



世纪高等教育土木工程系列规划教材

土动力学基础

高彦斌 费涵昌 编

Seismic Design of Engineering Structure

非外借



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪高等教育土木工程系列规划教材

土动力学基础

高彦斌 费涵昌 编

贵州师范学院内部使用



机械工业出版社

《土动力学基础》是一本介绍土动力学基础知识的教材。本书系统介绍了土动力学的基本原理、测试技术及相关工程问题的分析方法。主要内容包括：动力学中的两个基本理论——质量—弹簧体系的振动理论及波动理论；土的动力性质及测试方法，包括现场波速测试及应用、动荷载作用下土的剪切变形和强度特性、土动力试验方法；土动力学的几个经典问题的分析方法，包括动力机器基础的振动、地震地面运动及地震作用，砂土的液化。为便于学习，每章均设置了例题、思考题和习题。

本书可作为高等学校土木工程专业和地质工程专业本科生或研究生的教学用书，也可供其他相关专业师生及工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

土动力学基础/高彦斌, 费涵昌编. —北京: 机械工业出版社, 2019. 2

21 世纪高等教育土木工程系列规划教材

ISBN 978-7-111-61847-8

I. ①土… II. ①高… ②费… III. ①土动力学-高等学校-教材
IV. ①TU435

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 012217 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 马军平 责任编辑: 马军平

责任校对: 刘志文 封面设计: 张 静

责任印制: 郜 敏

河北鑫兆源印刷有限公司印刷

2019 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·17 印张·417 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-61847-8

定价: 49.00 元

电话服务

客服电话: 010-88361066

010-88379833

010-68326294

封底无防伪标均为盗版

网络服务

机 工 官 网: www.cmpbook.com

机 工 官 博: weibo.com/cmp1952

金 书 网: www.golden-book.com

机工教育服务网: www.cmpedu.com

前言

天地万物无不处于运动之中。土动力学是土力学的一个分支,着重研究动荷载作用下土的动力特性以及相关工程问题。与静荷载作用下不同的是,无论是土的动力特性还是相关工程问题,均与动荷载的类型及特征密切相关。另外,在弹性力学的基础上,土动力学采用了工程动力学中的一些分析方法和测试技术,如振动理论、弹性波理论和谱分析方法,动三轴试验和模型基础振动试验等。这些都导致土动力学涉及的研究内容、方法及成果的复杂性远远高于只考虑静荷载作用的土力学。作为一本介绍土动力学基础知识的教材,本书参考了关于地震工程、砂土液化和基础振动等方面的经典著作与规范标准,着重介绍土动力学的基本理论、方法和技术。

全书共 8 章,每一章均强调基本概念、理论与技术、应用的统一。第 1 章绪论介绍了土动力学的基本概念、研究方法和研究内容;第 2 章和第 3 章分别介绍了质量—弹簧体系的振动理论及弹性波理论,这是其后各章的理论基础;第 4 章介绍了土体振动和波动分析中需要的一个重要参数——弹性波波速的测试方法及应用,包括钻孔波速法、面波法和折射波法,考虑到桩基低应变测试应用的广泛性,该方法也在本章予以介绍;第 5 章介绍了土的动力性质,包括循环荷载作用下的动力特性、土动力室内试验方法(共振柱、动三轴、动单剪等)、常用动力本构模型及动强度;第 6 章涉及动力机器基础分析,介绍了弹性半空间理论方法、集总参数系统法,以及模型基础振动试验与数据分析,是振动理论的应用;第 7 章涉及地震工程,是波动理论和谱分析方法的应用,介绍了地震地面运动的特征和分析方法,地震作用分析及土工结构抗震分析方法;第 8 章涉及地震砂土液化问题,是一类与土的动强度有关的工程问题,介绍了地震砂土液化的试验方法、评价方法及处理措施。为了加强教学效果,各章均附有例题、思考题与习题。本书带*号的章节,授课教师可根据实际情况选讲。

感谢同济大学地下建筑工程系吴晓峰老师、王天龙老师,物理系王浩老师对教材编写给予的宝贵建议和意见,感谢参与书稿编辑的同济大学地质工程专业的同学,这里不一一列出,最后感谢机械工业出版社对本书的出版所做的高质量编辑工作。

