泛函分析引论

徐景实　林诗游/编著

科学出版社

泛函分析引论

徐景实　林诗游　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

为适应高等学校数学类课程改革的需要，编者总结多年教学实践经验，并在吸收国内外的一些优秀教材的基础上编写了本书. 本书内容包括度量空间、线性算子与线性泛函、线性算子的谱等. 每节后均配有练习，书后配有练习提示或答案并配有附录和名词索引.

本书可作为普通高等学校数学类各专业高年级本科生或工科研究生的泛函分析课程入门教材，也可作为普通高等学校教师的教学参考书，还可供相关研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析引论/徐景实，林诗游编著. —北京：科学出版社，2019.6

ISBN 978-7-03-061672-2

Ⅰ. ①泛…　Ⅱ. ①徐…　②林…　Ⅲ. ①泛函分析-研究　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 117083 号

责任编辑：彭婧煜／责任校对：樊雅琼

责任印制：张　伟／封面设计：众轩企划

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2019 年 6 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16

2019 年 6 月第一次印刷　印张：15

字数：292 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

泛函分析兴起于 20 世纪 20 年代, 它是从变分法、数学物理方程、函数论等研究中发展起来的一门重要的独立学科. 当时人们试图用统一的数学观点来阐述自 19 世纪以来取得的重大数学成果, 并考虑将之从有限维欧氏空间推广到无限维抽象空间中去. 此外, 对量子力学方面的一些相关数学问题的研究也推动了泛函分析的形成和发展. 1932 年, 波兰数学家 Banach 出版了第一部泛函分析专著, 开启了泛函分析学科化的先河.

线性泛函分析的基本理念是通过各种映射来探寻两个拓扑线性空间之间的关系, 其主要特点是运用几何与代数的思想方法研究分析学方面的相关课题. 分析学中要处理的各种函数空间多数是无限维的, 因此泛函分析研究的空间一般是无限维的, 所以泛函分析又被看作无限维的分析学. 泛函分析以其他数理学科所提供的研究思路和成果来不断提取出自己的研究课题, 并形成了许多重要分支, 广泛应用于概率论、计算数学、量子物理、控制论、最优化理论等学科中, 强有力地推动了科学的发展.

本书是一部关于泛函分析的入门教材, 主要面向高校数学系本科生及工科研究生, 内容包含了线性泛函分析中的基础知识和理论. 本书关注有限维空间相关定理在无限维空间的推广及应用, 力求以最简明的方式去阐述其中最为核心的内容, 并更加接近科学研究中的实际应用. 本书有以下几个特别之处: ① 关于度量空间的完备化, 是通过把它嵌入到一个完备空间从而得到完备化空间的存在性, 这样省去了学生对经典的完备化构造过程理解的困难; ② 指出了开映射定理、闭图像定理、逆算子定理、范数等价定理的等价性, 帮助学生更好地理解这些重要的定理; ③ 证明凸函数控制的线性泛函的延拓定理, 将次线性泛函的延拓定理作为推论, 不但简化了证明, 而且扩大了定理的应用范围; ④ 对应用中很重要的 Lebesgue 函数空间的一致凸性作了详细的介绍, 由此给出 Lebesgue 函数空间的对偶空间; ⑤ 对无限维空间上的微分理论和凸分析作了简单介绍. 这些内容将会为学生继续学习数学打下基础.

全书共 3 章. 第 1 章介绍度量空间的相关概念和性质, 这是学习泛函分析的预备知识, 包括完备赋范空间 (Banach 空间)、完备内积空间 (Hilbert 空间)、不动点定理及应用等. 第 2 章讲解各类算子, 特别是有界线性算子和线性泛函, 介绍了 Riesz 定理、开映射定理、共鸣定理、Hahn-Banach 定理等一系列线性泛函分析中经典而重要的成果. 第 3 章论述了线性算子的谱的基本理论, 特别是对紧算子的谱

性质进行了较大篇幅的阐述.

为了方便读者, 全书的符号多是通用的. 特别地, 0 可以表示数字零、零向量、零函数. 读者容易分辨它们在不同情况下的含义. 符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, 也可以表示泛函对元素的作用.

本书是在作者多年来给本科生、数学教育硕士和农村特岗硕士的授课讲义的基础上修改而成的. 在此感谢学生在学习过程中给我们提出的一些建议. 感谢作者的硕士毕业生程晨、董宝华、李亚玲、沈聪辉、杨小迪、李文昌、魏海花、马茹梦, 他们对全书做了仔细的阅读和校对. 本书得到了国家自然科学基金 (11761027)、海南省高等学校教育教学改革研究项目 (Hnjg2017ZD-13)、海南省自然科学基金 (2018CXTD338) 的资助, 在此表示感谢. 最后要特别感谢科学出版社编辑们的帮助和支持.

由于作者水平有限, 书中难免存在不妥和疏漏之处, 恳请读者批评指正.

徐景实　林诗游

2019 年 2 月

目 录

第1章 度量空间

泛函分析的研究对象是赋范空间. 它们是度量空间, 当然更是拓扑空间. 因此泛函分析的许多基本概念可以从度量空间或者拓扑空间说起. 虽然度量空间在数学分析中已经出现, 但是可能有些读者还不够熟悉, 所以本章先介绍度量空间, 然后介绍赋范空间和内积空间.

