高等学校教材

数学分析讲义

第六版（下册）

刘玉琏 傅沛仁 刘伟 林玎 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

第六版（下册）

刘玉琏 傅沛仁 刘伟 林玎 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书分上、下两册，是在第五版的基础上修订而成的。在内容和体例上未作较大变动。知识内容稍有扩充，涉及的方面很广。增加了反常重积分的内容及少量的说明性文字，使内容更加完善，并适当补充了数字资源（以图标▦示意）。下册内容包括：级数、多元函数微分学、隐函数、反常积分与含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分等。

本书阐述细致，范例较多，便于自学，可作为高等师范学校本科教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析讲义. 下册 / 刘玉琏等编. -- 6版. -- 北京:高等教育出版社,2019.4
ISBN 978-7-04-051263-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第011967号

项目策划 李艳馥 李 蕊 兰莹莹
策划编辑 李 蕊 责任编辑 张晓丽 封面设计 王凌波 版式设计 马 云
插图绘制 于 博 责任校对 高 歌 责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	山东鸿君杰文化发展有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	20.75	版 次	1966年3月第1版
字 数	470千字		2019年4月第6版
购书热线	010-58581118	印 次	2019年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	40.30元

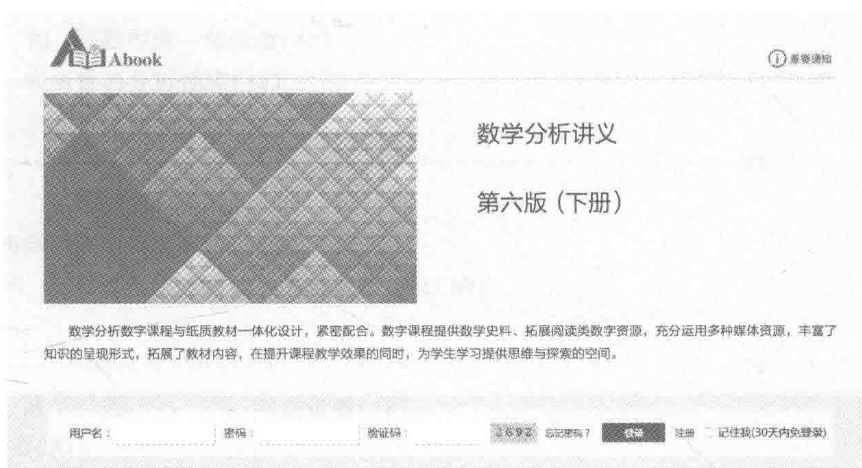
物 料 号 51263-00

数学分析讲义

第六版（下册）

刘玉琏 傅沛仁 刘伟 林玎 编

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1255302，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

数学分析简史（上）

数学分析简史（下）

http://abook.hep.com.cn/1255302

目录

第九章
级　　数

级数分为数项级数与函数项级数.函数项级数是表示函数,特别是表示非初等函数的一个重要的数学工具.例如,有的微分方程的解不是初等函数,但其解却可表示为函数项级数.函数项级数又是研究函数(初等函数与非初等函数)性质的一个重要手段.因此,函数项级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用.数项级数是函数项级数的特殊情况,它又是函数项级数的基础.本章首先讨论数项级数的基本理论.

§9.1　数项级数

一、收敛与发散概念

设有数列 $\{u_n\}$,即

$$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来,即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2}$$

称为**数项级数**,简称**级数**,其中 u_n 称为级数(2)的**第 n 项**或**通项**.

级数(2)是无限多个数的和.我们只会计算有限个数的和,不仅不会计算无限多个数的和,甚至都不知道何谓无限多个数的和.因此,级数(2)只是一种形式,也是一个符号,它尚没有具体的意义.无限多个数的和是一个未知的新概念.这个新概念不是孤立的,它与我们已知的有限个数的和联系着.不难想到,由有限个数的和转化到“无限多个数的和”应借助极限这个工具来实现.

设级数(2)前 n 项的和是 S_n,即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \quad 或 \quad S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k,$$

称为级数(2)的 n 项**部分和**.显然,对给定级数(2),其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的.于是,级数(2)对应着一个已知的部分和数列 $\{S_n\}$.