限于作者水平,书中不妥之处欢迎广大读者批评指正;对本书的改进意见,也欢迎交流(邮箱:yanbin_gao@tongji.edu.cn)。

编者

目 录

前 言

第 1 章 绪论	1
1.1 动力学中的动力效应	1
1.2 动荷载特征及分类	2
1.3 动荷载作用下土的力学特性及相关问题	4
1.4 土动力学的研究内容	5
思考题与习题	6
第 2 章 振动理论	7
2.1 简谐振动	8
2.2 质量—弹簧系统的自由振动	10
2.3 质量—弹簧—阻尼系统的自由振动	12
2.4 质量—弹簧—阻尼系统的稳态强迫振动	16
2.5 基座运动引起的质量—弹簧—阻尼系统的振动	22
2.6* 双自由度质量—弹簧系统的自由振动	25
2.7* 双自由度质量—弹簧系统的强迫振动	29
2.8* 多自由度系统的振动	32
2.9 复杂荷载的处理	35
思考题与习题	37
第 3 章 波在弹性介质中的传播	39
3.1 波在弹性杆件中的传播	39
3.2 弹性无限介质中的体波	48
3.3 饱和土中的体波	54
3.4 弹性半无限空间中的面波	55
3.5 表面点振源产生的波场与地表振动	58
3.6 振动的屏蔽	61
思考题与习题	65
第 4 章 现场波速测试及应用	66
4.1 钻孔波速法	66
4.2 面波法	73
4.3 折射法	76
4.4 桩基质量检测低应变反射法	81

思考题与习题	85
第 5 章 土的动力性质	86
5.1 循环荷载作用下土的基本特征	86
5.2 土动力室内试验	91
5.3* 线性黏—弹性模型	99
5.4* 等效线性黏—弹性模型	101
5.5 双线性模型	107
5.6 土的初始剪切模量 G_0	108
5.7* 剪切模量 G 和阻尼比 D 的非线性	115
5.8 动荷载作用下土的破坏	119
5.9* 冲击荷载作用下土的动强度	124
5.10* 循环荷载作用下土的动强度	127
思考题与习题	131
第 6 章 动力机器基础的振动	133
6.1 动力机器基础的振动类型与设计要求	133
6.2 基础振动分析——弹性半空间理论法	136
6.3 基础振动分析——集总参数系统法	145
6.4 弹性半空间理论解的实用化	152
6.5 地基刚度系数	161
6.6 桩基的集总参数	169
6.7* 基础的滑移—摇摆耦合振动	172
6.8* 冲击式机器基础的振动	176
6.9* 块体模型基础激振试验	178
思考题与习题	190
第 7 章 地震地面运动及地震作用	191
7.1 地震波、震级及地震烈度	191
7.2 覆盖（土）层对地面运动的影响	200
7.3* 水平自由场地地震动反应分析	206
7.4 地震反应谱与地震作用力	213
7.5 地震作用下地基的稳定性	221
7.6 地震作用下挡墙的动土压力	225
7.7 地震作用下边坡的稳定性	228
思考题与习题	230
第 8 章 砂土的液化	231
8.1 砂土液化现象及影响因素	231
8.2 砂土液化室内试验方法	233
8.3* 液化剪应力和孔压增长	243
8.4 砂土液化判别方法	247
8.5* 液化场地的处理与加固	256
思考题与习题	260
参考文献	261

土动力学是土力学的一个分支,主要研究在动荷载作用下土的特性(如变形特性、强度特性等)和反应(如液化现象、应力波传播现象)以及受此影响的地基基础、土工结构的相关工程问题(如动位移问题、动土压力问题、地基动承载力问题、边坡动力稳定问题等)。土动力学以工程动力学为理论基础,最为基本的理论为振动理论和应力波理论。当然,无论是动力学还是静力学,都是基于连续介质力学理论,也遵循连续介质力学的基本假设(连续性、均匀性、各向同性),且弹性理论得到广泛应用。本章主要介绍关于动力学的一些基本概念,动荷载和土的动力特性基本特征,以及土动力学这门学科的主要研究内容。

1.1 动力学中的动力效应

工程中遇到的荷载总是随着时间有或多或少的变化,如在基础沉降分析中,基底压力就是随着建筑物的建造而随着时间逐渐增大的。显然,荷载随着时间的变化不能作为静力学和动力学区别的充分条件。从力学的角度讲,动荷载与静荷载以及动力学与静力学的区别主要体现在动力效应方面。当荷载随着时间的变化速度较快或作用次数较多而产生明显的动力效应时,这种荷载就在力学模型中作为动荷载考虑,需要采用动力学理论来解决相关问题。这种动力效应又被称为力效应。

力效应指的是动力学方程中需要比静力学方程多考虑的两种作用力,即惯性力和阻尼力,可表示为

$$F_a = ma \quad (1-1)$$

$$F_c = cv \quad (1-2)$$

式中, F_a 和 F_c 分别为惯性力和阻尼力 (N); m 为质点的质量 (kg); a 和 v 分别为质点运动的加速度 (m/s^2) 和速度 (m/s); c 为阻尼系数 [$\text{N}/(\text{m/s})$]。

式 (1-1) 所示的惯性力表达式即牛顿第二定律;式 (1-2) 所示的阻尼力表达式被称为牛顿黏滞定律,最早用于流体运动分析中。可以看出,这两种作用力的大小均与质点的运动特性有关:惯性力与加速度有关,阻尼力与速度有关。惯性力和阻尼力还与质点或材料的自身特性有关,前者与质量或密度有关,后者与阻尼系数有关。阻尼系数是动力学中的一个新的参数,决定了阻尼力的大小。动力学中通常用另外一个参数替代阻尼系数,来反映阻尼作用对整个系统动力响应的影响,即阻尼比 D 。

