

高等学校教材

数学分析讲义

第六版（下册）

刘玉琮 傅沛仁 刘伟 林玓 编

高等教育出版社



高等学校教材

数学分析讲义

第六版（下册）

刘玉琮 傅沛仁 刘伟 林玓 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书分上、下两册，是在第五版的基础上修订而成的。在内容和体例上未作较大变动。知识内容稍有扩充，涉及的方面很广。增加了反常重积分的内容及少量的说明性文字，使内容更加完善，并适当补充了数字资源（以图标示意）。下册内容包括：级数、多元函数微分学、隐函数、反常积分与含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分等。

本书阐述细致，范例较多，便于自学，可作为高等师范学校本科教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 下册 / 刘玉琮等编. -- 6 版. -- 北京: 高等教育出版社, 2019.4
ISBN 978-7-04-051263-2

I. ①数… II. ①刘… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 011967 号

项目策划	李艳馥	李蕊	兰莹莹		
策划编辑	李蕊	责任编辑	张晓丽	封面设计	王凌波
插图绘制	于博	责任校对	高歌	版式设计	马云
				责任印制	刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	山东鸿君杰文化发展有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	20.75	版 次	1966 年 3 月第 1 版
字 数	470 千字		2019 年 4 月第 6 版
购书热线	010-58581118	印 次	2019 年 4 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	40.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

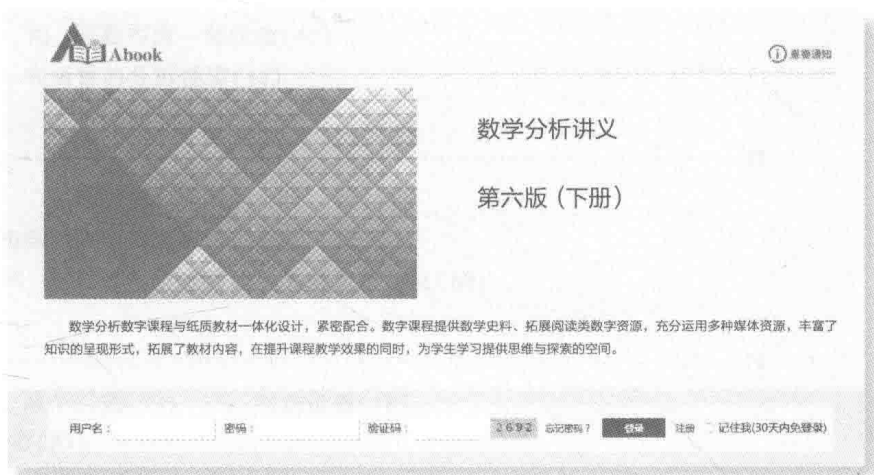
物 料 号 51263-00

数学分析讲义

第六版(下册)

刘玉琏 傅沛仁 刘伟 林玓 编

1. 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1255302>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
2. 注册并登录, 进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号(20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在
手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用



数学分析简史(上)



数学分析简史(下)

<http://abook.hep.com.cn/1255302>

第九章 级数	1
§ 9.1 数项级数	1
一、收敛与发散概念(1) 二、收敛级数的性质(4)	
练习题 9.1(一)(7) 三、同号级数(8) 四、变号级数(17)	
练习题 9.1(二)(24) 五、绝对收敛级数的性质(26)	
练习题 9.1(三)(31)	
§ 9.2 函数项级数	32
一、函数项级数的收敛域(32) 二、一致收敛概念(33)	
三、一致收敛判别法(36) 四、函数列的一致收敛(41)	
练习题 9.2(一)(43) 五、和函数的分析性质(45)	
练习题 9.2(二)(51)	
§ 9.3 幂级数	52
一、幂级数的收敛域(52) 二、幂级数和函数的分析性质(55)	
三、泰勒级数(60) 四、初等函数的幂级数展开(62)	
五、幂级数的应用(66) 六、指数函数与三角函数的幂级数定义(69)	
练习题 9.3(73)	
§ 9.4 傅里叶级数	74
一、傅里叶级数(74) 二、两个引理(77) 三、收敛定理(79)	
四、奇、偶函数的傅里叶级数(83)	
五、以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数(88)	
练习题 9.4(90)	
第十章 多元函数微分学	92
§ 10.1 多元函数	92
一、 n 维欧氏空间(92) 二、多元函数概念(96)	
三、 $\mathbf{R}^2$ 的点列极限与连续性(98) 练习题 10.1(102)	
§ 10.2 二元函数的极限与连续	103
一、二元函数的极限(103) 二、二元函数的连续性(107)	
练习题 10.2(110)	
§ 10.3 多元函数微分法	112
一、偏导数(112) 二、全微分(114) 三、可微的几何意义(118)	
四、复合函数微分法(120) 五、方向导数(122)	
练习题 10.3(124)	
§ 10.4 二元函数的泰勒公式	125
一、高阶偏导数(125) 二、二元函数的泰勒公式(129)	