1.1 度量空间简介

定义 1.1.1 设 X 是一个非空集合, ρ 是 $X\times X$ 上一个实函数, 对所有 x, y, $z\in X$ 满足:

(i) $\rho(x,y)\geqslant 0$;

(ii) $\rho(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

(iii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$, 即三角不等式,

则称 ρ 为 X 上的一个距离或度量. 此时 (X,ρ) 称为度量空间. 有时为了简便称 X 为度量空间.

若 ρ 是 X 上的一个度量, 则由条件 (ii), 条件 (iii) 知对 $\forall x,y\in X$, 有 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, 即度量是对称函数.

常见的度量空间有:

例 1.1.1 (a) 记 $\mathbb{R}$ 为全体实数的集合. $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 定义 $\rho(x,y)=|x-y|$, 则 $(\mathbb{R},\rho)$ 为一度量空间. 这就是数学分析中 $\mathbb{R}$ 上的度量.

(b) 设 X 是一个非空集合, 定义 $\rho\colon X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

则 (X,ρ) 为度量空间, 此时称 ρ 为离散度量, (X,ρ) 为离散度量空间.

例 1.1.2 Minkowski 距离. 设 $1\leqslant p<+\infty$, 定义 ρ_p : $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p};$$

$$\rho_\infty(x,y)=\max\{|x_i-y_i|:1\leqslant i\leqslant n\},$$

这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 则 $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$ 为度量空间. ρ_p 被称为 Minkowski 距离. 当 $p=2$ 时, ρ_p 称为欧氏距离, 另外, ρ_1 称为 Manhattan 距离, ρ_∞ 称为 Chebyshev 距离. 相应的空间分别称为 Minkowski 空间、欧氏空间、Manhattan 空间、Chebyshev 空间.

显然 ρ_p 满足定义 1.1.1 中的条件 (i) 和条件 (ii), 而条件 (iii) 可以由如下的 Minkowski 不等式得到:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p}, \quad \forall a_i,b_i\in\mathbb{R},\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

传统上, Minkowski 不等式是由 Hölder 不等式推出的. 附录 A 介绍了文献 [1] 中的方法, 可以将它们都推出.

当 (X,ρ) 是一个度量空间时, 很容易将 $\mathbb{R}$ 上的概念推广到 (X,ρ) 上. 设 $a\in X$, $r>0$, 集合 $B(a,r)=\{x\in X:\rho(a,x)<r\}$ 称为以 a 为球心, r 为半径的开球. 集合 $\overline{B}(a,r)=\{x\in X:\rho(a,x)\leqslant r\}$ 称为以 a 为球心, r 为半径的闭球.

定义 1.1.2 设 (X,ρ) 是一个度量空间, $E\subset X$.

(i) 若 $\exists r>0$ 使得 $B(a,r)\subset E$, 则称 a 为 E 的内点, E 的所有内点的全体称为 E 的内部. 记为 $\operatorname{int}E$ 或 $\overset{\circ}{E}$;

(ii) 若 a 为 E 的内点, 则称 E 为 a 的邻域;

(iii) 若 E 的每个点都是 E 的内点, 则称 E 为开集;

(iv) 若 a 的任意邻域有 E 中异于 a 的点, 则称 a 为 E 的聚点;

(v) E 与 E 的全体聚点的并集称为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$;

(vi) 若 E 的聚点全体包含在 E 内, 则称 E 为闭集;

(vii) 若存在 $r>0$ 使得 $B(a,r)\cap E=\{a\}$, 则称 a 为 E 的一个孤立点;

(viii) 若对任意 $r>0$, $B(a,r)\cap E\neq\varnothing$, $B(a,r)\cap E^{\mathrm{C}}\neq\varnothing$, 则称 a 为 E 的一个边界点, 边界点的全体称为边界.

习惯上约定空集既是开集又是闭集. 任意集合的内部为开集, 因为任意开球是开集. 任意集合的闭包是闭集, 因为若 a 是集合 E 的闭包的聚点, 则必是 E 的聚点. 度量空间中的单点集一定为闭集. 下面的命题说明开集与闭集具有对偶性.

命题 1.1.1 设 E 是度量空间 (X,ρ) 的子集, 则 E 是开集等价于 E 的余集 E^{C} 为闭集.

证明 若 E 为开集, 则对任意 $x\in E$, 存在 $r>0$ 使得 $B(x,r)\subset E$, 即 x 不是 E^{C} 的聚点, 故 E^{C} 的聚点包含在 E^{C} 内, 所以 E^{C} 为闭集.

反之, 若 E^{C} 为闭集, 则 E 中的任意点不是 E^{C} 的聚点, 所以存在 $r>0$ 使得 $B(x,r)\cap E^{\mathrm{C}}=\varnothing$, 即 x 为 E 的内点. 故 E 为开集. □

很容易证明任意个开集的并为开集, 任意个闭集的交为闭集. 有限个开集的交为开集, 有限个闭集的并为闭集.

例 1.1.3 若 x 为离散度量空间中的任意点, 则 $\{x\}$ 既是开集又是闭集. 事实上离散度量空间中的任意点集既是开集又是闭集. 离散度量空间中的任意点集没有聚点, 因为每一个点都是孤立点.