因此,在荷载作用速率或变化速率较快导致的质点运动的速度和加速度较大的情况下,

就会产生显著的力效应，需要当作动力问题来看待。在荷载作用速率或荷载变化速率较慢的情况下，这样的动力效应较小可以被忽略，可当作静力问题看待。由于惯性力和阻尼力既与运动特征有关，又与系统或材料自身特性有关，因此动荷载作用下系统或材料的响应，既与动荷载的特征有关，又与系统或材料的特性有关。

显著的动力效应会产生一些特殊的物理现象，最常见的是振动问题和波动问题。振动是质点在平衡位置的往复运动，最简单的是单质点的振动。连续介质具有无穷多个质点，多个质点的振动产生波动现象。振动和波动是动力学中最基本的两个问题，也构成了动力学中最基本的理论。图 1-1 给出了一根梁中某一质点 A 的振动以及整根梁的波动。

土动力学中，对于某一工程问题，会简化为振动问题或波动问题来考虑。如动力机器基础的振动问题，简化为与图 1-1a 类似的单质点振动问题；地震造成的地面运动，则简化为图 1-1b 所示的波的传播问题。振动理论和波动理论是土动力学应用最广的两个理论。振动问题关注的是共振、隔振和减振问题；波动问题关注的是波的类型、传播及衰减问题。

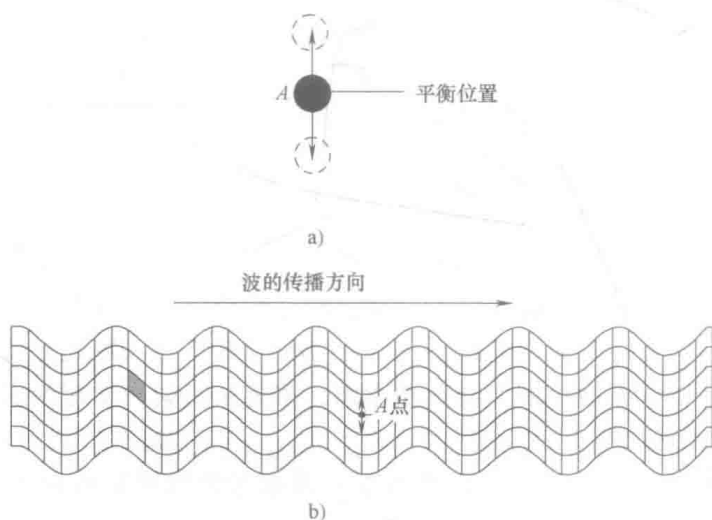


图 1-1 一根梁的振动与波动
a) 单质点的振动 b) 多质点的波动

1.2 动荷载特征及分类

动荷载是随着时间快速变化能够产生明显动力效应的荷载。动力效应的产生与荷载的作用速率和变化速率有关，因此动力学研究中首先要解决的问题是如何概括和描述工程中碰到的种类繁多的动荷载的主要特性。动荷载的特性包括以下三方面：

1) 大小。用来表征荷载的强度。动荷载的大小随着时间而变，因此一般用荷载的幅值来代表大小，对于幅值变化的动荷载，工程上尤其关注最大幅值。

2) 频率。用来表征荷载变化的速率，频率越高，变化速率越快；反之亦然。

3) 次数。用来表征动荷载作用的次数或时间。

土木工程中动荷载有自然界产生的,也有人类的工程活动或其他活动产生的。自然界产生的动荷载包括坠物、风、波浪、地震和地脉动等;人类工程活动产生的动荷载包括爆破、打桩、车辆行驶和动力机器工作等。这些动荷载按照荷载大小随时间的变化规律可以分为以下三大类:

1) 冲击荷载(图 1-2a)。只有一个荷载脉冲,荷载时程曲线由上升段和减小段组成。如爆破荷载,爆破、坠物造成的荷载属于这一类。

2) 随机荷载(图 1-2b)。荷载大小随着时间的变化复杂缺乏规律性,荷载作用的次数可能是有限的,也有可能是长期的。地震荷载、风荷载、波浪荷载均属于这一类。

3) 周期荷载(图 1-2c)。荷载大小随着时间周期性变化而具有一定的规律。车辆行驶荷载、动力机器工作荷载均属于这一类。

可以看出,随机荷载是最复杂的,荷载大小随着时间的变化复杂缺乏规律性。对于这一类荷载,需要借助数学工具来分析它的规律性。最常用的方法是傅里叶变换,通过傅里叶变换,可以将缺乏规律性的随机荷载分解为若干周期荷载的叠加,为表征和分析随机荷载的特征(大小、频率和次数)提供了手段。