三、二元函数的极值(132) 练习题 10.4(138)	
第十一章 隐函数	141
§ 11.1 隐函数的存在性	141
一、隐函数概念(141) 二、一个方程确定的隐函数(143)	
三、方程组确定的隐函数(146) 练习题 11.1(152)	
§ 11.2 函数行列式	154
一、函数行列式(154) 二、函数行列式的性质(155)	
三、函数行列式的几何性质(157) 练习题 11.2(158)	
§ 11.3 条件极值	159
一、条件极值与拉格朗日乘法(159) 二、例(163)	
练习题 11.3(166)	
§ 11.4 隐函数存在定理在几何方面的应用	167
一、空间曲线的切线与法平面(167) 二、曲面的切平面与法线(170)	
练习题 11.4(172)	
第十二章 反常积分与含参变量的积分	174
§ 12.1 无穷积分	174
一、无穷积分收敛与发散概念(174) 二、无穷积分与级数(177)	
三、无穷积分的性质(178) 四、无穷积分的敛散性判别法(180)	
练习题 12.1(185)	
§ 12.2 瑕积分	186
一、瑕积分收敛与发散概念(186) 二、瑕积分的敛散性判别法(188)	
练习题 12.2(193)	
§ 12.3 含参变量的积分	194
一、含参变量的有限积分(194) 二、例(I)(198)	
三、含参变量的无穷积分(201) 四、例(II)(208)	
五、 Γ 函数与 B 函数(213) 六、例(III)(218)	
练习题 12.3(220)	
第十三章 重积分	223
§ 13.1 二重积分	223
一、曲顶柱体的体积(223) 二、二重积分概念(224)	
三、二重积分的性质(227) 练习题 13.1(一)(228)	
四、二重积分的计算(229) 五、二重积分的换元(235)	
六、曲面的面积(240) 练习题 13.1(二)(244)	
§ 13.2 三重积分	245
一、三重积分概念(245) 二、三重积分的计算(246)	
三、三重积分的换元(249) 四、简单应用(253)	
练习题 13.2(255)	
§ 13.3 反常重积分	257
一、无界区域上的反常重积分(257)	
二、无界函数的反常重积分(260)	
练习题 13.3(261)	
第十四章 曲线积分与曲面积分	263
§ 14.1 曲线积分	263
一、第一型曲线积分(263) 二、第二型曲线积分(267)	

三、第一型曲线积分与第二型曲线积分的关系(272)	
四、格林公式(273) 五、曲线积分与路径无关的条件(278)	
练习题 14.1(282)	
§ 14.2 曲面积分	284
一、第一型曲面积分(284) 二、第二型曲面积分(286)	
三、奥-高公式(290)	
四、斯托克斯公式(293) 练习题 14.2(297)	
§ 14.3 场论初步	299
一、梯度(299) 二、散度(301) 三、旋度(304)	
四、微分算子(308) 练习题 14.3(309)	
部分练习题答案	311
参考书目	323

第九章

级数

级数分为数项级数与函数项级数.函数项级数是表示函数,特别是表示非初等函数的一个重要的数学工具.例如,有的微分方程的解不是初等函数,但其解却可表示为函数项级数.函数项级数又是研究函数(初等函数与非初等函数)性质的一个重要手段.因此,函数项级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用.数项级数是函数项级数的特殊情况,它又是函数项级数的基础.本章首先讨论数项级数的基本理论.

