概率论基础

申世昌　主编

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

概率论基础

申世昌　主编

王兰措　叶利娟　副主编

中国科学技术出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论基础/申世昌主编．—北京：中国科学技术出版社，2014.5

ISBN 978-7-5046-6583-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①申… Ⅲ.①概率论－教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 072939 号

内容提要

本书分章讲解了随机事件与概率、离散型随机变量及其数字特征、连续型随机变量及其数字特征、大数定律与中心极限定理。全书共四章。每章后附有适量习题。

本书可作为高等院校数学与统计专业及民族班学生教材。

出版人 苏 青
策划 孙卫华
责任编辑 孙卫华
封面设计 孙雪骊
责任校对 凌红霞
责任印制 张建农

出版 中国科学技术出版社
发行 科学普及出版社发行部
地址 北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮编 100081
发行电话 010－62103210
传真 010－62179148
编辑室电话 010－62103137
网址 http：//www.cspbooks.com.cn

开本 787mm×1092mm 1/16
字数 176 千字
印张 8.75
版次 2014 年 5 月第 1 版
印次 2014 年 5 月第 1 次印刷
印刷 北京京华虎彩印刷有限公司

书号 ISBN 978-7-5046-6583-6/O·176
定价 21.00 元

前　言

概率论是全国高等院校数学与统计专业的基础课程，这门课的任务是以丰富的背景和有趣的结论吸引学生，使学生在兴趣中学习和掌握概率论的基本概念、基本方法和基本理论。本书是结合民族学生数学基础薄弱但有很强的求知欲等特点；并借鉴许多其他版本的教材和资料编写而成。全书包含了随机事件与概率、离散型随机变量及数字特征、连续型随机变量及数字特征以及大数定律与中心极限定理等概率论中的基础内容。通过这些内容的学习，让学生较全面地认识概率和掌握概率论的基本理论，在叙述中我们尽力做到通俗易懂、图文呼应，相信这对内容的理解会有很大的帮助。该教材注意了内容深度的把握，考虑民族学生的基础，对多维随机变量部分进行了删减，对大数定律及中心极限定理做了简明扼要的介绍。

在此我们首先感谢青海民族大学数学与统计学院领导和全体教师，由于他们的关心、支持和鼓励使我们能以充沛的精力去完成此书。我们还要感谢 10 级研究生熊涛等同学在紧张的学习之余为本书的插图和校对做了大量的工作。

本书由青海民族大学申世昌教授担任主编，王兰措、叶利娟担任副主编。其中第一章由叶利娟编写，第二章由王兰措编写，第三章由申世昌编写，第四章由马登明编写。

全书由青海民族大学刘喜兰教授统审。

本书受到青海省重点学科（数学）建设项目的大力支持，特表示感谢！

编　者

2013 年 10 月　于西宁

目　录

引　言

我们观察自然界发生的现象不外乎有两类。

一类现象称为决定性现象，这类现象的特点是：在一组条件下，其结果完全被决定，或者完全被肯定，或者完全被否定，不存在其他的可能性。例如，使两个带同性电荷的小球相靠近，则两小球互相排斥。这里，“使两个带同性电荷的小球相靠近”是一组条件，一旦这组条件实现，那么“两小球互相排斥”这一结果就完全被肯定。所以“使两个带同性电荷的小球相靠近，则两小球互相排斥”这一现象是决定性现象。该决定性现象，在试验中必然发生，故这种决定性现象常称为必然现象。又如，“使两个带同性电荷的小球相靠近（条件），则两小球互相吸引（结果）”完全被否定，所以这一现象也是决定性现象。该决定性现象，在试验中必然不发生，故这种决定性现象常称为不可能现象。显然，必然现象和不可能现象互为反面，必然现象的反面就是不可能现象，反之，不可能现象的反面就是必然现象。由上可见，决定性现象（必然现象或不可能现象）实际上就是事前可以预言结果的现象。通常我们对某个现象可以“未卜先知”，应当说指的是决定性现象。