只有离散度量空间具有上面的性质. 但是在后面我们要学习的空间多数不是离散度量空间.

若 S 是度量空间 (X,ρ) 的子集, 则 ρ 限制在 $S\times S$ 上也是一个度量, 称为由 ρ 在 S 上导出的度量, 此时称 (S,ρ) 为 X 的度量子空间. 若 $x\in S, r>0$, 则 $S\cap B(x,r)$ 和 $S\cap\overline{B}(x,r)$ 分别是 x 在子空间 S 内以 x 为球心, r 为半径的开球和闭球. 不但 S 中的开球和闭球具有此形式, 一般地, 子空间 S 中的开集和闭集也有这种形式.

命题 1.1.2 设 S 是度量空间 (X,ρ) 的子空间, A 是 S 中的子集, 则 A 是 S 内的开集当且仅当存在 X 中的开集 E 使得 $A=S\cap E$, A 是 S 内的闭集当且仅当存在 X 中的闭集 E 使得 $A=S\cap E$.

证明 只对开集的情况进行证明. 闭集的情况类似可证. 设 $A=S\cap E$, E 是 X 的开集, 若 $x\in A$, 则存在 $r>0$ 使得 $B(x,r)\in E$. 因此有

$$x\in S\cap B(x,r)\subset S\cap E.$$

而 $S\cap B(x,r)$ 即 S 内中心在 x, 半径为 r 的球, 即 x 是 $S\cap E$ 在子空间 S 内的内点. 因此 $A=S\cap E$ 是 S 内的开集.

反之, 设 A 是 S 内的开集, $\forall x\in A$, 存在 $r_x>0$ 使得 $S\cap B(x,r_x)\subset A$, 因此

$$A=\bigcup_{x\in A}(S\cap B(x,r_x))=S\cap\bigcup_{x\in A}B(x,r_x).$$

而 $\bigcup_{x\in A}B(x,r_x)$ 是 X 中的开集. □

定义 1.1.3 设 (X,ρ) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的点列, $x\in X$. 若对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得当 $n>N$ 时, 有 $x_n\in B(x,\varepsilon)$, 则称 $\{x_n\}$ 收敛到 x, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 此时又称点列 $\{x_n\}$ 收敛.

由于 (X,ρ) 为度量空间, 因此若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 则此极限必是唯一的. 什么样的点列存在极限呢?

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的点列, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得当 $n,m>N$ 时有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为基本列, 或 Cauchy 列. 由极限的定义可知, 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必为基本列. 但反之不成立. 容易验证一个基本列收敛当且仅当其存在一个收敛的子列.

若度量空间 X 中的每一个基本列在 X 中都存在极限, 则称 X 为完备空间.

在前面我们定义了闭集. 之所以称闭集为闭集, 是因为闭集对极限运算封闭.

命题 1.1.3 *S 是度量空间 X 中的闭集, 当且仅当若 $\{x_n\} \subset S$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 必有 $a \in S$.*

证明 若 S 为闭集, 则 S^{C} 为开集, 若 $\{x_n\} \subset S$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则必有 $a \in S$. 否则, 若 $a \in S^{\mathrm{C}}$, 则存在一个 $r > 0$, 使得 $B(a, r) \subset S^{\mathrm{C}}$. 由极限的定义知 a 不可能是 x_n 的极限.

反之, 若 S 不是闭集, 即 S^{C} 不是开集, 则存在 $a \in S^{\mathrm{C}}$, 但 a 不是 S^{C} 的内点, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in S$, 使得 $\rho(a, x_n) < 1/n$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 这与假设 $a \in S$ 矛盾. □

下面的命题说明了完备性与闭集的关系.

命题 1.1.4 *度量空间的完备子空间必是闭集, 完备度量空间的闭子空间必是完备的.*

证明 设 S 是度量空间 X 的完备子空间. 若 $\{x_n\} \subset S$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 则 $\{x_n\}$ 是 S 中的基本列, 由 S 的完备性, 则 $x \in S$. 由命题 1.1.3 知 S 为闭集.

设 S 是完备度量空间 X 的闭子集. 若 $\{x_n\} \subset S$ 是基本列, 则有 $x \in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 由于 S 是闭集, 由命题 1.1.3 知 $x \in S$. 由此说明 S 是完备的. □

例 1.1.4 *$[0,1]$ 作为 $\mathbb{R}$ 中的子空间是完备的, 但是 $(0,1)$ 就不是完备的.*

设 A, B 是 X 中的子集, 若 $B \subset \overline{A}$, 则称 A 是 B 的稠密集. A 是 B 的稠密集等价于 B 中的任意元素可以由 A 中的元素任意逼近, 或者说对 $\forall y \in B$, 存在 A 中的点列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

若 X 存在一个可数的稠密子集, 这里的可数子集包括空集、有限集和可数无穷集, 则称 X 为可分的. $\mathbb{R}$ 是可分的是因为全体有理数是 $\mathbb{R}$ 的可数稠密集; 同样地, 对于任意正整数 n, $\mathbb{R}^n$ 也是可分的.

