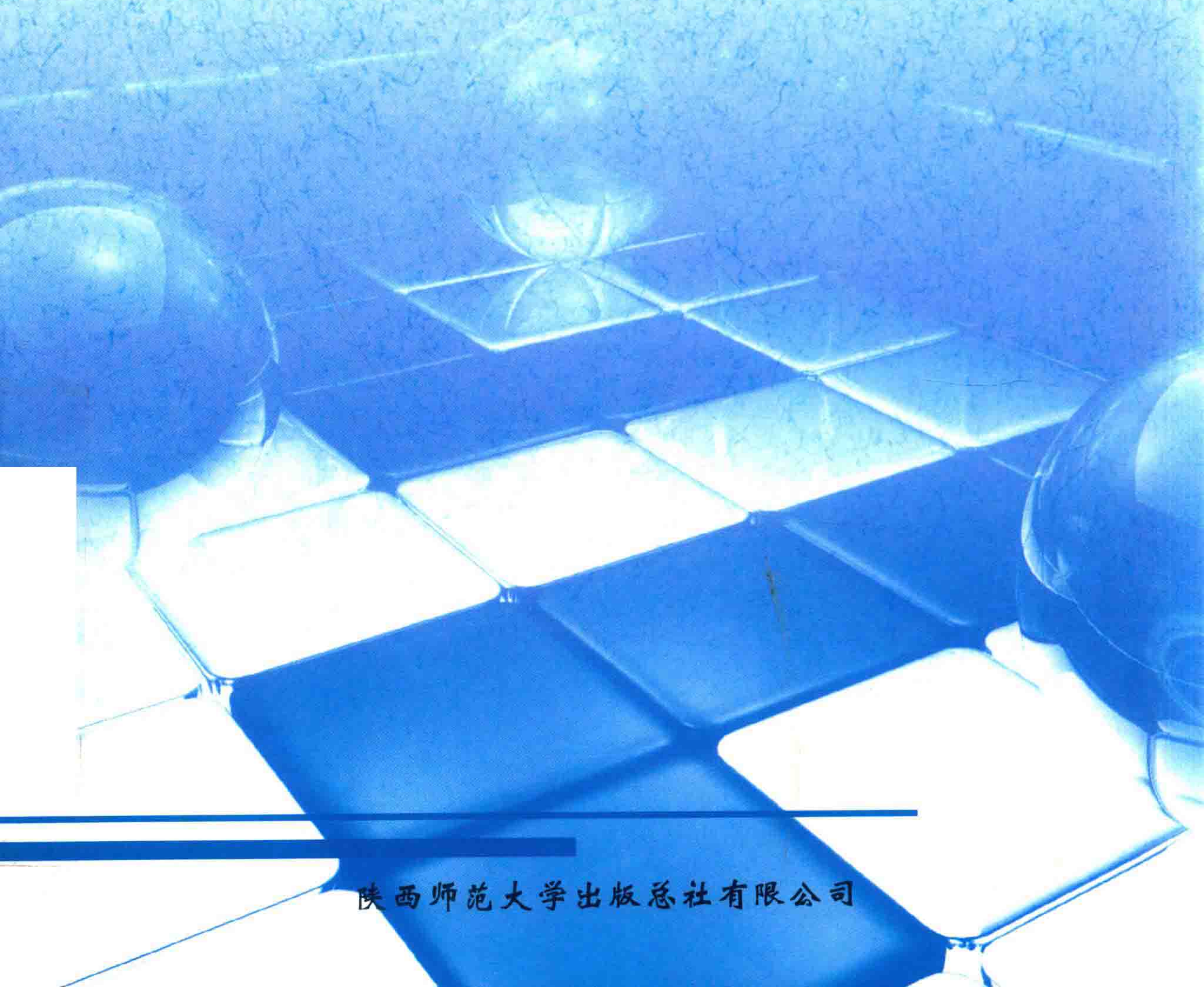
普通高等院校规划教材

王佐仁　主审
葛　键　雷向辰　主编

线性代数

Linear algebra



陕西师范大学出版总社有限公司

DJ 普通高等院校规划教材

线性代数

主审 王佐仁
主编 葛 键 雷向辰
编者 马秦龙 李 程 杨善学
周怀玉 雷向辰 葛 键

陕西师范大学出版总社有限公司

图书代号 JC10N1109

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/葛键,雷向辰主编. —西安:陕西师范大学出版总社有限公司,2010.12(2012.5 重印)
ISBN 978-7-5613-5338-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①葛… ②雷… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 230056 号