还有一类现象称为非决定性现象，这类现象的特点是：条件不能完全决定结果，每次观察所发生的结果可能是不同的。例如，“向桌上任意抛掷一枚硬币，落下后某一面向上”这一现象是非决定性现象。因为条件“向桌上任意抛掷一枚硬币”不能完全决定结果“某一面向上”，落下后它可能“正面向上”，也可能“反面向上”。又如，“从一副扑克牌中任选两张，所得两张牌的花色”是非决定性现象。因为任选的两张扑克牌花色可能是“黑桃，黑桃”，“黑桃，方块”，…，“梅花，梅花”等。由此可见，非决定性现象实际上就是事前不能预言结果的现象，这类现象只有事后才能确切知道它所发生的结果。在概率论中，把非决定性现象称为随机现象。值得注意的是，随机现象不能理解为杂乱无章的现象。通常说某种现象是随机的，有两方面的意思：第一，对这种现象进行观察，其结果不是唯一的，可能会出现这种结果，也可能会出现那种结果，究竟出现哪一种结果，事前是不能预言的，只有事后才能得知；第二，在一次观察中，这种现象发生哪一种结果常带有偶然性，但通过对这种现象的大量观察，我们会发现这种现象的各种可能结果在数量上呈现出一定的规律性。

例如，考察“掷一枚硬币，落下后某一面向上”这个随机现象，我们将硬币向桌上抛掷一次观察它所发生的结果，可能是“正面向上”，也可能是“反面向上”。若试验结果是“正面向上”，这是偶然的。然而我们如果大量重复进行抛掷硬币的试验，可以发现，即使各次试验结果没有什么规律性，但“正面向上的次数”与“反面向上的次数”各接近于总试验次数的一半，这就是所述随机现象内部存在的统计规律性。

概率论的任务就是要揭示随机现象内部存在的统计规律性，其特点是根据问题提出相应的数学模型，然后去研究它们的性质、特征和规律性。

概率论的发展历史悠久，但最初激发数学家们思考概率问题的由头却来自掷骰子游戏。17 世纪中叶，欧洲贵族们盛行掷骰子游戏，当时法国有一位热衷于掷骰子游戏的贵族德·梅尔(De Mere)，他在掷骰子游戏中遇到了一些使他苦恼的问题。譬如，他发现掷一枚骰子 4 次至少出现 1 次六点是有利的，而掷 1 双骰子 24 次至少出现 1 次双六是不利的。他找不到解释的原因，于是他把遇到的问题向当时的法国数学家帕斯卡(Pascal) 请教。帕斯卡接受了这些问题，并把它提交给另一位法国数学家费马(Fermat)。他们频繁地通信，开始了概率论和组合论的研究。他们的通信被从荷兰来到巴黎的荷兰科学家惠更斯(Huygens) 获悉。他独立地研究了这些问题，结果写成了《论掷骰子游戏中的计算》，时间是 1657 年。这是迄今被认为有关概率论最早的论著。因此可以说早期概率论的真正创立者是帕斯卡、费马和惠更斯。这一时期(17—18 世纪初) 称为组合概率时期，计算各种古典概率。

18 世纪初贝努利(Bernoulli) 发现了大数定律，这是概率论中一个重要结果。从 18 世纪初到 19 世纪，母函数、特征函数引入概率论的研究中，成功地解决了许多问题，特别是对中心极限定理的研究，在这方面棣莫弗(De Moivre)、拉普拉斯(Laplace)、李雅普诺夫(ЛяуноВ) 等都有出色的成绩，这时期也称作分析概率时期。

从 1940 年开始，概率论有了自己的研究方法，重点是研究过程的样本函数的性质，即研究过程随时间变化的轨道性质。在这期间，一方面逐渐地出现了理论概率与应用概率分家的趋势。术语“应用概率”大约首次出现于美国数学会 1955 年的会议上，这次会议以“应用概率”为标题发表了一组文章；另一方面也出现了蒙特卡罗(Monte Carlo) 方法，其思想早在 18 世纪法国学者布丰(Buffon) 用投针游戏估计 π 值时就已经形成，但真正定名的却是在 1946 年。当时美国两位学者冯·诺伊曼(von Neumann) 和乌拉姆(Ulam) 首先用数学程序在计算机上模拟中子连锁反应，并用概率统计的方法研究反应后的结果，他们把第一个这样的程序命名为“蒙特卡罗程序”。自此兴起了蒙特卡罗方法，它是一种建立在概率统计基础上的计算方法，