定义　若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,设

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k=S,$$

则称级数(2)**收敛**,S 是级数(2)的**和**,记为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

若部分和数列$\{S_n\}$**发散**，则称级数(2)**发散**.

定义　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和是$S$，而$S-S_n$记为$r_n$，即

$$r_n=S-S_n=\sum_{k=1}^{\infty}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots,$$

称为收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的$n$**项余和**，简称**余和**. 显然，级数收敛，总有

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=0.$$

由此可见，级数的敛散性(收敛与发散)是借助于它的部分和数列的敛散性定义的. 反之，数列的敛散性也可归结为级数的敛散性. 事实上，设有数列$\{S_n\}$. 令

$$a_1=S_1,a_2=S_2-S_1,\cdots,a_n=S_n-S_{n-1},\cdots.$$

显然，

$$S_n=S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

即数列$\{S_n\}$的敛散性可归结为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性.

因此，研究收敛级数及其和只不过是研究收敛数列及其极限的一种新形式. 因为级数是有限和的推广，有鲜明的直观性，所以，这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复，它使我们处理不同形式的极限具有更大的灵活性，并提供了新的数学工具.

例 1　讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

的敛散性，其中$a\neq0$，r是公比.

解　1) 当$|r|\neq1$时，已知几何级数的n项部分和

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}.\text{①}$$

当$|r|<1$时，存在极限，且

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}.$$

因此，当$|r|<1$时，几何级数收敛，其和是$\frac{a}{1-r}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

当$|r|>1$时，不存在极限，且

① 见§2.1例3，当$|r|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r} = \infty .$$

因此,当 $|r|>1$ 时,几何级数发散.

2) 当 $|r|=1$ 时,有两种情况:

当 $r=1$ 时,几何级数是($a\neq 0$)

$$a+a+a+\cdots+a+\cdots.$$

$$S_n = \underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}} = na,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty ,$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

当 $r=-1$ 时,几何级数是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots.$$

$$S_n = \begin{cases} 0, n \text{ 是偶数}, \\ a, n \text{ 是奇数}, \end{cases}$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

于是,当 $|r|=1$ 时,几何级数发散.

综上所述,几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$,当 $|r|<1$ 时收敛,其和是$\dfrac{a}{1-r}$;当 $|r|\geqslant 1$ 时发散.

例 2 证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

收敛,并求其和.

证明 通项 u_n 可改写为

$$u_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right).$$

级数的 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left[\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right) = \frac{1}{5}.$$

于是,级数收敛,其和是$\dfrac{1}{5}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}.$$

例 3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散.

证明　设调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的 n 项部分和是 S_n,即

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

由 § 2.2 例 11,已知数列 $\{S_n\}$ 发散,从而,调和级数发散.

注　由上册 § 2.2 例 11 知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c\quad(欧拉常数).$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

即当 $n\to\infty$ 时,调和级数的部分和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 与 $\ln n$ 是等价无穷大,即部分和 S_n 发散到正无穷大的速度与 $\ln n$ 发散的速度相当.欧拉曾计算过

$$S_{1\,000}=7.48\cdots,\quad S_{1\,000\,000}=14.39\cdots,\quad \cdots.$$

二、收敛级数的性质

级数研究的基本问题之一是寻求判别级数敛散性的方法.因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛是等价的,所以部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件.已知数列 $\{S_n\}$ 的柯西收敛准则:

数列 $\{S_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\exists\,N\in\mathbf{N}_+,\forall\,n>N,\forall\,p\in\mathbf{N}_+$,有 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.

设 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的 n 项部分和,有

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.$$

于是,有下面级数的柯西收敛准则.

定理 1(柯西收敛准则)　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\exists\,N\in\mathbf{N}_+,\forall\,n>N,\forall\,p\in\mathbf{N}_+$,有 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

柯西收敛准则在理论上十分重要,但用它来判别一个具体级数的敛散性,却往往很麻烦,甚至很困难.