线性代数

主　　编/ 葛　键　雷向辰
责任编辑/ 王　娟
责任校对/ 王　娟
封面设计/ 鼎新设计
出版发行/ 陕西师范大学出版总社有限公司
(西安市长安南路 199 号　邮编 710062)
网　　址/ http://www.snupg.com
经　　销/ 新华书店
印　　刷/ 陕西长盛彩印包装有限公司
开　　本/ 787mm×1092mm　1/16
印　　张/ 14
字　　数/ 274 千
版　　次/ 2011 年 6 月第 1 版
印　　次/ 2012 年 5 月第 2 次印刷
书　　号/ ISBN 978-7-5613-5338-7
定　　价/ 27.00 元

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社高教出版分社联系、调换。
电　话:(029)85303622(传真)　85307864

前言

线性代数是高等数学理工科和经管类学科等有关专业的一门重要基础课，它不但是其他数学课程的基础，也是各类理工与经济管理课程的基础．另外，由于计算机科学的飞速发展和广泛应用，许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为处理离散问题的线性代数，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础．因此学好线性代数课程是非常重要的．

本教材的编写力图由浅入深、通俗易懂．让学生从熟悉的线性方程组出发，逐步引入行列式、矩阵等概念，运算方法和相应的理论推演，并结合大量的习题，让学生在循序渐进地掌握基本概念和基本理论的基础上，更加得心应手地处理相关代数问题．在知识提高方面，我们预留了让教师和学生选择的内容．

本教材共有6章．第1章行列式；第2章矩阵；第3章线性方程组；第4章矩阵的特征值；第5章二次型；第6章线性空间与线性变换．

本教材既可以作为经济管理类专业的专用教材，也可以作为理工类专业的教材．书中标有＊的内容供理工科读者学习，经管类读者可以选学．

本教材由葛键、雷向辰主编，王佐仁主审．参加编写的有杨善学（第1章）、李程（第2章）、马秦龙（第3章）、周怀玉（第4章）、雷向辰（第5章）、葛键（第6章）．

在教材的编写过程中，得到了西安财经学院薛小荣副院长、教务处丁

巨涛处长、统计学院王佐仁院长的大力支持和极大鼓励，在此谨向他们表示衷心的感谢．

由于编者的水平有限，加之时间仓促，书中若有不当之处，敬请广大读者批评指正．

作　者

2011年5月

目录

CONTENTS

第1章 行列式 ……………………………… (1)

§1.1 二阶与三阶行列式 ……………………… (1)

§1.2 n 阶行列式 ……………………………… (5)

§1.3 行列式的性质 …………………………… (11)

§1.4 行列式按行(列)展开 ………………… (20)

§1.5 克莱姆法则 ……………………………… (29)

综合练习一……………………………………… (33)

第2章 矩阵 ……………………………………… (36)

§2.1 矩阵的概念 ……………………………… (36)

§2.2 矩阵的基本运算 ………………………… (38)

§2.3 逆矩阵 …………………………………… (49)

§2.4 分块矩阵 ………………………………… (56)

§2.5 矩阵的初等变换 ………………………… (63)

§2.6 矩阵的秩 ………………………………… (71)

综合练习二……………………………………… (76)

第3章 线性方程组 ……………………………… (80)

§3.1 消元法 …………………………………… (80)

§3.2 向量组的线性组合 ……………………… (87)

§3.3 向量组的线性相关性 …………………… (92)

§3.4 向量组的秩 ……………………………… (97)

§3.5 向量空间 ………………………………… (101)

§3.6 线性方程组解的结构 …………………… (107)

综合练习三……………………………………… (116)

