普通高等教育“十三五”规划教材
大学本科数学类专业基础课程系列丛书

抽象代数基础（上册）

——代数学引论

郭聿琦　冯爱芳　雷　鹏　编著

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

大学本科数学类专业基础课程系列丛书

抽象代数基础

(上 册)

——代数学引论

郭聿琦 冯爱芳 雷 鹏 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本教材分上、下两册，上册由前六章构成，依次为集合论的基本概念、抽象代数的基本概念、Green 关系与正则半群、群（特别地，有限群）、环与理想，模与线性空间；下册由后两章构成，依次为域与域的扩张，Galois 理论导引. 本书为上册. 本教材的内容涵盖数学类专业本科生（特别地，各类数学人才班）的两门代数课程，上册的前五章或前六章（特别是未加*的部分）可用作数学类各专业必修基础课程抽象代数的教材或参考资料；下册的后两章可用于后续选修课程域论与 Galois 理论的教材或参考资料.

本书可供高等院校数学类各专业师生以及有关数学工作者使用.

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数基础：全 2 册/郭聿琦等编著. —北京：科学出版社，2019.3
(大学本科数学类专业基础课程系列丛书)
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-060752-2

Ⅰ. ①抽… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①抽象代数–高等学校–教材 Ⅳ. ①O153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 043100 号

责任编辑：胡海霞／责任校对：杨聪敏
责任印制：张 伟／封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 3 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2019 年 3 月第一次印刷 印张：17 3/4
字数：346 000

定价：59.00 元(全 2 册)
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

“抽象代数”(也称为“近世代数”) 是数学类专业本科生的必修基础课程之一, 通常, 相对于所谓“老三高” (“高等代数”、“数学分析”和“解析几何”), 它与“实变函数”和“微分几何”也合称为“新三高”.

本教材涵盖两门课程的内容, 上册 (特别是未加 $*$ 的章节) 构成本科必修基础课程“抽象代数” (72 学时) 的基本内容; 下册构成后续选修课程“域论与 Galois 理论” (54 学时) 的基本内容.

鉴于数学的高度抽象性和严格逻辑性在“抽象代数”课程上体现得尤为明显, 这门课程的教与学, 需要学生具有一定的数学能力 (这种能力只能通过若干大学数学课程的学习, 在知识的积累过程中形成). 因此, 这门课程置于本科生入学后一年半左右开设较为合适, 尽管原则上它可以开设得更早.

本教材有以下五个处理特色.

(1) 在第 2 章 (抽象代数的基本概念) 里, 关于抽象概念的引进, 我们除了考虑到学生经过前一年半的知识积累过程中已形成的数学能力之外, 也在遵循由已知到未知 (当然还有, 由具体到抽象, 由特殊到一般等) 的认知规律, 还充分使用着学生在这一知识积累过程中获得的若干新的已知. 具体地说, 关于抽象概念的引进, 我们是对“高等代数”内容的“温故知新”入手的, 即在“高等代数”中, 将要介绍的所有抽象代数系统的有关概念 (包括其上的同态、同余和各类子系统, 以及某系统到另一系统 (集合) 上的作用等) 的特殊情形都已出现过.

(2) 我们的这一教材的“教材处理”, 还秉承着“与时俱进”, 即“现代化”, 或曰“更新”的原则, 这一“更新”中也包括某些适当的、必要的和可能的“增新”. 除了术语和符号的与现代数学文献接轨的使用, 本教材还有如下“增新”.

在第 2 章之后的关于各类代数系统的分章讨论中, 相对于国内外本科“抽象代数”的现状, 我们增加了一个新的内容, 即“Green 关系与正则半群” (第 3 章), 用于讨论半群代数理论的某些基本概念, 某些研究课题, 以及某些典型的研究方法. 这一“增新”的理由有二:

其一, “半群代数理论”形成为代数学的一个独立的分支学科已达半个多世纪之久. 从 Green 关系出发形成的半群研究上的 Green 方法, 以及半群作为一类典型的泛代数的同余理论, 使得半群与群的关系很像环与域的关系, 半群理论与群论已经无交了. “半群代数理论”在面向理论计算机科学、信息科学和财经金融领域的“抽象代数”教材里占有很大的篇幅; 但在数学类专业的“抽象代数”教材里, 却始终未见实质性的涉及.