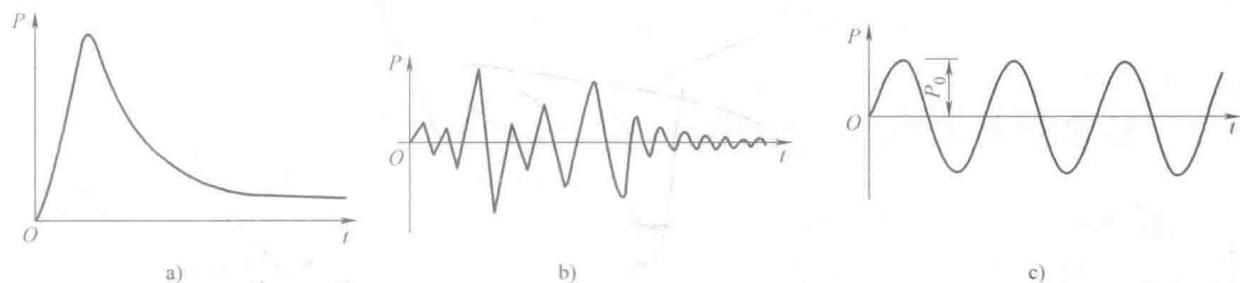


图 1-2 动荷载类型

a) 冲击荷载 b) 随机荷载 c) 周期荷载

另外,按照动荷载的作用次数可分为以下三种类型(张克绪,1989):

1) 瞬时荷载。只作用一次,作用时间仅几毫秒或几十毫秒,荷载变化速率大,尤其是上升段。爆炸、坠物冲击均属于这类荷载。

2) 短期荷载。荷载作用次数通常小于 1000 次。地震、振动沉桩属于这类荷载。地震荷载频率一般为 1~5Hz,历时通常只有几秒或几十秒,荷载作用次数大约为 20~30 次。振动沉桩的荷载频率一般为 10~60Hz,作用次数为 100~1000 次。

3) 长期荷载。作用次数超过 1000 次,其荷载的幅值基本保持不变。交通荷载、波浪荷载、动力机器产生的荷载均属于这一类。

图 1-3 给出了以上三类动荷载作用下土体达到应变幅值所需的时间(简称作用时间)以及会导致的工程问题。荷载作用时间在 10s 以上的可以当作静力问题,低于这个尺度的则应该视为动力问题。瞬时荷载主要是冲击破坏问题;短期荷载主要是振动和波动问题;长期荷载主要是波动和疲劳破坏问题。而长期荷载下的疲劳破坏问题,还与动荷载作用下土的特性有关。