根据定理 1 的必要性,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,即 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N\in\mathbf{N}_+,\forall\,n>N$,取 $p=1$,有 $|u_{n+1}|<\varepsilon$.于是,有

推论 1　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

推论 1 的等价命题是，若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如，级数

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots+\frac{n}{100n+1}+\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$ 发散.

注 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 仅是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件，即当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散.例如，调和级数（见例 3）

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却是发散的.

注 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛不仅要求级数一般项 u_n 趋近于 0，还要求 u_n 趋近于 0 的速度比调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的一般项 $\frac{1}{n}$ 趋近于 0 的速度快才行.

定理 1 指出，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的充分远（即 $n>N$）的任意片段（即 $\forall p \in \mathbf{N}_+$，$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$）的绝对值可以任意小.由此可见，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关，而与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 前面有限项无关.于是，又有

推论 2 去掉、增添或改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项，不改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

例如，去掉发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的前面 100 项，新级数

$$\sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+m}+\cdots$$

仍是发散的.

根据数列极限运算定理可得级数运算定理.

定理 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和是 S，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛，其和是 cS，其中 c 是非零常数.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的 n 项部分和分别是 S_n 与 σ_n，有

$$\sigma_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)=cS_n.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=cS,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 收敛,其和是 cS.

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cS=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足数(非零)的分配律.

定理 3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,其和是 S,则不改变级数每项的位置,按原有的顺序将某些项结合在一起,构成的新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots \text{①} \tag{3}$$

也收敛,其和也是 S.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的 n 项部分和是 S_n,新级数(3)的 k 项部分和是 σ_k,有

$$\begin{aligned}\sigma_k&=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})\\&=u_1+u_2+\cdots+u_{n_k}=S_{n_k},\end{aligned}$$

即新级数(3)的部分和数列$\{\sigma_k\}$是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$的子数列.根据§2.2定理 9,已知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则$\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k=S$.于是,新级数(3)收敛,其和也是 S.

定理 3 告诉我们,像有限和一样,对任何一个收敛级数的项与项之间不改变次序任意加括号,不会改变级数的收敛性,也不改变它的和,即收敛级数满足结合律.

注 对有限和来说,不但能随意加括号,而且可以随意去掉括号.但在级数中就不能随便去掉(无限多个)括号.例如,级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于 0,但去掉括号之后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.通俗地说,收敛级数的项与项之间可以任意加括号,但不能任意去掉括号.

这个命题的逆否命题也常用到,即

推论 若把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 中的项不改变次序加括号后所得到的级数发散,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

例如,对于级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots,$$

---

① 每个括号内的和数作为新级数的一项,新级数的第 k 项是$(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})$.

判定它的敛散性,并非十分明显.如果不改变次序加括号成为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1},$$

这是调和级数,是发散级数,所以原级数发散.

定理 4 若级数(3)中在同一括号中的项都有相同的符号,则从(3)的收敛便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而且二者有相同的和.

证明 设(3)的部分和为

$$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots,$$

并设 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k=S$.因为(3)的括号中的项都同号,所以当 n 由 n_{k-1} 到 n_k 时,相应的原级数的部分和 S_n 将单调地在 A_{k-1} 和 A_k 之间变动,即

$$A_{k-1}\leqslant S_n\leqslant A_k \quad 或 \quad A_k\leqslant S_n\leqslant A_{k-1} \quad (n_{k-1}<n\leqslant n_k).$$

当 $n\to+\infty$ 时,有 $k\to+\infty$,而 $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k=\lim\limits_{k\to+\infty} A_{k-1}=S$,从而有

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

定理 5 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,其和分别是 A 与 B,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

也收敛,其和是 $A\pm B$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的 n 项部分和分别是 A_n, B_n 与 C_n,有

$$\begin{aligned}C_n&=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)=A_n\pm B_n.\end{aligned}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=B$,有

$$\lim_{n\to\infty} C_n=\lim_{n\to\infty} A_n\pm\lim_{n\to\infty} B_n=A\pm B,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛,其和是 $A\pm B$.