在核物理、电子学、生物学、高分子化学等学科的研究中有着重要的应用。

现在，概率论已成为最重要和最活跃的数学学科之一。它既有严密的数学基础，又与各学科联系紧密。在自然科学、社会科学、管理科学、技术科学和工农业生产等各个学科和领域中都得到了广泛的应用。

第一章　随机事件与概率

§1.1　随机事件

1.1.1　随机现象与随机试验

在概率论中试验是一个含义广泛的术语，它包括为研究随机现象的统计规律性而进行的各种科学试验或对事物的某种特性进行的观察，例如：

Ⅰ 抛掷一枚硬币，观察它出现正面朝上与反面朝上的情况；

Ⅱ 抛掷一颗骰子，观察它出现的点数；

Ⅲ 记录电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数；

Ⅳ 在一批同型号的节能灯管中任意抽取一只，测试它的使用寿命；

Ⅴ 在相同条件下，接连不断地向球篮投球，直到投中为止，记录投球的次数.

以上试验都可以在相同条件下重复进行. 试验 Ⅰ 只有两种可能结果：出现正面朝上或出现反面朝上，但是在抛掷之前不知道究竟会出现哪一面朝上. 对于试验Ⅳ，灯管的使用寿命(以小时计)是一个非负的实数，而在测试之前不能确定它的寿命有多长. 概括起来，这些试验都具有下列特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果在试验之前是明确可知道的，并且不止一个；

(3) 每次试验之前不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

将具有上述三个特点的试验称为随机试验，简称试验. 我们通过随机试验来研究随机现象.

1.1.2　随机事件与样本空间

通常，根据我们研究的目的，将随机试验的每一个可能的结果，因为这种结果不可能再分解为更简单的结果，所以特别称为基本事件. 因为随机试验的所有可能结果是明确的，从而所有的基本事件也是明确的. 例如：在抛掷硬币的试验中“出现

反面”,“出现正面”是两个基本事件;又如在掷骰子试验中“出现一点”,“出现两点”,“出现三点”,…,“出现六点”这些都是基本事件.基本事件的全体,称为样本空间,也就是试验所有可能结果的全体是样本空间,样本空间通常用大写的希腊字母Ω表示,Ω中的点即是基本事件,也称为样本点,常用ω以及带下标的ω_i表示.

例 1　在前述试验 Ⅰ 中,令

$$\omega_0=\{反面朝上\},\omega_1=\{正面朝上\},$$

则

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}.$$

例 2　将一颗骰子连掷两次,依次记录所得点数,则可能出现的结果有 36 个:

$$\omega_{ij}=(第一次出现 i 点,第二次出现 j 点),$$

则样本空间是

$$\Omega=\{\omega_{ij},1\leqslant i,j\leqslant 6\}.$$

例 3　观察某电话交换台上午九点钟内所接到的呼唤次数,试验的可能结果是:0,1,2,3,…;样本点是$\omega_i=$“接到i次呼唤”,$i=0,1,2,\cdots$;样本空间$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 4　在单位正方形$(0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1)$内均匀地投针,观察针落点的坐标.样本点是$\omega_{xy}=(x,y),0\leqslant x,y\leqslant 1$;样本空间$\Omega=\{\omega_{xy},0\leqslant x,y\leqslant 1\}$.

在随机试验中,有时关心的是带有某些特征的基本事件是否发生.如在例 2 中,我们可以研究

$$A=\{两次出现的点数都是 3\},$$
$$B=\{两次出现的点数都是相同的奇数\},$$
$$C=\{两次出现的点数都大于 3\},$$

这些结果是否发生?其中A是一个基本事件,而B与C则由多个基本事件组成,相对于基本事件,称它们为复合事件.无论是基本事件还是复合事件,它们在试验中发生与否,都带有随机性,所以都叫做随机事件,或简称为事件.习惯上人们常用大写字母$A,B,C,\cdots$,以及这些带下标的大写字母表示事件.在试验中,如果出现A中所包含的某一个基本事件ω发生,则称作A发生,并记作$\omega\in A$.