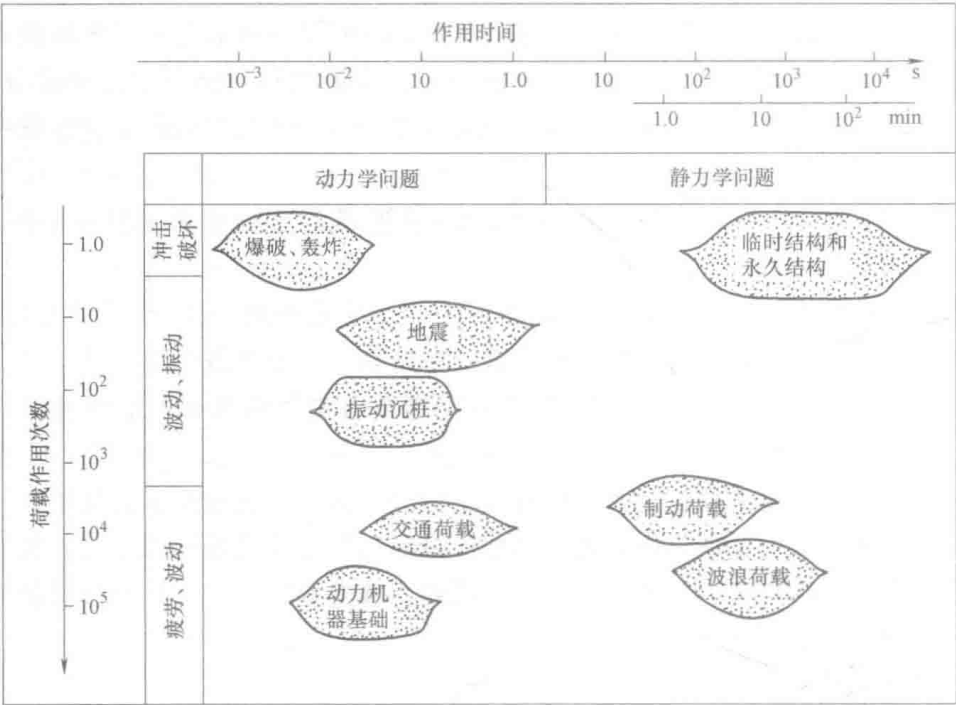


图 1-3 动荷载的特征及相关工程问题（据 Ishihara, 1996）

1.3 动荷载作用下土的力学特性及相关问题

同静力学中一样，土动力学中土的力学特性关注的也是应力—应变特性和强度特性。但在动荷载作用下，土或其他材料会表现出与静荷载作用下不同的力学性质，这些特殊的性质在静力学中一般是不考虑的，产生的程度既与动荷载的特性有关，又与材料的性质有关。动荷载作用下的材料效应主要包括应变速率效应和循环效应。应变速率效应指的是材料的力学特性与应变速率有关，其机理是材料的黏滞性，黏性土由于较强的黏滞性而表现出显著的应变速率效应。循环效应指的是材料的力学特性与荷载的作用次数有关，其机理随着荷载作用次数的增加产生累积塑性变形。循环效应会导致材料在长期循环荷载下的疲劳破坏。因此，动力学分析中需要采用与荷载及材料特征匹配的动力本构模型来模拟可能出现的这些特殊效应。

动荷载下的动力问题的性质取决于荷载的特征及土的应变范围。图 1-4 给出了土的应变范围与所导致的工程问题之间的关系。在应变小于 10^{-4} 的小应变范围内，土处于弹性状态，主要问题是振动及应力波传递；在 $10^{-4} \sim 10^{-2}$ 的中等应变范围内，土处于弹—塑性状态，会表现出明显的应变速率效应和循环效应，容易产生不均匀沉降、开裂的问题；在大于 10^{-2} 的大应变范围内，土处于接近破坏或破坏状态，应变速率效应和循环效应同样突出，会产生失稳、震陷、液化等问题。因此，研究动荷载的特征及土所处的应变范围是分析和解决相关工程问题的基础。

不同的应变范围，采用的本构模型和力学参数也不一样。对于小应变和中等应变范围内波动和变形问题的分析，一般情况下采用弹性和黏弹性本构模型，除了剪切模量和泊松比，

应变大小		10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹
现象		波动、振动			开裂、不均匀沉降		失稳、震陷、液化
力学特性		弹性			弹塑性		破坏
荷载循环效应							
荷载应变速率效应							
参数		弹性模量、泊松比、阻尼					内摩擦角、黏聚力
原位测试	地震波法						
	原位振动试验						
	原位加载试验						
室内试验	波动法, 精确试验						
	共振柱, 精确试验						
	循环加载试验						

图 1-4 土的力学特性与应变之间关系及相关工程效应（据 Ishihara，1996）

还增加了阻尼比这第三个参数。如果参数选取恰当，这类模型依然能够模拟前面提到的土进入塑性状态所表现出来的力学特征。而对于大应变的情况下的强度和稳定性分析，仍然采用摩尔—库仑强度准则，其参数是土的动黏聚力和动内摩擦角。

土在不同应变范围所表现出的力学特性还会影响测试方法的选择。在对动荷载的特征及土的应变范围有了充分的了解后，选择合适的测试方法（原位测试或室内试验），测出或算出与荷载特征和土的应变范围所对应的参数，就可用于实际工程问题的分析。

1.4 土动力学的研究内容

作为一门应用学科，土动力学的发展与社会发展和需求密切相关。始于 20 世纪 30 年代的机器基础动力设计是土动力学最早的研究内容，在 60 年代基本成熟。军事工程中的防护工程也是土动力学的重要研究领域，始于 20 世纪 40 年代。地震工程中的大规模、系统的土动力学的研究始于 60 年代，并取得了重大的进展（张克绪，1989）。近些年，随着海洋工程、能源工程、交通运输工程的进一步发展，不同领域也持续推进着这门学科的发展。在过去不到一个世纪的发展过程中，土动力学的主要研究内容包括：

- 1) 土中应力波的传播，对周围环境的影响及隔振、减振。
- 2) 土的动应力—应变关系及本构模型。
- 3) 土的动力测试方法及应用。一方面是土的动力特性的测试方法，包括室内试验与原位测试，另外一方面是作为物探方法在地基勘测中的应用。
- 4) 地震造成的地面运动及土工结构抗震，包括大坝抗震、边坡稳定性、挡土墙动土压力。

- 5) 基础的动承载力。
- 6) 砂土液化。
- 7) 动力机器基础设计。
- 8) 土的动力密实和动力加固。

思考题与习题

1. 动力学和静力学的区别是什么？何为动力效应？
2. 动荷载作用下，一般需要考虑土的哪些特殊的力学特性？
3. 动荷载特征的描述主要包括哪几方面？动荷载主要分为哪几类？
4. 在动力学的研究中，为什么要重视动荷载特性的分析？
5. 随着应变的增加，土所表现出的特性及工程问题有何不同？
6. 土动力学的主要研究内容有哪些？

振动理论

第2章

从物理学角度定义时，一个物体在某一平衡位置附近来回重复运动称为振动，一般采用位移（或角度）与时间的关系曲线来表示。物体振动特征描述的参数主要包括振幅、频率（周期）和相位。