§ 9.1 数项级数

一、收敛与发散概念

设有数列 $\{u_n\}$, 即

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots \quad (1)$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来,即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad \text{或} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (2)$$

称为数项级数,简称级数,其中 u_n 称为级数(2)的第 n 项或通项.

级数(2)是无限多个数的和.我们只会计算有限个数的和,不仅不会计算无限多个数的和,甚至都不知道何谓无限多个数的和.因此,级数(2)只是一种形式,也是一个符号,它尚没有具体的意义.无限多个数的和是一个未知的新概念.这个新概念不是孤立的,它与我们已知的有限个数的和联系着.不难想到,由有限个数的和转化到“无限多个数的和”应借助极限这个工具来实现.

设级数(2)前 n 项的和是 S_n , 即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{或} \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

称为级数(2)的 n 项部分和.显然,对给定级数(2),其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的.于是,级数(2)对应着一个已知的部分和数列 $\{S_n\}$.

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = S,$$

则称级数(2)收敛, S 是级数(2)的和,记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数 (2) 发散.

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 而 $S - S_n$ 记为 r_n , 即

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项余和, 简称余和. 显然, 级数收敛, 总有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0.$$

由此可见, 级数的敛散性 (收敛与发散) 是借助于它的部分和数列的敛散性定义的. 反之, 数列的敛散性也可归结为级数的敛散性. 事实上, 设有数列 $\{S_n\}$. 令

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \cdots, a_n = S_n - S_{n-1}, \cdots.$$

显然,

$$S_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

即数列 $\{S_n\}$ 的敛散性可归结为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

因此, 研究收敛级数及其和只不过是研究收敛数列及其极限的一种新形式. 因为级数是有限和的推广, 有鲜明的直观性, 所以, 这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复, 它使我们处理不同形式的极限具有更大的灵活性, 并提供了新的数学工具.

例 1 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性, 其中 $a \neq 0, r$ 是公比.

解 1) 当 $|r| \neq 1$ 时, 已知几何级数的 n 项部分和

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}. \quad ①$$

当 $|r| < 1$ 时, 存在极限, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

因此, 当 $|r| < 1$ 时, 几何级数收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

当 $|r| > 1$ 时, 不存在极限, 且

① 见 § 2.1 例 3, 当 $|r| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \infty.$$

因此,当 $|r| > 1$ 时,几何级数发散.

2) 当 $|r| = 1$ 时,有两种情况:

当 $r = 1$ 时,几何级数是 ($a \neq 0$)

$$\begin{aligned} & a + a + a + \cdots + a + \cdots, \\ S_n &= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \uparrow} = na, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty, \end{aligned}$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

当 $r = -1$ 时,几何级数是

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots.$$

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 是偶数,} \\ a, & n \text{ 是奇数,} \end{cases}$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

于是,当 $|r| = 1$ 时,几何级数发散.

综上所述,几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, 当 $|r| < 1$ 时收敛,其和是 $\frac{a}{1-r}$; 当 $|r| \geq 1$ 时发散.

例 2 证明级数

$$\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$$

收敛,并求其和.

证明 通项 u_n 可改写为

$$u_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right).$$

级数的 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left[\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5}.$$

于是,级数收敛,其和是 $\frac{1}{5}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}.$$

例 3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

发散.

证明 设调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的 n 项部分和是 S_n , 即

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

由 § 2.2 例 11, 已知数列 $\{S_n\}$ 发散, 从而, 调和级数发散.