命题 1.1.5 *设 X 是一个可分的度量空间, 则 X 中的任何子集都是可分的.*

证明 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的稠密子集. E 是 X 的一个非空子集. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 任意 $k \in \mathbb{N}$, 任取 $y_{n,k} \in B(x_n, 1/k) \cap E$, 那么 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{y_{n,k}\}$ 至多为可数集. 下证此集合是 E 的稠密集.

对任意 $z \in E$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $1/k < \varepsilon$, 则存在 x_n 使得 $z \in B(x_n, 1/2k)$. 对于 $y_{n,2k}$ (此时 $y_{n,2k}$ 存在, 因为 $z \in B(x_n, 1/2k) \cap E$), 则有 $z \in B(y_{n,2k}, 1/k) \subset B(y_{n,2k}, \varepsilon)$. □

这个结论导出在一般的拓扑空间中的一个定义, 设 X 是一个可分的拓扑空间, 若 X 中的任何子集都是可分的, 则称 X 是可分遗传的. 命题 1.1.5 说明可分的度量空间是可分遗传的.

由命题 1.1.4 知 $I=(0,1]$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 上的通常度量下不完备. 虽然一个度量空间不一定完备, 但由命题 1.1.4 和练习 1.1 中 13 题, 它可以看成是某个完备空间的稠密子集. 设 X 是度量空间, Y 是包含 X 的完备度量空间, 若 $\overline{X}=Y$, 则称 Y 是 X 的完备化空间. 由练习 1.1 中 13 题知任意度量空间必有完备化空间. 不难证明在等距同构的意义下完备化空间是唯一的. 所谓度量空间 (X,ρ) 与 (Y,d) 等距同构是指存在它们之间的双射 T 使得对任意 $x,y\in X$, $\rho(x,y)=d(Tx,Ty)$.

设 X,Y 是度量空间, f 是从 X 到 Y 内的映射, 若对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in B(a,\delta)$ 时, 有 $f(x)\in B(f(a),\varepsilon)$, 则称 f 在 a 处连续. 否则称 f 在 a 处间断. 若 f 在 X 内的每一个点处都连续, 则称 f 在 X 上连续.

在整个空间 X 上的连续性, 有下列等价判别. 记 $f^{-1}(A)=\{a\in X: f(a)\in A\}$.

命题 1.1.6 设 X,Y 是度量空间, f 是从 X 到 Y 内的映射, 则下面三个陈述等价:

(i) f 在 X 上连续;

(ii) 对任意 Y 中的开集 A, $f^{-1}(A)$ 为 X 的开集;

(iii) 对任意 Y 中的闭集 A, $f^{-1}(A)$ 为 X 的闭集.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 设 f 在 X 上连续, A 是 Y 中的开集, 若 $a\in f^{-1}(A)$, 即 $f(a)\in A$. 由于 A 为开集, 则存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(f(a),\varepsilon)\subset A$. 再由于 f 在 a 处连续, 则存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in B(a,\delta)$ 时, 有 $f(x)\in B(f(a),\varepsilon)\subset A$, 即 $B(a,\delta)\subset f^{-1}(A)$. 也就是 a 为 $f^{-1}(A)$ 的内点. 由 a 的任意性得 $f^{-1}(A)$ 为开集.

(ii)$\Rightarrow$(i) 若 $a\in X$, $\forall\varepsilon>0$, 记 $A=B(f(a),\varepsilon)$, 则 A 为 Y 中的开集, 且 $a\in f^{-1}(A)$. 由于 $f^{-1}(A)$ 为开集, 所以存在 $\delta>0$ 使得 $B(a,\delta)\subset f^{-1}(A)$, 即当 $x\in B(a,\delta)$ 时, 就有 $f(x)\in B(f(a),\varepsilon)$. 因此 f 在 a 处连续. 由 a 的任意性知 f 在 X 上连续.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) 这是因为 A 为闭集, 当且仅当 A^{C} 为开集, 且 $[f^{-1}(A)]^{\mathrm{C}}=f^{-1}(A^{\mathrm{C}})$. □

此命题说明若 f 是两个度量空间之间的映射, 则 f 在整个空间连续等价于任何开集的逆像 (原像) 都是开集, 但一般地, f 不是将开集映射到开集. 例如, 直线 $\mathbb{R}$ 上的常量函数是连续的, 但是它将开集映射到闭集.

下面是映射在一个点处的基本性质, 其证明留作练习.

命题 1.1.7 设 X, Y, Z 是度量空间, f,g 是从 X 到 Y 内的映射, h 是从 Y 到 Z 内的映射.

(i) 若 f 在 a 处连续, 而 h 在 $f(a)$ 处连续, 则 $h\circ f$ 在 a 处连续;

(ii) 若 Y 为数域 $\mathbb{R}$, f, g 在 a 处连续, 则 $f\pm g$, $f\cdot g$, $\max\{f(x),g(x)\}$, $\min\{f(x),g(x)\}$, $f(x)/g(x)(g(a)\neq 0)$ 都在 a 处连续.

定义 1.1.4　设 $(X,\rho),(Y,d)$ 是度量空间, f 是从 X 到 Y 内的映射, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\rho(x,y)<\delta$ 时, 有 $d(f(x),f(y))<\varepsilon$, 则称 f 一致连续.