1) 振幅 A 。物体或质点在平衡位置附近振动的最大幅度，通常指最大位移值。由于位移与速度、加速度之间存在关系，有时也可以用速度或加速度值来表示振幅。振幅越大，振动也就越剧烈。

2) 周期 T 。物体或质点来回振动一次经历的时间称为周期。周期越长表示来回振动一次所需时间越长。一般用秒（s）来量度。

3) 频率 f 。物体或质点在单位时间内振动的次数，单位为赫兹（Hz）。频率和周期互为倒数，即 $f=1/T$ 。

4) 相位 φ 。用振动物体在某一瞬时所处的位置与平衡位置之间的关系来描述。度量单位为弧度（rad）。

振动是多种多样的，如图 2-1 所示。有的时间较长（长期），有的时间较短（脉冲或瞬时）；有的具有规律性（周期振动），有的具有随机性（随机振动）。按照振动产生的方式不同可分为自由振动和强迫振动。自由振动是没有外界扰力作用下系统的振动，简称为“自振”，振动特征与系统自身特性有关，也称为固有特性；强迫振动系统在外力作用下的振动，其振动特性既与系统的固有特性有关，也与扰力特征有关。如爆破后引起的地面的振动可看作是自由振动，而动力机器工作造成的地基振动可看作是强迫振动。

通常将振动体系抽象为质量—弹簧—阻尼体系来研究，问题的复杂性取决于自由度也就是质量块的数目。最简单的单自由度体系是简谐振动（Simple Harmonic Motion），可以分析一些简单的工程振动问题，如机器基础动力分析与设计采用的就是单自由度体系振动理论。在此基础上，采用一些数学工具，可以分析多自由度体系的振动，解决多质点甚至连续介质的复杂振动问题，如地震造成的地面或结构物的运动。

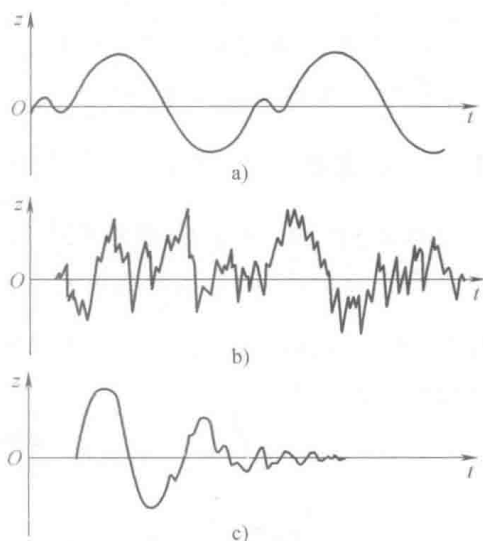


图 2-1 周期振动、随机振动和瞬时振动
a) 周期的 b) 随机的 c) 瞬时的

2.1 简谐振动

2.1.1 简谐振动的定义

简谐振动是振动中一种最简单的形式，它是用正弦或余弦函数来表示的一种周期性振动，即

$$z = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2-1)$$

式中， A 、 ω 和 φ_0 三个参数分别代表简谐振动的振幅（单振幅）、圆频率和初相位。

式（2-1）表示的振动曲线如图 2-2 所示。简谐振动的周期 T 为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2-2)$$

简谐振动的频率 f 为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2-3)$$

根据三角函数与复数之间的关系，即 $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ，简谐振动还可以表达为复数的形式

$$z = \operatorname{Re}[Ae^{-i(\omega t + \varphi_0)}] = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2-4a)$$

式中， Re 代表对复数取实部。有些情况采用这种指数形式表达更为方便一些。

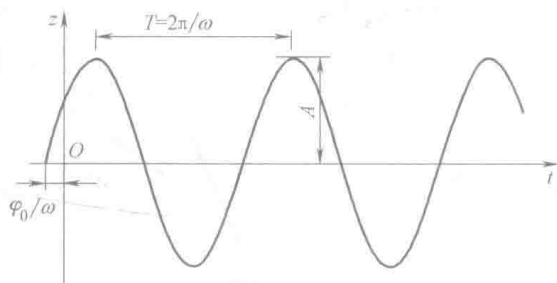


图 2-2 简谐振动位移-时间关系曲线

2.1.2 简谐振动与均匀圆周运动之间的关系

如图 2-3 所示， P 点绕 O 点在半径 R 的圆周上以角速度 ω （表示 P 点每秒钟转过的弧度，单位为 rad/s ）做匀速圆周运动。 φ_0 为 P 点的初始位置，即 $t=0$ 时的角度。转动角度 φ （单位为 rad ，逆时针旋转为正）随时间 t 而增加，即 $\varphi = \omega t + \varphi_0$ 。旋转过程中矢量 $\overrightarrow{OP}$ 在 z 轴上的投影可表示为

$$z = R \sin \varphi = R \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2-4b)$$