第4章 矩阵的特征值 …………………………… (120)
§4.1 向量的内积、长度及正交性 ………………… (120)
§4.2 矩阵的特征值与特征向量 ………………… (126)
§4.3 相似矩阵 ………………………………… (133)
§4.4 实对称矩阵的对角化 ……………………… (145)
综合练习四 ……………………………………… (150)
第5章 二次型 …………………………………… (154)
§5.1 二次型及其矩阵 ………………………… (154)
§5.2 化二次型为标准形 ………………………… (157)
§5.3 正定二次型 ……………………………… (164)
综合练习五 ……………………………………… (169)
第6章 线性空间与线性变换 ……………………… (171)
§6.1 线性空间 ………………………………… (171)
§6.2 线性空间的基、维数与坐标 ………………… (175)
§6.3 基变换与坐标变换 ………………………… (178)
§6.4 线性变换 ………………………………… (182)
§6.5 线性变换的矩阵表示 ……………………… (185)
综合练习六 ……………………………………… (190)
习题答案 ………………………………………… (193)

第 1 章

行列式

行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具. 特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

§1.1 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

定义 1 由四个数排成二行二列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ 所确定的表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为**二阶行列式**，记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性表现在行列式的记号中，就是"**对角线法则**". 如图 1-1-1 所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{21} 到 a_{12} 的虚连线称为**副对角线**. 因此，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

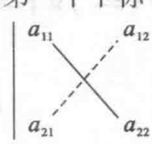


图 1-1-1

二、二元线性方程组

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.2) \end{cases}$$

用消元法求解，由 $(1.1)\times a_{22}-(1.2)\times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \tag{1.3}$$

$(1.2)\times a_{11}-(1.1)\times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \tag{1.4}$$

设 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

利用行列式的定义,记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\qquad D_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}.$$

则式(1.3)、(1.4)可改写为

$$\begin{cases}Dx_1=D_1\\Dx_2=D_2\end{cases}.$$

当行列式 $D\neq0$ 时,式(1.1)、(1.2)有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注 (1)x_1,x_2 的分母同为行列式 D,其形式是由式(1.1)、(1.2)中未知数系数按其原有的相对位置而排成,称为方程组的**系数行列式**.

(2)x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1 解方程组 $\begin{cases}3x_1-2x_2=12\\2x_1+\ \ x_2=1\end{cases}$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix}3&-2\\2&1\end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}12&-2\\1&1\end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&12\\2&1\end{vmatrix}=3-24=-21,$$

又因 $D\neq0$,故方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

三、三阶行列式

定义 2 对于由 9 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列的式子,定义

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

并称其为**三阶行列式**.

由上述定义可见,三阶行列式有 6 项,每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号,其运算的规律可用“对角线法则”(如图 1-1-2)或“沙路法则”(如图 1-1-3)来表述.

1. 对角线法则

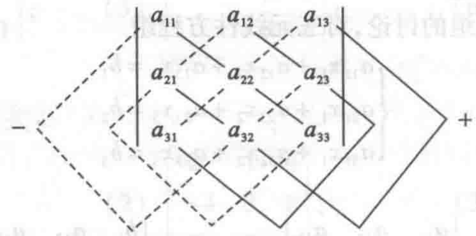


图 1-1-2

2. 沙路法则

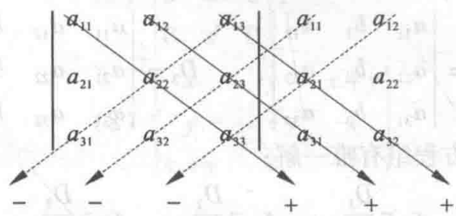


图 1-1-3

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\times(-4)\times 3+0\times(-1)\times(-1)+1\times 1\times 8-1\times(-4)$

$\times(-1)-0\times 1\times 3-2\times(-1)\times 8$

$=-24+8-4+16=-4.$

例 3 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}>0$?

解 由于 $\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$=(x-1)\times x\times 1+4\times x\times 4+2\times(-2)\times 2-2\times x\times 4-4\times(-2)\times 1$

$-(x-1)\times x\times 2$

$=-x^2+9x$

解原不等式即解不等式 $-x^2+9x=-x(x-9)>0$，得 $0<x<9$. 故当 $0<x<9$ 时，所给行列式的值大于零.