若对任意 $x,y\in X$, 有 $d(f(x),f(y))<\rho(x,y)$, 则称 f 为非扩张映射.

因此, 非扩张映射必是一致连续的. 下面的延拓定理是非常有用的.

定理 1.1.1　设 (X,ρ) 是度量空间, (Y,d) 是完备度量空间, D 是 X 的稠密子集. 若 f 是从 D 到 Y 内的一致连续映射, 则存在 X 上的唯一连续映射使得 $F(x)=f(x),\forall x\in D$ 且 F 在 X 上一致连续.

证明　由 f 在 D 上一致连续, 则对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x,y\in D$ 且 $\rho(x,y)<\delta$ 时, 有 $d(f(x),f(y))<\varepsilon$. 由于 D 是 X 的稠密子集, 则对 $\forall x\in X$, 存在 $x_n\in D$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 即存在 N 使得当 $n,m>N$ 时, 有 $\rho(x_n,x_m)<\delta$. 此时有 $d(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$. 因此 $f(x_n)$ 是 Y 的基本列. 由 Y 的完备性, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$, 记此极限为 $F(x)$, 则 $F(x)$ 与 x_n 的选取无关. 因为若 $x_n'\to x$, 则 $x_1,x_1',x_2,x_2',\cdots,x_n,x_n',\cdots$ 也收敛到 x, 且 $f(x_1),f(x_1'),f(x_2),f(x_2'),\cdots,f(x_n),f(x_n'),\cdots$ 收敛. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')$. 显然 $\forall x\in D$, 有 $F(x)=f(x)$. 下面说明 $F(x)$ 一致连续, $\forall\varepsilon>0$, 设 $x,y\in X$, 若 $\rho(x,y)<\delta/3$, 任取 $x_n,y_n\in D$ 使得 $x_n\to x,y_n\to y$. 因此有 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$, $F(y)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$. 所以存在 N, 当 $n>N$ 时有 $\rho(x_n,x)<\delta/3$, $d(F(y),f(y_n))<\varepsilon$, $\rho(y_n,y)<\delta/3$, $d(F(x),f(x_n))<\varepsilon$. 取 $n>N$, 此时有 $\rho(x_n,y_n)<\delta$, 因此

$$d(F(x),F(y))\leqslant d(F(x),f(x_n))+d(f(x_n),f(y_n))+d(f(y_n),F(y))<3\varepsilon.$$

故 $F(x)$ 在 D 上一致连续. □

上面的延拓定理是对一般的映射而言, 对连续函数, 则有如下的 Tietze 延拓定理.

定理 1.1.2 (Tietze 延拓定理)　设 X 是度量空间, Y 是 X 的闭子空间, f 是从 Y 到 $\mathbb{R}$ 内的有界连续函数, 则存在从 X 到 $\mathbb{R}$ 内的有界连续函数 F, 满足:

(i) 对任意的 $y\in Y$, $F(y)=f(y)$;

(ii) $\inf\{F(x):x\in X\}=\inf\{f(y):y\in Y\}$;

(iii) $\sup\{F(x):x\in X\}=\sup\{f(y):y\in Y\}$.

此定理的证明在这里略去, 有兴趣的读者可见参考文献 [2] 的 144 页和 145 页.

若 S 是 X 的非空子集, $x\in X$, 则 x 到集合 S 的距离定义为

$$\rho(x,S)=\inf\{\rho(x,s):s\in S\}.$$

第一个问题是 $\rho(x,S)$ 能否取到. 若对任意 $x\in X$, 存在 $u\in S$ 使得 $\rho(x,S)=\rho(x,u)$, 则称 S 为可近集. 同时称 u 为 x 在 S 中的最佳逼近元. 第二个问题是当 S

是可近集时, 最佳逼近元是否唯一. 如果对任意 $x \in X$, 在 S 内存在唯一的逼近元, 则称 S 为 Chebyshev 集. 第三个问题是最佳逼近元具有什么性质或函数 $\rho(x,S)$ 具有什么性质. 这里不深入讨论这三个问题. 在后面章节里我们会讨论第一个问题和第二个问题.

若 T 是 X 的非空子集, 则定义 S 与 T 之间的距离为

$$\rho(S,T) = \inf\{\rho(s,t) : s \in S, t \in T\}.$$

下面的命题说明 $\rho(x,S)$ 是 X 上的一致连续函数, 其证明留作练习.

命题 1.1.8 设 S 是 X 的非空子集, $\forall x, y \in X$, 则有

$$|\rho(x,S) - \rho(y,S)| \leqslant \rho(x,y).$$

若 S 是 X 的非空子集, S 的直径定义为

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in S\}.$$

设 S 为 X 的子集, 若 S 的直径有限, 则称 S 为有界集. 换言之, 若 S 能被一个球所覆盖, 则 S 就是有界集.

练 习 1.1

1. 设 $C^m[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上有直到 m 阶连续导数的一切函数的全体, 对任意 $x, y \in C^m[a,b]$, 令

$$\rho(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|.$$

证明 ρ 是 $C^m[a,b]$ 上的度量.