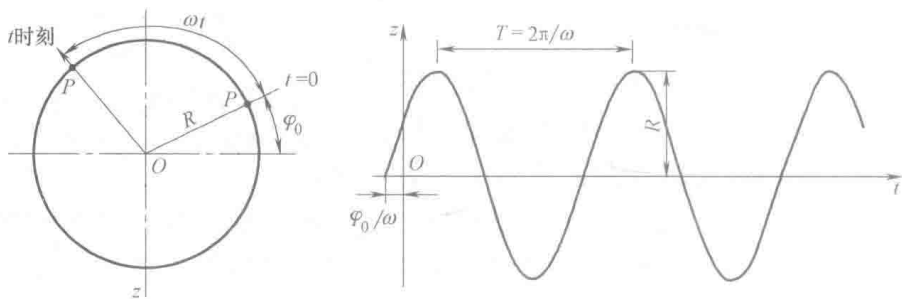


图 2-3 旋转矢量法

由此可知,一个做匀速旋转矢量的投影与时间的关系即为简谐运动,这种描述简谐运动的方法称为“旋转矢量法”。

根据旋转矢量法,简谐振动的运动方程[式(2-4b)]中的参数 ω 和 φ_0 可理解如下:

- 1) φ_0 为简谐振动的初相位,代表圆周运动的初始角度, $-\pi \leq \varphi_0 \leq \pi$ 。
- 2) ω 为简谐振动的圆频率,代表圆周运动的角速度。
- 3) $\omega t + \varphi_0$ 为简谐振动的相位,表示在任何时刻 t 圆周运动的位置。

对于同一时刻相位分别为 φ_1 和 φ_2 的两个简谐振动,如果 $\varphi_1 < \varphi_2$,表示第二个振动比第一个振动超前 $\varphi_2 - \varphi_1$;反之亦然。

2.1.3 简谐振动位移、速度和加速度之间的关系

将式(2-1)对时间 t 微分可以得到简谐振动的速度 $\dot{z}$ 和加速度 $\ddot{z}$ 的关系如下

$$\text{速度} \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2-5)$$

$$\text{加速度} \quad \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi) \quad (2-6)$$

可以看出,速度方程和加速度方程与位移方程[式(2-1)]是相似的,差别仅在幅值和初相位上。图2-4反映了位移、速度和加速度三个矢量之间的关系以及随时间 t 的运动轨迹。三者之间的关系为

- 1) 三个物理量随时间的变化具有相同的周期或频率。
- 2) 三个物理量具有不同的相位,分别为 φ_0 、 $\varphi_0 + \pi/2$ 和 $\varphi_0 + \pi$,相位差为 $\pi/2$ 。
- 3) 速度和加速度的幅值不仅与振幅 A 有关,还和频率有关。在振幅 A 不变的情况下,频率越高,速度和加速度幅值也越大。同样,在频率不变的情况下,振幅 A 越大,速度和加速度幅值也越大。

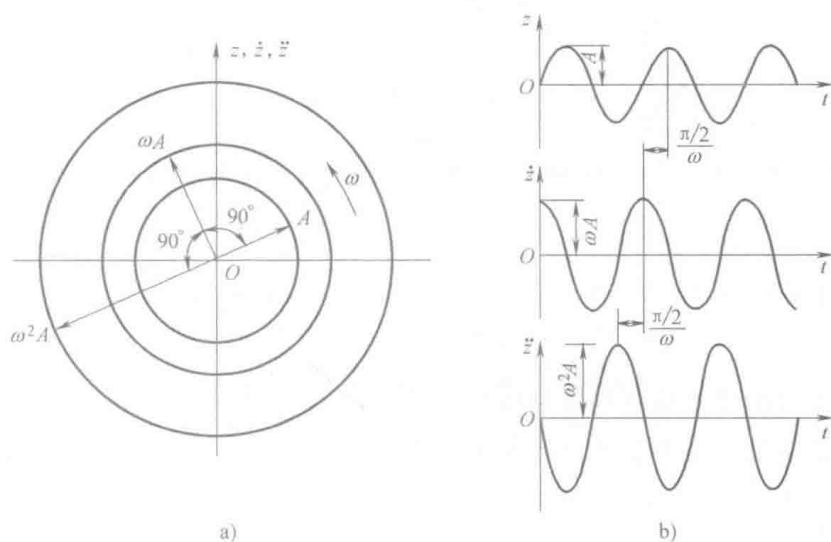


图 2-4 简谐振动的位移、速度和加速度

a) 运动矢量 b) 振动曲线

2.1.4 简谐振动的合成

由若干个简谐振动合成的振动，可表示为

$$z = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_{0i}) \quad (2-7)$$

式中， n 为简谐振动的数量， A_i 、 ω_i 和 φ_{0i} 分别为第 i 个简谐振动的振幅、圆频率和初相位。

注意，式 (2-7) 表示的振动往往不是简谐振动，只有当 ω_i 和 φ_{0i} 均相同时，才能合成简谐振动。

由有限个不同频率的简谐振动合成的振动，如果任意两个频率之比为有理数（两个正整数的比值），则合成的振动是周期振动，但不一定是简谐振动；如果任意两个频率之比并非均是有理数，则合成的振动不是周期振动，称为准周期振动。图 2-1b 中给出的较为复杂的随机振动甚至可以采用若干个简谐振动来合成。