注 由上册 § 2.2 例 11 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = c \quad (\text{欧拉常数}).$$

或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 调和级数的部分和 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 与 $\ln n$ 是等价无穷大, 即部分和 S_n 发散到正无穷大的速度与 $\ln n$ 发散的速度相当. 欧拉曾计算过

$$S_{1\,000} = 7.48\cdots, \quad S_{1\,000\,000} = 14.39\cdots, \quad \cdots$$

二、收敛级数的性质

级数研究的基本问题之一是寻求判别级数敛散性的方法. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛是等价的, 所以部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件. 已知数列 $\{S_n\}$ 的柯西收敛准则:

数列 $\{S_n\}$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}_+, \text{有 } |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$

设 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和, 有

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}.$$

于是, 有下面级数的柯西收敛准则.

定理 1 (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}_+, \text{有 } |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$

柯西收敛准则在理论上十分重要, 但用它来判别一个具体级数的敛散性, 却往往很麻烦, 甚至很困难.

根据定理 1 的必要性, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \text{取 } p = 1, \text{有 } |u_{n+1}| < \varepsilon.$ 于是, 有

推论 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$

推论 1 的等价命题是,若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如,级数

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \cdots + \frac{n}{100n+1} + \cdots.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \neq 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$ 发散.

注 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件,而不是充分条件,即当 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散.例如,调和级数(见例 3)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却是发散的.

注 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛不仅要求级数一般项 u_n 趋近于 0, 还要求 u_n 趋近于 0 的速度比调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的一般项 $\frac{1}{n}$ 趋近于 0 的速度快才行.

定理 1 指出,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的充分远(即 $n > N$)的任意片段(即 $\forall p \in \mathbf{N}_+, u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$)的绝对值可以任意小.由此可见,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关,而与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 前面有限项无关.于是,又有

推论 2 去掉、增添或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项,不改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

例如,去掉发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的前面 100 项,新级数

$$\sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{100+m} + \cdots$$

仍是发散的.

根据数列极限运算定理可得级数运算定理.

定理 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和是 S , 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛,其和是 cS , 其中 c 是非零常数.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的 n 项部分和分别是 S_n 与 σ_n , 有

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n.$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = cS,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 其和是 cS .

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足数(非零)的分配律.

定理 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 则不改变级数每项的位置, 按原有的顺序将某些项结合在一起, 构成的新级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots \quad (3)$$

也收敛, 其和也是 S .

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和是 S_n , 新级数(3)的 k 项部分和是 σ_k , 有

$$\begin{aligned} \sigma_k &= (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_k} = S_{n_k}, \end{aligned}$$

即新级数(3)的部分和数列 $\{\sigma_k\}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 根据 § 2.2

定理 9, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = S$. 于是, 新级数(3)收敛, 其和也是 S .

定理 3 告诉我们, 像有限和一样, 对任何一个收敛级数的项与项之间不改变次序任意加括号, 不会改变级数的收敛性, 也不改变它的和, 即收敛级数满足结合律.

注 对有限和来说, 不但能随意加括号, 而且可以随意去掉括号. 但在级数中就不能随便去掉(无限多个)括号. 例如, 级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛于 0, 但去掉括号之后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的. 通俗地说, 收敛级数的项与项之间可以任意加括号, 但不能任意去掉括号.

这个命题的逆否命题也常用到, 即

推论 若把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的项不改变次序加括号后所得到的级数发散, 则原级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例如, 对于级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots,$$

① 每个括号内的和数作为新级数的一项, 新级数的第 k 项是 $(u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k})$.

判定它的敛散性,并非十分明显.如果不改变次序加括号成为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1},$$

这是调和级数,是发散级数,所以原级数发散.

定理 4 若级数(3)中在同一括号中的项都有相同的符号,则从(3)的收敛便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而且二者有相同的和.

证明 设(3)的部分和为

$$A_1, A_2, \dots, A_k, \dots,$$

并设 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = S$. 因为(3)的括号中的项都同号,所以当 n 由 n_{k-1} 到 n_k 时,相应的原级数的部分和 S_n 将单调地在 A_{k-1} 和 A_k 之间变动,即

$$A_{k-1} \leq S_n \leq A_k \quad \text{或} \quad A_k \leq S_n \leq A_{k-1} \quad (n_{k-1} < n \leq n_k).$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时,有 $k \rightarrow +\infty$, 而 $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{k-1} = S$, 从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

定理 5 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,其和分别是 A 与 B , 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

也收敛,其和是 $A \pm B$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的 n 项部分和分别是 A_n , B_n 与 C_n , 有

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛,其和是 $A \pm B$.