2. 设 $C(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上所有连续函数的全体, 对任意 $x, y \in C(\mathbb{R})$, 令

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{-k\leqslant t\leqslant k} |x(t) - y(t)|}{1 + \max\limits_{-k\leqslant t\leqslant k} |x(t) - y(t)|}.$$

证明 ρ 是 $C(\mathbb{R})$ 上的度量.

3. 设 X 为度量空间, 证明:

(i) X 中任意个开集的并为开集, 有限个开集的交为开集;

(ii) X 中任意个闭集的交为闭集, 有限个闭集的并为闭集;

(iii) 举例说明可列个开集的交不一定为开集;

(iv) 举例说明可列个闭集的并不一定为闭集.

4. 设 E 为度量空间 X 中的子集. 证明 E 在 X 内稠密当且仅当 X 中的非空开集含有 E 中的点.

5. 证明度量空间 X 中可数个可分子空间的并是可分的.

6. 设 x 是度量空间 X 中的点, 若存在 $r>0$ 使得 $B(x,r)=\{x\}$, 则称 x 为 X 中的孤立点, 证明可分度量空间的孤立点全体为可数集.

7. 证明可分度量空间中的一族互不相交开集的全体为可数集.

8. 设 S 是度量空间 X 中的非空集, 则 S 是闭的当且仅当 $\forall x \notin S, \rho(x,S)>0$.

9. 举例说明存在 $\mathbb{R}$ 上非空集 S 和 T, $\rho(S,T)=0$, 但 $S\cap T=\varnothing$.

10. 度量空间 X 完备的充要条件是 X 中半径趋于 0 的闭球套有非空的交.

11. 记 $I=(0,1]$. 定义 $I\times I$ 上的映射 ρ 为: $\rho(x,y)=|1/x-1/y|, \forall x,y\in I$. 证明 (I,ρ) 为完备空间.

12. 设 A,B 是度量空间的完备子集, 证明 $A\cup B$ 和 $A\cap B$ 都是完备子集.

13. 设 (X,d) 为度量空间, 记 $\ell^\infty(X)$ 是由 X 上的所有有界实函数组成的度量空间, 其度量为

$$\rho(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|:\ x\in X\}.$$

证明: (i) $\ell^\infty(X)$ 为完备的; (ii) (X,d) 可以等距嵌入到 $\ell^\infty(X)$.

14. 设 $Tx(t)=\displaystyle\int_a^b K(t,s)|t-s|^{-\alpha}x(s)\,\mathrm{d}s$.

(i) 若 $K(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续且 $\alpha<1$, 证明 T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 内的连续映射;

(ii) 若 $K(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上有界可测且 $\alpha<1/2$, 证明 T 是从 $L^2[a,b]$ 到 $L^2[a,b]$ 内的连续映射;

(iii) 若 $K(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续且 $\alpha<1/2$, 证明 T 是从 $L^2[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 内的连续映射.

15. 设 $Tx(t)=\displaystyle\int_a^b K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$. 若 $K(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续可微, 证明 T 是从 $C[a,b]$ 到 $C^1[a,b]$ 内的连续映射.

16. 证明命题 1.1.8.

17. 证明 Uryson 引理: 设 S 和 T 是度量空间 X 中不相交的闭子集. 存在连续函数 $f: X\to[0,1]$ 使得 $f(S)=\{0\}, f(T)=\{1\}$.

18. 设 $\alpha\in(0,1]$, f 是从度量空间 (X,ρ) 到度量空间 (Y,d) 的映射, 使得 $d(f(x),f(y))\leqslant C\rho(x,y)^\alpha$ 对任意 $x,y\in X$ 成立, 则称 f 为 α 阶的 Hölder 映射, C 为 α 阶的 Hölder 系数. 若 f 是从欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 $\varOmega$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的 α 阶的 Hölder 映射, 证明存在 f 在 $\overline{\varOmega}$ 上保持 α 阶 Hölder 系数不变的延拓.

1.2 紧　性

设 S 是度量空间 (X,ρ) 的子集, $\mathscr{U}$ 是 X 的子集族, 若 $S\subset\bigcup_{V\in\mathscr{U}}V$, 则称 $\mathscr{U}$ 覆盖 S.

若每一个 $V\in\mathscr{U}$ 都是开集, 则称 $\mathscr{U}$ 是 S 的开覆盖. 若 $\mathscr{U}$ 还是有限集, 则称 $\mathscr{U}$ 为 S 的有限覆盖. 若 F 是 $\mathscr{U}$ 的子集且覆盖 S, 则称 F 是 S 的一个子覆盖.

若 X 的任意开覆盖都存在有限的子覆盖, 称 X 为紧的度量空间. 若 S 是 X 的子集, 且 S 由 ρ 导出的度量空间为紧时, 称 S 为 X 内的紧子集. 由命题 1.1.2 知 S 为 X 内的紧子集等价于 S 在 X 内的任意开覆盖存在有限的子覆盖. 由数学分析知道 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集为紧集.

命题 1.2.1 度量空间的紧子集必是可分的有界集.

证明 不妨设 S 是度量空间 X 的非空紧子集. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{B(s, n^{-1}) : s \in S\}$ 是 S 的一个开覆盖, 因此存在 S 的有限子集 F_n, 使得 $S \subset \bigcup_{s\in F_n} B(s, n^{-1})$. 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 在 S 内稠密. 而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 为可数子集, 所以 S 可分.