四、三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 4 解三元线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=-2\\2x_1-x_3=-1\\-x_1+x_2-2x_3=1\end{cases}$.

解 系数行列式

$$\begin{aligned}D=&\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\-1&1&-2\end{vmatrix}\\=&1\times0\times(-2)+(-1)\times(-1)\times(-1)+1\times2\times1-1\times0\\&\times(-1)-(-1)\times2\times(-2)-1\times(-1)\times1\\=&-2\neq0,\end{aligned}$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}2&-1&1\\-1&0&-1\\1&1&-2\end{vmatrix}=-4,D_2=\begin{vmatrix}1&2&1\\-2&-1&-1\\-1&1&-2\end{vmatrix}=-14,D_3=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&0&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}=6,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-7,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-3.$$

习题1-1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}3&-1\\2&6\end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1+x & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} \tan\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 8 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　(8) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

3. 证明下列不等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

4. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} \neq 0$.

§1.2　n 阶行列式

一、排列与逆序

定义 1　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个 n 级排列（简称为**排列**），常记作 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

例如，1234 和 4321 都是 4 级排列，而 24351 是一个 5 级排列.

n 个数的不同排列共有 $n!$ 个. 实际上，在作 n 个数的一个排列时，第一个位置的数可以取这 n 个数中的任何一个，所以有 n 种取法；当这一个位置取定后，第二个位置的数只能在剩下的 $n-1$ 个数中选取，有 $n-1$ 种取法，这样继续下去，到第 n 个位置时就只剩下一个数了，只有一种取法. 于是一共可有

$$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

种不同的排列.

例如，1，2，3 这三个数的不同排列一共有 $3!=6$ 个. 分别是 123，213，312，321，231，132.

注意到在上面的 3 个数的排列中，除了 123 是按自然顺序排列以外，其余的排列中都有较大的数排在较小的数的前面. 例如，在排列 231 中，3 比 1 大，但 3 排在 1 的前面. 一般地，有下面的定义.

定义 2 在一个 n 级排列 $(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$ 中，若数 $i_t>i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该**排列的逆序数**，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，比 $i_t(t=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_t 前面的数共有 t_i 个，则 i_t 的逆序的个数为 t_i，而该排列中所有的自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例 1 求 6 级排列 453162 的逆序数.

解 构成逆序的数对有 43，41，42，53，51，52，31，32，62，共 9 对，因此

$$N(453162)=9.$$

定义 3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解 在这一排列中，n 与后面 $(n-1)$ 个数都构成逆序，$(n-1)$ 与其后 $(n-2)$ 个数都构成逆序，…，3 与其后 2 个数 2 与 1 构成逆序，2 与其后的 1 构成逆序，所以

$$N(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易见：当 $n=4k,4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时，该排列是奇排列.

二、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 观察三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见：

(1) 三阶行列式共有 $6(=3!)$ 项；

(2) 每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积；

(3) 每项的符号是，当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

故三阶行列式可定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 **n 阶行列式**. 其中横排为**行**,竖排为**列**,它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2},\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,各项的符号是:当该项各元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$,这里数 a_{ij} 称为行列式的**元素**,称

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为行列式的**一般项**.

注 (1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,每项是取自不同行不同列 n 个元素乘积,符号为正号的项和符号为负号的项(不包括元素本身所带的符号)各占一半,因此,行列式实质上是一种特殊定义的数;

(2) 每项 $a_{1j_1}a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$(不包括元素本身所带的符号);

(3) 一阶行列式 $|a|=a$,不要与绝对值记号相混淆.

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,现考察不为零的项. a_{1j_1} 取自第 1 行,但只有 $a_{14}\neq 0$,故只可能 $j_1=4$;同理可得 $j_2=3,j_3=2,j_4=1$. 即行列式中不为零的项只有

$$(-1)^{N(4321)}a\cdot b\cdot c\cdot d=abcd,$$

所以 $D=abcd$.