我们已经知道样本空间Ω包含了全体基本事件,而随机事件不过是由某些特征的基本事件所组成,所以从集合论的观点来看一个随机事件不过是样本空间Ω的一个子集而已.如在例 2 中,$\Omega=\{\omega_{ij},1\leqslant i,j\leqslant 6\}$,显然,前述的随机事件$A,B,C$都是$\Omega$的子集,它们可以简单地表示为$A=\{\omega_{33}\}$,$B=\{\omega_{11},\omega_{33},\omega_{55}\}$,$C=\{\omega_{44},\omega_{45},\omega_{46},\omega_{54},\omega_{55},\omega_{56},\omega_{64},\omega_{65},\omega_{66}\}$.

又因为Ω是由所有基本事件组成，因而在任一次试验中，必然要出现Ω中的某一基本事件ω，即$\omega \in \Omega$. 也就是在试验中，Ω必然会发生，所以今后用Ω表示必然事件. 相应地，空集$\varnothing$可以看成是Ω的子集，在任意一次试验中，不可能有$\omega \in \varnothing$，也就是说$\varnothing$永远不可能发生，所以$\varnothing$是不可能事件. 必然事件和不可能事件的发生与否，已经失去了"随机性"，因而本质上它们不是随机事件. 但是为了方便起见，我们还是把它们看作随机事件，稍后我们会理解，它们不过是随机事件的两个极端情形而已.

1.1.3 事件的关系与运算

为了研究随机事件及其概率，我们需要说明事件之间的关系和运算，这将有助于通过对较简单事件概率的研究去掌握更复杂事件的概率.

如果没有特别的声明，在以下的叙述中总认为样本空间Ω已经给定，并且还给定了Ω中的一些事件，如$A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$等.

(1) 如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，或称A包含于B，并记作$A \subset B$或$B \supset A$. 例如在例2中，$A=\{$两次出现的点数都是3$\}$这一事件发生就导致事件$B=\{$两次出现的点数都是相同奇数$\}$的发生. 因为两次点数都为3意味着两次出现的都是相同奇数点，所以后者包含前者.

可以给上述的含义以一个直观的几何解释. 设样本空间Ω是一个正方形，A与B是两个事件，也就是Ω的某两个子集. "A发生必然导致B发生"意味着"属于A的ω，必然属于B，即A中的点全在B中"，其几何图形如图1.1所示：

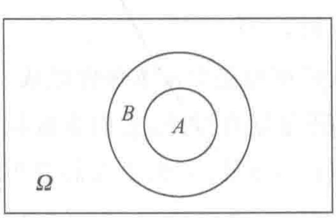

图 1.1

由此可知，事件$A \subset B$的含义与集合论中的意义是一致的.

因为不可能事件$\varnothing$不含有任何ω，所以对任一事件A，我们约定

$$\varnothing \subset A$$

(2) 如果有$A \subset B, B \subset A$同时成立，则称事件A与B相等，记作$A=B$. 易知，相等的两个事件A,B总是同时发生或同时不发生. 如在例2中，若$C=\{$两次出现的点数都大于3$\}$与$C_1=\{$两次出现的点数都不小于4$\}$，则显然有$C=C_1$. 直截了当地说，所谓$A=B$，就是A,B中含有相同的样本点. 因而，上述关于$A=B$的说法，看起来有点"绕圈子"，但是稍后就会看到，这种"绕圈子"的说法，在验证两个事件是否相等时是非

常有用的，在许多情形中可以说是唯一的一种方法.