2.2 质量—弹簧系统的自由振动

2.2.1 振动微分方程

由质量和弹簧组成的振动系统是一种抽象的力学模型。用它来分析各种振动现象往往非常简便和有效。图 2-5 就是这种系统的示意图。

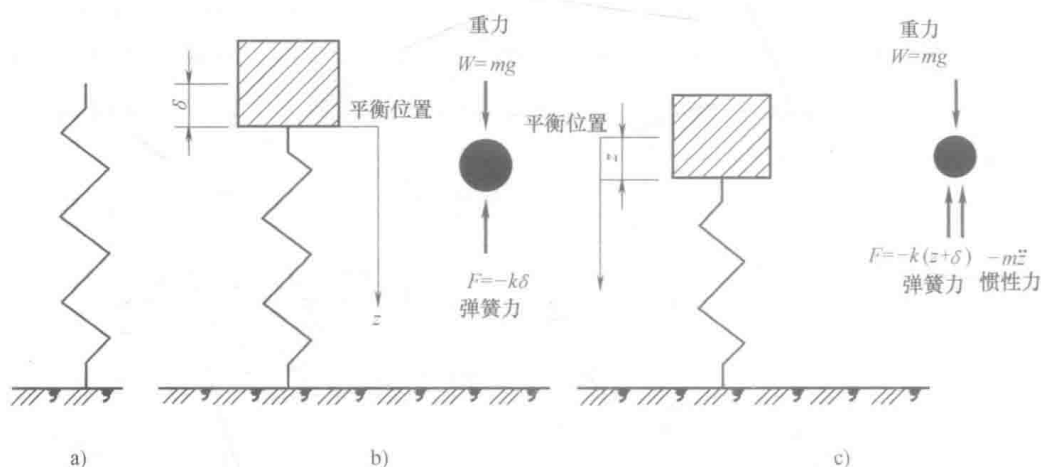


图 2-5 质量—弹簧系统受力（注：箭头代表力的作用方向，以下同）

a) 初始状态 b) 质量块静力平衡 c) 质量块振动

质量—弹簧系统的基本假定是质量块集中了系统的全部质量 m (kg)，但不能变形，不可压缩。弹簧没有质量，受力后可以产生弹性变形。当质量块作用在弹簧上时，弹簧力与重力 W （即 mg ， g 为重力加速度[⊖]）相平衡，质量块所处位置称为“静平衡位置”。此时弹簧产生的压缩量 δ 为

$$\delta = W/k \quad (2-8)$$

[⊖] $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，为简单起见，书中涉及非法定计量单位计算时，取 g 为 10 m/s^2 。

式中, k 称为该弹簧的弹性系数或弹簧刚度 (N/m), 是弹簧压缩单位长度所需的力。

假设质量块产生自由振动, 在任一时刻 t 下, 质量块偏离平衡位置的距离为 z , 则质量块的平衡方程可表示为

$$-k(\delta+z)+W=m \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d} t^2} \quad (2-9)$$

根据式 (2-8), 上式可进一步简化为

$$m \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d} t^2}+kz=0 \quad (2-10)$$

式 (2-10) 可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d} t^2}+\lambda_n^2 z=0 \quad (2-11)$$

式中, $\lambda_n^2=k/m$ 。式 (2-11) 即为质量—弹簧系统的自由振动微分方程。

2.2.2 振动方程的解

式 (2-11) 的通解为

$$z=A \sin \lambda_n t+B \cos \lambda_n t \quad (2-12)$$

式中, A 、 B 为两个常数, 可以根据初始条件确定。

假定初始条件为

$$\begin{cases} t=0 \\ v=v_0 \\ z=0 \end{cases} \quad (2-13)$$

由式 (2-13) 得

$$\begin{cases} z=A \sin(\lambda_n \cdot 0)+B \cos(\lambda_n \cdot 0)=0 \\ v_0=A \lambda_n \cos(\lambda_n \cdot 0)-B \lambda_n \sin(\lambda_n \cdot 0) \end{cases} \quad (2-14)$$

所以

$$\begin{cases} A=v_0/\lambda_n \\ B=0 \end{cases} \quad (2-15)$$

将得到的 A 、 B 代入式 (2-12) 可得质量—弹簧系统的自由振动方程

$$z=A \sin \lambda_n t \quad (2-16)$$

2.2.3 振动特征

可见质量—弹簧系统的自由振动是一种简谐振动, 其振动特征为:

$$\begin{cases} \text{圆频率 } \lambda_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \text{频率 } f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \text{周期 } T_n=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{cases} \quad (2-17)$$