注 一般地,可得到下列结果

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 3 的行列式中,其非副对角线上的元素全为 0,此类行列式可以直接求出结果. 特别

地，非主对角线上元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**，而对角线以下(上)的元素全为 0 的行列式称为**上(下)三角(形)行列式**.

例 4　计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0).$$

解　根据定义 4，$D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考察不为零的项. a_{nj_n} 取自第 n 行，但只有 $a_{nn}\neq 0$，故只可能取 $j_n=n$；$a_{n-1,j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行，只有 $a_{n-1,n-1}$ 及 $a_{n-1,n}$ 不为零，因 a_{nn} 取自第 n 列，故 $a_{n-1,j_{n-1}}$ 不能取自第 n 列，从而 $j_{n-1}=n-1$；同理可得，$j_{n-2}=n-2,\cdots,j_1=1$. 所以不为零的项只有

$$(-1)^{N(1,2,\cdots,n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

故

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注　类似可得下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三、对换

为进一步研究 n 阶行列式的性质，先要讨论对换的概念及其与排列奇偶性的关系.

定义 5　在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种做出新排列的方法称为对换. 将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

例如，对换排列 21354 中元素 1 和 4 的位置后，得到排列 24351.

定理 1　任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变.

证　先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，显然，$a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m$ 这

些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两个元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变. 当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1.

所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的逆序数相差 1，奇偶性改变.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，对它做 m 次相邻对换，变成排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_1 bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 1 奇排列变成自然数顺序排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然数顺序排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而自然数顺序排列是偶排列(逆序数为 0). 因此结论成立.

定理 2 n 个自然数($n>1$)共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

证 n 级排列的总数为 $n!$. 设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对每个奇排列都做同一对换，则由定理 1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p\leqslant q$；同理对每个偶排列都做同一对换，则 q 个偶排列均变为奇排列，故 $q\leqslant p$. 所以 $p=q$，从而 $p=q=\dfrac{n!}{2}$.

定理 3 n 阶行列式也定义为

$$D=\sum(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数的一个排列.

证 按行列式定义有

$$D=\sum_{\bar{j_1}\bar{j_2}\cdots\bar{j_n}}(-1)^{N(\bar{j_1}\bar{j_2}\cdots\bar{j_n})}a_{1\bar{j_1}}a_{2\bar{j_2}}\cdots a_{n\bar{j_n}}, \tag{2.1}$$

令

$$D_1=\sum(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{2.2}$$

交换式(2.2)的一般项中两元素的位置，相当于同时进行一个行标的对换和一个列标的对换. 故交换位置后一般项的两下标排列逆序数之和的奇偶性保持不变. 即交换式(2.2)的一般项中两元素的位置，其符号保持不变. 这样我们总可以经过有限次的位置交换，使其行标换为自然数顺序排列，即变为式(2.1)的一般项，因此，D 的一般项也可以记为式(2.2)的形式.

推论 2 n 阶行列式也定义为

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

例 5 在五阶行列式中，下列两项各应带什么符号：

(1) $a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35}$；

(2) $a_{31}a_{24}a_{53}a_{15}a_{42}$.

解 (1)按定义4计算：

$$a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35}=a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53},$$

而24513的逆序数 $N=5$，所以 $a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35}$ 前边应带负号.

(2)按定理3计算：

行标排列32514的逆序数为 $N=5$，列标排列14352的逆序数为 $N=4$，所以 $a_{31}a_{24}a_{53}a_{15}a_{42}$ 前边应带负号.

例 6 用行列式的定义计算 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^N a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn} \\ &= (-1)^N 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n=(-1)^N n!, \end{aligned}$$

其中

$$N=N[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

所以

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

习题1-2

1. 计算下列排列的逆序数：

(1)214365； (2)41253； (3)3712456；

(4)$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；

(5)$(2k)1(2k-1)2(2k-2)3\cdots(k+1)k$；

(6)$246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$.

2. 写出四阶行列式中所有带负号并且含有因子 a_{23} 的项.

3. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1) $a_{66}a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}$； (2) $a_{53}a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{65}$； (3) $a_{34}a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}$.

4. 选择 k,l，使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项.

5. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零，证明该行列式为零.