(3)“事件 A 与 B 至少有一个发生”，这样的事件称作事件 A 与 B 的并(或和)，记作 $A \cup B$，它的几何表示如图 1.2，图中的阴影部分是事件“$A \cup B$”. 如在例 2 中，若

$$A = \{两次出现的点数都是 3\}$$

$$C = \{两次出现的点数都大于 3\}$$

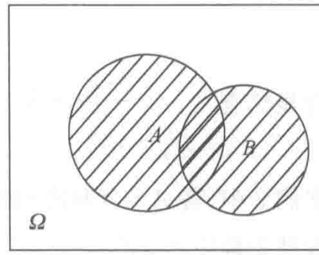

图 1.2

则

$$A \cup C = \{\omega_{33}, \omega_{44}, \omega_{45}, \omega_{46}, \omega_{54}, \omega_{55}, \omega_{56}, \omega_{64}, \omega_{65}, \omega_{66}\}$$

(4)“事件 A 与 B 同时发生”，这样的事件称作事件 A 与 B 的交(或积)，记作 $A \cap B$(或 AB)，它对应图 1.3 中的阴影部分.

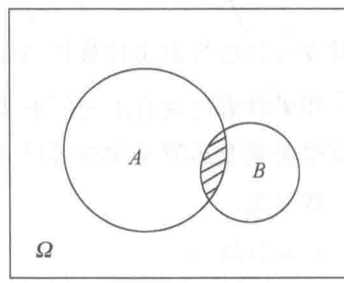

图 1.3

如在例 2 中，若 A，B 同上，则

$$A \cap B = \{\omega_{33}\}.$$

(5)“事件 A 发生而 B 不发生”，这样的事件称为事件 A 与 B 的差，记作 $A - B$，它表示了图 1.4 中的阴影部分. 如在例 2 中，若 B、C 同上，则

$$B - C = \{\omega_{11}, \omega_{33}\}.$$

我们还可以发现，$A - B = A - AB = A\overline{B}$，$\overline{B}$ 的定义见下文(7).

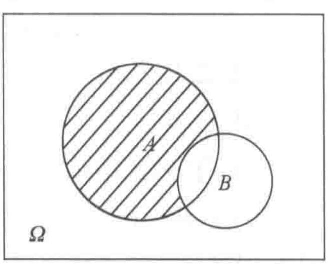

图 1.4

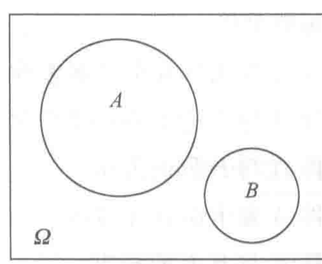

图 1.5

(6) 若事件 A 与 B 不能同时发生，也就是说 AB 是一个不可能事件，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容. 上面的图 1.5 表示了这一情形. 如在例 2 中，若 A，C 同上，则显然 A 与 C 不可能同时发生，即有 $AC = \varnothing$，也就是说 A 与 C 是互不相容的.

(7) 若 A 是一个事件，令 $\overline{A} = \Omega - A$，称 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件或逆事件. 容易知道，在一次试验中，若 A 发生，则 $\overline{A}$ 必不发生(反之亦然)，即 A 与 $\overline{A}$ 二者只能发生其

中之一,并且也必然发生其中之一.因而有

$$A\overline{A} = \varnothing,$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega,$$

此外显然有

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

如在例 2 中,若 $A = \{$两次出现的点数都是偶数$\}$,则 $\overline{A} = \{$两次出现的点数至少有一次是奇数$\}$.

(8) 若有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,则“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”这样的事件称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并,记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$;若“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”,这样的事件称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交,记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

如果读者已经有了一定的集合论知识,一定会发现事件间的关系及运算与集合间的关系及运算是完全可以互相类比的.下面给出这种类比的对应关系:

概率论	集合论
样本空间	$\Omega = \{\omega\}$
事件	子集
事件 A 发生	$\omega \in A$
事件 A 不发生	$\omega \notin A$
必然事件	Ω
不可能事件	$\varnothing$
事件 A 发生导致事件 B 发生	$A \subset B$
事件 A 与 B 至少有一个发生	$A \cup B$
事件 A 与 B 同时发生	$A \cap B$
事件 A 发生而 B 不发生	$A - B$
事件 A 与 B 互不相容	$AB = \varnothing$

在许多场合,用集合论的表达方式显得简练些,也更容易理解些.但对初学概率论的读者来说,重要的是要学会用概率论的语言来解释集合间的关系及运算,并能运用它们.