其二, 半群的基本概念和基本方法的介绍, 也有助于在其他各章对群、环等 (它们是最经典的代数系统) 概念的内涵和外延进行较深入的挖掘和把握, 从而让学生认识到对概念、事实 (它们是概念的内涵) 和方法 (它们提供揭示概念内涵和外延的有效步骤) 的较深入的挖掘和把握并非易事, 而且学会这种挖掘和把握, 是健全创新性思维的重要途径.

(3) 整部书稿, 从理论开发路线的设置、概念的整合、事实的陈述到证明的方法和案例

的构造, 都实现了诸多更新. 这里既有我们收集到的, 也有我们自己的学术性教学研究成果.

(4) 关于各种类型的代数系统的讨论, 都通过围绕基本概念, 选择适当课题, 使用行之有效的方法, 开发出一小套理论, 以便让学生体会到理论建立的过程, 也体会到方法的重要性.

(5) 鉴于该教材中, 仅其上册供必修课“抽象代数”课程使用, 我们在其若干部位, 也都设置了许多小的具体问题, 尽管依靠概念就可以读懂它们, 但只有懂得某一套理论才能去解决某个问题, 从而让学生体会到抽象和严格的理论的必要和威力.

“教材撰著”和“课堂讲授”的基本问题都是“教材处理”, 这应该是共识了. 但是,“教材处理”应遵循的原则和具体的处理实践, 就仁者见仁, 智者见智了. 读者从教材中, 可见我们的观点和实践之一斑. 除却前面提到的, 我们还认为, 教材的语言固然严禁艰涩, 也切忌所谓“通俗易懂, 便于自学” (这不利于学生学会读“书”). 欢迎批评指正.

郭聿琦教授部分讲课视频 (上册)

使用本教材的三点说明:

(1) 未加星号章节的内容, 原则上不依赖于加星号章节的任何内容.

(2) 4.1 节的三个定理的证明用到了未加星号的 3.1 节和未加星号的 3.2 节的前半节; 但是, 我们也在作为附录的 4.4 节中, 给出了这三个定理的不依赖于整个第 3 章的初等证明.

(3) 本书附有郭聿琦教授关于抽象代数的部分讲课视频, 观看请扫描左边二维码.

感谢“教育部基础学科拔尖学生培养试验计划”的研究课题“拔尖学生知识积累过程中的能力培养”(编号: 20180706) 基金的资助.

该教材的撰著得到兰州大学教务处、兰州大学萃英学院 (国家“基础学科拔尖学生培养试验计划”的兰州大学执行单位) 和兰州大学数学与统计学院的大力支持, 特别地, 得到了教务处“兰州大学教材建设基金”的资助和萃英学院“出版基金”的资助, 我们在此表示由衷的感谢.

本书是“大学本科数学类专业基础课程系列丛书”中的一本, 在这套丛书中, 我们承担撰写的涵盖四门代数学课程内容的三部教材 (另两部此前已出版) 的责任编辑都是科学出版社的胡海霞编辑, 我们在此也对她认真负责的辛勤工作表示衷心的感谢.

中国科学院李宝研究员、西安建筑科技大学任学明教授、西北大学赵宪钟教授、曲阜师范大学郑恒武教授和西南大学王正攀教授阅读了本教材第五稿的全部或部分章节, 提出了若干中肯的修改建议; 博士生刘祖华、冷静、刘海艳、梁星亮、冯辛阳也承担了某些课程的助教工作和部分书稿的打印, 硕士生皇甫振国、高梦、童俊、王楠和徐子棋也各参加了一届抽象代数或域论与 Galois 理论课程的助教工作, 他们关于本书的前几稿的修订做了不少具体工作. 在此也一并向他们表达我们诚挚的感谢.