练习题 9.1(一)

1. 求下列级数的和:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$

2. 证明:若 m 是固定的正整数,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right).$$

3. 证明:若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

4. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 反之是否成立?

5. 证明:若 $\{a_n\}$ 是整数数列, 且 $0 \leq a_n \leq 9$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 收敛, 其和是 $0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$.

6. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. (提示:应用级数的柯西收敛准则.)

7. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 发散.

8. 证明:若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

* * * * *

9. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (提示:证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的两个子数列 $\{S_{2n}\}$ 与 $\{S_{2n-1}\}$ 有相同的极限.)

10. 证明:若数列 $\{n a_n\}$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

11. 证明:若 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

12. 证明:若将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的依次若干项结合得到的新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛, 其中 $A_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$, 且 A_k 的项有相同的符号, 则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且两个收敛级数的和相等.

三、同号级数

给了一个无穷级数, 究竟怎样判别它的敛散性呢? 在收敛的情况下, 怎样求出它的和呢? 这两个问题都是不容易解决的, 本段将讨论一类特殊的同号级数的敛散性问题.

同号级数是指级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

的每一项 u_n 的符号都是非负或都是非正. 若 $u_n \geq 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数; 若 $u_n \leq 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是负项级数.

将负项级数的每项乘以 -1 , 负项级数就变成了正项级数, 根据定理 2, 负项级数与正项级数具有相同的敛散性. 于是, 讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性. 因此, 下面只讨论正项级数的敛散性及其敛散性的判别法.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 则此级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加, 即

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots.$$

根据 § 2.2 公理, 有判别正项级数收敛性的定理:

定理 6 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\iff$ 它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

定理 6 是判别正项级数敛散性最基本的方法. 几乎所有其他的判别法都是由它导出的.

例 4 证明: 正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

收敛.

证明 已知

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \leq \frac{1}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n-1 \text{ 个}}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

从而, $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界, 则正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

从上例看到, 判别正项级数的敛散性, 先将其通项与某个已知的正项级数的通项进行比较, 再应用定理 6 可判别其敛散性. 于是, 有下面的正项级数比较判别法:

定理 7 (比较判别法) 有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 且 $\exists N \in \mathbf{N}_+$, $\forall n \geq N$, 有 $u_n \leq cv_n$, c 是正常数.

- 1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;
- 2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证明 根据定理 1 的推论 2, 改变级数前面有限项并不改变级数的敛散性. 因此, 不妨设 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有 $u_n \leq cv_n$.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的 n 项部分和分别是 A_n 与 B_n , 由上述不等式, 有

$$A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq cv_1 + cv_2 + \cdots + cv_n = c(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = cB_n.$$

- 1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 根据定理 6, 数列 $\{B_n\}$ 有上界, 从而数列 $\{A_n\}$ 也有上界, 级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 根据定理 6, 数列 $\{A_n\}$ 无上界, 从而数列 $\{B_n\}$ 也无上界, 级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例 5 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的敛散性, 其中 p 是任意实数. 此级数称为广义调和级数, 或 p 级数.

解 广义调和级数的敛散性与数 p 有关, 下面分三种情况讨论:

1) 当 $p=1$ 时, 广义调和级数就是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 已知调和级数发散, 即广义调和级数发散.

2) 当 $p < 1$ 时, $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}.$$

已知调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 根据定理 7, 当 $p < 1$ 时, 广义调和级数也发散.

3) 当 $p > 1$ 时, 由练习题 6.1 第 9 题的 5), $\forall n \geq 2$, 有

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right].$$

于是, $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \\ &< 1 + \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{1^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} \right) + \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} \right) + \cdots + \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{1^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) < 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}, \end{aligned}$$

即广义调和级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界, 从而广义调和级数收敛.

综上所述, 广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 当 $p \leq 1$ 时发散, 当 $p > 1$ 时收敛.

例 6 判别下列正项级数的敛散性:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}.$$