例 5 设 A, B, C 是 Ω 中的随机事件,则

(1) A 发生,而 B 与 C 不发生 $\Leftrightarrow \omega \in A, \omega \notin B, \omega \notin C \Leftrightarrow \omega \in A - B - C$;另一方面 $\omega \in A, \omega \notin B, \omega \notin C \Leftrightarrow \omega \in A, \omega \in \overline{B}, \omega \in \overline{C} \Leftrightarrow \omega \in A\overline{B}\overline{C}$.故“$A$ 发生,而 B 与 C 不发生”的事件可表示为 $A - B - C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}$.

进行类似的分析可得：

(2)“A,B,C 同时发生”的事件是 ABC；

(3)“A,B,C 同时不发生”的事件是 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(4)“A 与 B 发生，而 C 不发生”的事件是 $AB-C$ 或 $AB\overline{C}$；

(5)“A,B,C 至少有一个发生”的事件是 $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup ABC$. 这两者的区别在于前者 A,B,C 三个事件可能是相容的，而后者 $A\overline{B}\overline{C},\overline{A}B\overline{C},\overline{A}\overline{B}C,AB\overline{C},\overline{A}BC,A\overline{B}C,ABC$ 七个事件是互不相容的；

(6)“A,B,C 中不多于一个发生”的事件 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(7)“A,B,C 中恰有一个发生”的事件 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

(8)“A,B,C 至多有两个发生”的事件是 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$ 或 $A\cup B\cup C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}-ABC$.

例 6　设袋中有红、白、黄各一球，有放回地抽三次，每次抽一个球(有放回的意思是抽出球后仍把抽出的球放回原袋中)，试说明下列事件是否相容？如果不相容，还要说明是否对立？

(1) $A=$“三次抽取，颜色全不同”，$B=$“三次抽取，颜色不全同”；

(2) $A=$“三次抽取，颜色全同”，$B=$“三次抽取，颜色不全同”；

(3) $A=$“三次抽取，无红色球”，$B=$“三次抽取，无黄色球”；

(4) $A=$“三次抽取，无红色球也无黄色球”，$B=$“三次抽取，无白色球”.

解　(1) 因为三次抽取，颜色不全同包含了颜色全不同的事件，所以 A 与 B 相容.

(2) 颜色全同的反面是颜色不全同，所以 A,B 是对立的. 自然 A 与 B 互不相容.

(3) 三次抽取无红色球包括了颜色全白的事件，三次抽取无黄色球也包括了颜色全白的事件，所以 A 与 B 相容.

(4) 三次抽取无红色球也无黄色球事件是一个三次抽取颜色全白的事件，而三次抽取无白色球与三次抽取颜色全白的事件不能同时发生，所以 A 与 B 互不相容；但无白色球不等于不全白，故 A 与 B 不对立.

1.1.4　事件运算的基本性质

事件的运算具有下面的基本性质：

(1) 否定律：$\overline{\overline{A}}=A,\overline{\Omega}=\varnothing$；

(2) 幂等律:$AA = A, A \cup A = A$;

(3) 交换律:$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$;

(4) 结合律:$A(BC) = (AB)C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

(5) 分配律:$A(B \cup C) = AB \cup AC, A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$;

(6) 德·摩根(De Mougan)公式(对偶原则):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

更一般的有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

对可列个事件上式也成立.

以上性质容易通过文氏图看出,也可运用事件的关系和运算的定义证明. 作为例子,我们证明 $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$.

用概率论语言证明,若 $A \cup BC$ 发生,则 A 与 BC 中至少有一个发生. 若 A 发生,则 $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 同时发生,即 $(A \cup B)(A \cup C)$ 发生;若 BC 发生,则 B 与 C 同时发生,从而 $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 同时发生,即 $(A \cup B)(A \cup C)$ 发生. 综上所述,$A \cup BC$ 发生必然导致 $(A \cup B)(A \cup C)$ 发生,故 $A \cup BC \subset (A \cup B)(A \cup C)$. 反过来,仿前可证:$(A \cup B)(A \cup C) \subset A \cup BC$. 由此得 $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$.