郭聿琦
(兰州大学, 西南大学)
2018 年 9 月

目　　录

第 1 章　集合论的基本概念

1.1　集合上的偏序与 Zorn 引理

1.1.1　涉及集合的若干基本事项的回顾和罗列

集合是数学中极少数不加定义的所谓的“元概念”之一, 而且是“元概念”里最基本、最重要的一个. 尽管集合的概念是不加定义的, 但是我们一般地把集合理解为具备某个性质的对象的全体. 我们这里涉及的是集合间的一个基本关系与若干基本合成, 集合上的二元关系 (特别地, 偏序 (关系)), 二元运算与一元运算, 后者也被称作集合上的变换.

定义 1.1.1　令 A, B 为两个集合. 称 A 包含在 B 中, 或称 B 包含着 A, 又称 A 为 B 的子集, 如果

$$a \in A \implies a \in B,$$

记为 $A \subseteq B$. 称 A 与 B 相等 (A 真包含在 B 中, 或称 B 真包含着 A, 又称 A 为 B 的真子集), 如果

$$A \subseteq B,\ \text{且}\ B \subseteq A$$

$$(A \subseteq B,\ \text{但}\ B \nsubseteq A),$$

记为 $A = B$ ($A \subsetneq B$).

定义 1.1.2　令 A, B 为两个集合. 则下面的 C_1, C_2, C_3, C_4 和 C_5 也都是集合, 称它们分别为 A 与 B 的并, 交, 差 (补), Descartes 积与 A 的幂:

$C_1 = A \cup B \overset{\mathrm{d}}{=} \{a \mid a \in A\ \text{或}\ a \in B\}$,

$C_2 = A \cap B \overset{\mathrm{d}}{=} \{a \mid a \in A\ \text{且}\ a \in B\}$,

$C_3 = A - B$ (或 $A \setminus B$, 当 $B \subseteq A$ 时, 也记为 $\overline{B}_A$) $\overset{\mathrm{d}}{=} \{a \mid a \in A\ \text{但}\ a \notin B\}$,

$C_4 = A \times B \overset{\mathrm{d}}{=} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$,

$C_5 = \mathscr{P}(A) \overset{\mathrm{d}}{=} \{S \mid S \subseteq A\}$.

定义 1.1.3　令 A 为一集合. A 上的二元关系指的是 $A \times A$ 的子集.

集合 A 上的全体二元关系也构成集合, 即 $A \times A$ 的幂集 $\mathscr{P}(A \times A)$, 也记其为 $\mathscr{B}(A)$. 一般地, $(a, b) \in \sigma$ 也写成 $a\sigma b$, 其中 $\sigma \in \mathscr{B}(A)$.

定义 1.1.4　令 A 为一非空集. 关于任意 $\sigma, \tau \in \mathscr{B}(A)$,

$$\sigma \circ \tau \overset{\mathrm{d}}{=} \{(a, b) \mid (\exists\, c \in A)\ a\sigma c\ \text{且}\ c\tau b\}.$$

称 $\circ$ 为 (A 上的) 二元关系的通常的合成.

定义 1.1.5　称非空集合 A 上的二元关系 $\leqslant$ 为 A 上的一个偏序, 如果它满足

(1) 自反性: $(\forall\, a \in A)\ \ a \leqslant a$;

(2) 反对称性: $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a \implies a = b$;

(3) 传递性: $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$.

$a \leqslant b$ 读作 a 小于等于 b.

定义偏序的三条性质是相互独立的 (可举例指出, 其中任意两条推不出另一条).

例 1.1.1　令 A 为一非空集. 则包含关系 $\subseteq$ 为 $\mathscr{P}(A)$ 上的一个偏序.

例 1.1.2　令 A 为一非空集. 称

$$\iota_A \overset{\mathrm{d}}{=} \{(a,a) \mid a \in A\}$$

为 A 上的相等关系 (或 A 的对角线), ι_A 是 A 上的最小偏序 (即, 关于 A 上任一偏序 α, $\iota_A \subseteq \alpha$).