练习题 9.1(一)

1. 求下列级数的和:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明:若 m 是固定的正整数,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

3. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

4. 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant0)$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛.反之是否成立?

5. 证明:若 $\{a_n\}$ 是整数数列,且 $0\leqslant a_n\leqslant9$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n10^{-n}$ 收敛,其和是 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

6. 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.(提示:应用级数的柯西收敛准则.)

7. 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

8. 证明:若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{2k}$ 都收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

* * * * * * * *

9. 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.(提示:证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的两个子数列 $\{S_{2n}\}$ 与 $\{S_{2n-1}\}$ 有相同的极限.)

10. 证明:若数列 $\{na_n\}$ 收敛,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

11. 证明:若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0.$$

12. 证明:若将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的依次若干项结合得到的新级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 收敛,其中 $A_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$,且 A_k 的项有相同的符号,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,且两个收敛级数的和相等.

三、同号级数

给了一个无穷级数,究竟怎样判别它的敛散性呢?在收敛的情况下,怎样求出它的和呢?这两个问题都是不容易解决的,本段将讨论一类特殊的同号级数的敛散性问题.

同号级数是指级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

的每一项 u_n 的符号都是非负或都是非正.若 $u_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$,称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**正项级数**;若 $u_n\leqslant0(n=1,2,\cdots)$,称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**负项级数**.

将负项级数的每项乘以-1,负项级数就变成了正项级数,根据定理 2,负项级数与正项级数具有相同的敛散性.于是,讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性.因此,下面只讨论正项级数的敛散性及其敛散性的判别法.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，则此级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加，即

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots.$$

根据 § 2.2 公理，有判别正项级数收敛性的定理：

定理 6　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

定理 6 是判别正项级数敛散性最基本的方法. 几乎所有其他的判别法都是由它导出的.

例 4　证明：正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

收敛.

证明　已知

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \leqslant \frac{1}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n-1\text{个}}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

从而，$\forall n \in \mathbf{N}_+$，有

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，则正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

从上例看到，判别正项级数的敛散性，先将其通项与某个已知的正项级数的通项进行比较，再应用定理 6 可判别其敛散性. 于是，有下面的正项级数比较判别法：

定理 7（比较判别法）　有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，且 $\exists N \in \mathbf{N}_+$，$\forall n \geqslant N$，有 $u_n \leqslant c v_n$，c 是正常数.

1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

2）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证明　根据定理 1 的推论 2，改变级数前面有限项并不改变级数的敛散性. 因此，不妨设 $\forall n \in \mathbf{N}_+$，有 $u_n \leqslant c v_n$.

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的 n 项部分和分别是 A_n 与 B_n，由上述不等式，有

$$A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant c v_1 + c v_2 + \cdots + c v_n = c(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = c B_n.$$

1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，根据定理 6，数列 $\{B_n\}$ 有上界，从而数列 $\{A_n\}$ 也有上界，级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，根据定理 6，数列 $\{A_n\}$ 无上界，从而数列 $\{B_n\}$ 也无上界，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例 5 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性，其中 p 是任意实数. 此级数称为**广义调和级数**，或**p 级数**.

解 广义调和级数的敛散性与数 p 有关，下面分三种情况讨论：

1）当 $p=1$ 时，广义调和级数就是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，已知调和级数发散，即广义调和级数发散.

2）当 $p<1$ 时，$\forall n \in \mathbf{N}_+$，有

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}.$$

已知调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，根据定理 7，当 $p<1$ 时，广义调和级数也发散.

3）当 $p>1$ 时，由练习题 6.1 第 9 题的 5），$\forall n \geqslant 2$，有

$$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right].$$

于是，$\forall n \in \mathbf{N}_+$，有

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p} \\
&< 1+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}}-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right)+\cdots+\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right] \\
&= 1+\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{1^{p-1}}-\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right] \\
&= 1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1},
\end{aligned}$$

即广义调和级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，从而广义调和级数收敛.

综上所述，广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，当 $p \leqslant 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

例 6 判别下列正项级数的敛散性：

1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$；　　2）$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$.