另外,我们对德·摩根公式说明如下:

因为事件 $A \cup B$ 表示两事件 A 与 B 中至少有一事件发生,它的对立事件显然就是 A 与 B 都不发生,即 $\overline{A}\overline{B}$,所以 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立;

因为事件 $\overline{A} \cup \overline{B}$ 表示两事件 A 与 B 中至少有一事件不发生,它的对立事件显然就是 A 与 B 都发生,即 AB,所以 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 成立.

这一性质推广到多个事件的情形也成立. 德·摩根公式表明:若干个事件的并的对立事件就是各个事件的对立事件的交;若干个事件的交的对立事件就是各个事件的对立事件的并.

§1.2 频率和概率

回忆 §1.1 节中的试验 Ⅰ,我们已经知道它是一个随机试验,并且样本空间 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$,其中

$$\omega_0 = \{\text{反面朝上}\}, \omega_1 = \{\text{正面朝上}\}$$

是基本事件. 在一次试验中,虽然不能肯定是 ω_0 还是 ω_1 发生,但是我们可以问在一

次试验中发生 ω_0(或 ω_1) 的可能性有多大?由对称性,很自然地断定在一次试验中,出现 ω_0(或 ω_1) 的可能性是$\frac{1}{2}$,因为我们知道硬币的材质是均匀的,形状是对称的,现在引入定义如下:

定义 随机事件 A 发生可能性大小的度量(数值),称为 A 发生的概率,记作 $P(A)$.

对于一个随机事件来说,它发生可能性大小的度量是由它自身决定的,并且是客观存在的.就好比一根木棒有长度、一块土地有面积一样,概率是随机事件发生可能性大小的度量,是随机事件自身的一个属性.一个根本的问题是,对一个给定的随机事件,它发生可能性大小的度量 —— 概率,究竟是多大呢?在前面的例子中,因为已经知道了硬币共有两面,才得以断定 $P(\omega_1)=\frac{1}{2}$.如果是一个比较复杂的试验,并且没有对称性,我们很难判断事件的概率值.引言中已经提到多次重复抛掷一枚均匀的硬币,出现正面朝上的次数大致占抛掷总次数的一半,也就是说随着试验次数 n 的增大,正面向上的次数 n_{ω_1} 与试验次数 n 的比值$\frac{n_{\omega_1}}{n}$ 会逐渐稳定到$\frac{1}{2}$,记

$$f_n(\omega_1)=\frac{n_{\omega_1}}{n}=\frac{\text{出现 }\omega_1\text{ 的次数}}{\text{试验总次数}},$$

称 $f_n(\omega_1)$ 为事件 ω_1 在 n 次试验中出现的频率.频率当然也在一定程度上反映了 ω_1 发生可能性的大小.尽管每做一组(n 次) 试验,所得到的频率 $f_n(\omega_1)$ 可以各不相同,但是只要 n 相当大,$f_n(\omega_1)$ 与 $P(\omega_1)$ 是会非常“靠近”的.因此概率是可以通过频率来“测量”的,或者说频率是概率的一个近似.例如在装有若干个红球与蓝球的盒子中任取一球观察取球的颜色,即使事先并不知道盒子中红球和蓝球的比例数(这时概率虽然不知道,但它是客观存在的),经过反复多次的试验后,如果取得红球的频率逐渐稳定在$\frac{1}{2}$,那么我们就可以判断盒子中的红球数和蓝球数是相等的,进一步即可得到取得红球的概率为$\frac{1}{2}$ 这个结论.这件事情其实质与测量长度和面积一样的平常.给定一根木棒,它有自身“客观”的长度,长度是多少?我们可以用尺或仪器去测量,不论尺或仪器多么精确,测得的数值总是稳定在木棒真实的“长度”值的附近.事实上,人们也是把测量所得的值当作真实的“长度”.这个类比不仅帮助我们去理解概率和频率之间的内在关系,而且还启示了更深刻的事实:概率与长