一般地, 没有最大的偏序 (除非 $|A| = 1$), 但会有极大偏序 (称 A 上的偏序 λ 为一极大偏序, 如果关于 A 上的任一偏序 α, $\lambda \subseteq \alpha$ 蕴涵 $\alpha = \lambda$). 后面, 我们将利用 Zorn 引理和良序公理分别证明任意非空集合上极大偏序的存在性.

定义 1.1.6　令 A 为一集合. A 上的二元运算 (一元运算, 即变换) 指的是如下形式的映射

$$f : A \times A \longrightarrow A$$

$$(f : A \longrightarrow A).$$

推而广之, 称映射

$$f : \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{n\text{个}} \longrightarrow A$$

为 A 上的一个 n 元运算. 称 A 上的变换 f 为恒等变换, 如果

$$(\forall\, a \in A)\ f(a) = a,$$

记为 1_A. 集合 A 上的全体变换记为 $\mathscr{T}(A)$.

例 1.1.3　定义 1.1.4 中的 $\circ$ 为 $\mathscr{B}(A)$ 上的一个二元运算.

1.1.2　偏序集、Zorn 引理等三个等价公理及其应用

定义 1.1.7　令 A 为一非空集, $\leqslant$ 为 A 上一偏序. 称偏序系统 $A \overset{\mathrm{d}}{=} (A, \leqslant)$ 为一偏序集. 称一偏序集 $A \overset{\mathrm{d}}{=} (A, \leqslant)$ 为一全序集 (也称为一个链), 或称偏序 $\leqslant$ 为 A 上的一个全序, 如果 A 的任意有限非空子集 S 关于 $\leqslant$ 有最小元 , 即

$$(\exists\, a \in S)\ (\forall\, x \in S)\ a \leqslant x,$$

这显然等价于 A 的任意二元子集 $\{a, b\}$ 关于 $\leqslant$ 有最小元, 即

$$a \leqslant b, \text{ 或者 } b \leqslant a.$$

称一偏序集 $A = (A, \leqslant)$ 为一良序集, 或称偏序 $\leqslant$ 为 A 上的一个良序, 如果 A 的任意非空子集关于 $\leqslant$ 有最小元.

注 1.1.1　良序 (全序) 显然为全序 (偏序); 但反之未必.

例 1.1.4 在例 1.1.1 中, 当 $|A| \geqslant 2$ 时, 偏序集 $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ 不为全序集.

例 1.1.5 关于实数的通常的大小关系, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ 都构成全序集, 但都非良序集.

例 1.1.6 关于实数的通常的大小关系, $\mathbb{Z}$ 的含最小元的非空子集都构成良序集; 将 $\mathbb{Z}$ 换为 $\mathbb{R}$ 就未必了.

下面是集合论中的三个等价的著名公理, 称其为公理, 当然就不存在证明的问题; 其直观性、不证自明性, 从第二个公理 (选择公理) 可见一斑. 但第三个公理 (良序公理) 就不直观了, 因为数学界还未找到实数集 $\mathbb{R}$ 上的任何良序. 关于这三个公理, 其等价性在此不再赘述, 我们只陈述它们的内容并介绍它们的应用.

Zorn 引理 令 $A \overset{\mathrm{d}}{=} (A, \leqslant)$ 为一偏序集. 若 A 的每一链 (即全序子集) S 在 A 中都有上界, 即

$$(\exists\, a \in A) \quad (\forall\, s \in S) \quad s \leqslant a,$$

则 A 有极大元, 即

$$(\exists\, a \in A) \quad (\forall\, x \in A) \quad x \not> a.$$

选择公理 令 $T = \{A_i \mid i \in I\}$ 为一族非空集合. 则存在映射

$$\begin{aligned} \varphi:\ T &\longrightarrow \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i, \\ A_i &\longmapsto \varphi(A_i) \in A_i. \end{aligned}$$

称 φ 为一选择函数.

良序公理 任何集合上都可以定义起一个良序.

下面若干事实的证明依次分别使用了这三个公理.

定理 1.1.1 (Zorn 引理、良序公理用于集合上极大偏序的存在性的证明) 令 A 为一非空集. 则 A 上的极大偏序存在 (A 上极大偏序的定义见定义 1.1.6 上面的一段).