取 $s_1 \in F_1$, 记 $R = \max\{\rho(s, s_1), s \in F_1\}$. $\forall x \in S$, 选取 $s \in F_1$, 使得 $\rho(x, s) < 1$, 则有

$$\rho(x, s_1) \leqslant \rho(x, s) + \rho(s, s_1) < 1 + R.$$

故 S 为有界集. □

命题 1.2.2 度量空间中的紧集是闭的.

证明 设 S 为 X 中的一个紧子集. 不妨设 $X \backslash S = S^{\mathrm{C}}$ 非空, 只需证 S^{C} 为开集.

设 $x \in S^{\mathrm{C}}$, $\forall y \in S$, 则 $x \neq y$. 因此有 $B(x, r_{xy}) \cap B(y, r_{xy}) = \varnothing$, 这里 $0 < r_{xy} < \rho(x, y)/2$. 显然 $S \subset \bigcup_{y\in S} B(y, r_{xy})$. 由于 S 为紧集, 因此存在 $y_1, \cdots, y_m \in S$, 使得 $S \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, r_{xy_i})$. 令 $r = \min\{r_{xy_i}, i = 1, \cdots, m\}$, 则有 $B(x, r) \cap B(y, r_{xy_i}) = \varnothing$. 因此 $B(x, r) \cap S = \varnothing$, 即 $B(x, r) \subset S^{\mathrm{C}}$. 由 x 的任意性知 S^{C} 为开集, 所以 S 为闭集. □

命题 1.2.3 紧度量空间必是完备的.

证明 设 X 是紧度量空间, 它的完备化空间记为 $\hat{X}$, 则由命题 1.2.2 知 X 是 $\hat{X}$ 的一个闭子空间. 由于 $\hat{X}$ 是完备的, 因此由命题 1.1.4 知 X 也是完备的. □

命题 1.2.4 紧度量空间的闭子集必是紧的.

证明 设 S 是紧度量空间 X 的闭子集, $\mathscr{U}$ 是 S 的一个开覆盖, 由命题 1.1.2 知对任意 $U \in \mathscr{U}$ 存在 X 内的开子集 V_U 使得 $U = S \cap V_U$. 因此 S^{C} 和 $\{V_U, U \in \mathscr{U}\}$ 构成了 X 的一个开覆盖. 由于 X 是紧的, 则存在 $\mathscr{U}$ 内的有限个集合 $U_1, \cdots, U_m$ 使得

$$S^{\mathrm{C}} \cup \{V_{U_1}, \cdots, V_{U_m}\}$$

为 X 的一个开覆盖. 显然 $\{U_1, \cdots, U_m\}$ 为 S 的有限开覆盖, 故 S 为紧的. □

命题 1.2.5 设 f 是从紧度量空间 X 到度量空间 Y 内的连续映射, 则 $f(X)$ 也是紧集.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 $f(X)$ 的一个开覆盖, 则 $\{f^{-1}(U)\}_{U\in\mathscr{U}}$ 就是 X 的一个开覆盖. 由于 X 是紧的, 则存在 $\mathscr{U}$ 的有限个子集 $U_1, \cdots, U_m$, 使得 $\{f^{-1}(U_i) : i =$

$1,\cdots,m\}$ 为 X 的开覆盖, 所以 $\{U_i: i=1,\cdots,m\}$ 就是 $f(X)$ 的开覆盖, 即 $f(X)$ 为紧集. □

推论 1.2.1　设 f 是紧度量空间 X 上的连续函数, 则 f 为有界函数且取到最大值与最小值.

度量空间中描述有限逼近思想的还有: 若 X 中的任意序列必有收敛子列, 则称 X 为序列紧的.

命题 1.2.6　若 S 是度量空间 X 的序列紧集, 则 S 是可近的.

此命题的证明留作练习.

若对于 $\forall\varepsilon>0$, X 能被有限个半径小于 ε 的开球覆盖, 则称 X 为完全有界(准紧) 的.

由定义可知序列紧与紧是拓扑概念, 而完全有界仅是度量概念. 另一个概念是有限交性质. 若一个集合族里任意有限个集合的交非空, 则称此集合满足有限交性质.

在度量空间中有下面的等价定理.

定理 1.2.1　设 X 为度量空间, 则下列陈述等价:

(i) X 是紧的;

(ii) 任意 X 的满足有限交性质闭集族的全体交集非空;

(iii) X 的任意无穷集必存在聚点;

(iv) X 是序列紧的;

(v) X 是完全有界且完备的.

证明　(i)⇒ (ii) 设 $\{F_i$ 为闭集 $: i\in I\}$ 具有有限交性质, 若 $\bigcap_{i\in I}F_i=\varnothing$, 则 $\bigcup_{i\in I}(X\backslash F_i)=X$. 由于 X 为紧集, 则存在 $j=1,\cdots,m$ 使得 $\bigcup_{j=1}^m(X\backslash F_{i_j})=X$. 从而 $\bigcap_{j=1}^m F_{i_j}=\varnothing$. 这是矛盾的.

(ii)⇒ (iii) 若无穷集 F 不含聚点, 则 F 为闭集. 对任意 $x\in F$, 记 $F_x=F\backslash\{x\}$, 则 F_x 也是闭集, 且 $\{F_x: x\in F\}$ 具有有限交性质. 因此 $\bigcap_{x\in F}F_x\neq\varnothing$. 可是 $\bigcap_{x\in F}F_x=\varnothing$. 这是矛盾的.

(iii)⇒ (iv) 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的任意点列, 记 $Y=\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$. 若 Y 为有限集, 则显然存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列. 若 Y 为无穷集, 则由假设它必存在一个聚点 x. 不妨设 $x\notin Y$. 由聚点的定义存在 $x_{n_1}\in B(x,1)\cap Y\neq\varnothing$. 然后存在 $x_{n_2}\in B(x,\min\{1/2,\rho(x,x_1),\rho(x,x_2),\cdots,\rho(x,x_{n_1})\})\cap Y\neq\varnothing$. 若记

$$r_k=\min\{1/k,\rho(x,x_1),\rho(x,x_2),\cdots,\rho(x,x_{n_{k-1}})\},$$

依此递推, 则存在 $x_{n_k}\in B(x,r_k)\cap Y\neq\varnothing$. 显然 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x.

(iv)⇒(v) 设 X 是序列紧的. 若 $\{x_n\}$ 是 X 的基本列, 又由于 $\{x_n\}$ 必有收敛的子列, 所以 $\{x_n\}$ 在 X 内收敛. 故 X 是完备的.

若 X 不是完全有界的, 由归纳法可得存在 $\alpha > 0$ 和点列 $\{x_n\}$ 使得 $\rho(x_m, x_n) \geqslant \alpha, m \neq n$. 显然 $\{x_n\}$ 不能含有任何收敛的子列, 这与序列紧矛盾.

(v)⇒(i) 设 X 是完全有界且完备的, $\mathscr{U}$ 是 X 的一个开覆盖, 但不含有限子覆盖. 令 $B_0 = X$, 则存在 X 中的一列闭球 $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足:

(a) B_n 的半径为 2^{-n};

(b) $B_n \cap B_{n-1} \neq \varnothing$;

(c) $\mathscr{U}$ 中任何有限子族不覆盖 B_{n-1}.

假若已经构造了具有上述性质的 $B_0, \cdots, B_{n-1}$. 设 $(V_j)_{j=1}^m$ 是球心在 B_{n-1} 内半径为 2^{-n} 的球, 它们是 B_{n-1} 的有限覆盖. 由于 X 完全有界, 故这是存在的, 则在 V_j 中至少存在一个球, 记为 B_n 不能被 $\mathscr{U}$ 中有限个开集所覆盖.

记 x_n 为 B_n 的球心, 则有 $\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant 2^{-(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$. 因此 $\{x_n\}$ 为基本列. 由于 X 是完备的, 故存在 $a \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 选取 $U \in \mathscr{U}$, 使得 $a \in U$. U 为开集, 所以存在 $r > 0$, 使得 $B(a, r) \subset U$. 选取 $N > 1$, 使得 $\rho(a, x_N) < r/2$ 且 $2^{-N} < r/2$, 则对于任意 $x \in B_N$, 有

$$\rho(x, a) \leqslant \rho(x, x_N) + \rho(x_N, a) < 2^{-N} + \frac{r}{2} < r.$$

即 $B_N \subset B(a, r) \subset U$. 这与条件 (c) 矛盾. 因此 X 为紧的. □

由数学分析知道函数的一致连续性是一个重要的概念. 在度量空间上映射的一致连续性与 Lebesgue 覆盖性质密切相关.

若对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 $r > 0$ 使得 X 的任意半径为 r 的开球包含在某个 $U \in \mathscr{U}$ 中, 则称 X 具有 Lebesgue 覆盖性质, 其中 r 称为 $\mathscr{U}$ 的 Lebesgue 数.

命题 1.2.7 紧度量空间具有 Lebesgue 覆盖性质.

证明 设 X 为紧度量空间, $\mathscr{U}$ 是 X 中的开覆盖. $\forall x \in X$, 选取 $r_x > 0$ 使得 $B(x, 2r_x) \subset U$, $U \in \mathscr{U}$, 则 $\{B(x, r_x), x \in X\}$ 构成 X 的一个覆盖, 因此存在有限子覆盖, 即存在 $x_i \in X$, $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $X \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r_{x_i})$. 令 $r = \min\{r_{x_1}, \cdots, r_{x_m}\}$, 则 $r > 0$. 任取 $x \in X$, 选取 i 使得 $x \in B(x_i, r_{x_i})$, 则 $\forall y \in B(x, r)$,

$$\rho(y, x_i) \leqslant \rho(x, y) + \rho(x, x_i) < r + r_{x_i} \leqslant 2r_{x_i},$$

即 $B(x, r) \subset B(x_i, 2r_{x_i}) \subset U$. □

定理 1.2.2 设 (X, ρ) 为度量空间, 则下列三个命题等价:

(i) X 具有 Lebesgue 覆盖性质;

(ii) X 上到另外一个度量空间内的连续映射必一致连续;

(iii) 从 X 到 $\mathbb{R}$ 内的任意连续映射必一致连续.