证明 证法一 (应用 Zorn 引理):

令 S 为 A 上全体偏序构成的集合. 则 S 按集合的包含关系构成一偏序集.

记 $T = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ 为 S 的任一链, $\sigma = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$. 显然关于任意 $a \in A$, $(a,a) \in \sigma$; 关于任意 $a, b \in A$, 若 $(a,b) \in \sigma, (b,a) \in \sigma$, 则存在 $j, k \in I$, 使得 $(a,b) \in \sigma_j, (b,a) \in \sigma_k$. 又 T 为一链, 从而 σ_j, σ_k 存在包含关系, 不妨令 $\sigma_j \subseteq \sigma_k$. 因此 $(a,b) \in \sigma_k$, $(b,a) \in \sigma_k$. 于是, 由 σ_k 为一偏序知, $a = b$; 同理可证, 关于任意 $a, b, c \in A$, 若 $(a,b) \in \sigma, (b,c) \in \sigma$, 则 $(a,c) \in \sigma$. 因此 $\sigma \in S$. 显然 σ 为 T 的一个上界. 根据 Zorn 引理, S 中存在一个极大元. 换句话说, A 中存在一个极大偏序.

证法二 (应用良序公理):

根据良序公理, A 上可以定义起一个良序, 记为 $\leqslant$. 则 $\{(a,b) \in A \times A \mid a \leqslant b\}$ 和 $\{(b,a) \in A \times A \mid a \leqslant b\}$ 显然都是 A 上的极大偏序. 例如, $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 上的通常的大小关系 $\leqslant$

是 $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 上的一个良序. $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 上的偏序

$$\left\{\begin{array}{lllll} (0,0), & (0,1), & \cdots, & (0,n), & \cdots \\ & (1,1), & \cdots, & (1,n), & \cdots \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & (n,n), & \cdots \\ & & & & \cdots \end{array}\right\}$$

和

$$\left\{\begin{array}{llll} (0,0), & & & \\ (1,0), & (1,1), & & \\ \cdots & & \cdots & \\ (n,0), & (n,1), & \cdots & (n,n), \\ \cdots & & \cdots & \qquad\cdots \end{array}\right\}$$

都是 $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 上的极大偏序. □

定理 1.1.2 (选择公理用于任意一族集合的 Descartes 积的存在性的证明) 令 $T = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 为一族非空集合. 则 $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ 非空, 其中,

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \{f : I \longrightarrow A \mid (\forall\ \alpha \in I)\ f(\alpha) \in A_\alpha\}, \quad A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha.$$

证明 尽管当 I 有限时, 显然 $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ 非空, 而且当 I 可数无限时, 利用数学归纳法也可证得 $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ 非空. 总之, 在 I 可数时不需要选择公理; 但是, 在这里, 我们还是将 I 统一在一起, 给出如下的一般性证明.

定义

$$\begin{aligned} g:\ \ & I \longrightarrow T, \\ & \alpha \longmapsto A_\alpha. \end{aligned}$$

根据选择公理, 存在选择函数 $\varphi : T \longrightarrow A$. 今令 $f = \varphi g : I \longrightarrow A$, 即下面的交换图 (图 1.1) 成立.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, shift left=6, "\circlearrowleft"] & & T \arrow[dl, "\varphi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

图 1.1

则关于任意 $\alpha \in I$, 有

$$f(\alpha) = \varphi(g(\alpha)) = \varphi(A_\alpha) \in A_\alpha (\subseteq A),$$

从而 $f \in \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$, 即 $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ 非空. □

相对于自然数集上的数学归纳法, 借助于良序公理, 被良序化的任意集合上可以建立起作为其推广的超限归纳法.

定义 1.1.8 令 A 为一全序集, $a \in A$. 称

$$S(a) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{x \in A \mid x < a\}$$

为 A 的前段.

定理 1.1.3 (超限数学归纳法原理) 若 B 为良序集 $A \stackrel{\mathrm{d}}{=} (A, \leqslant)$ 的一个子集, 且关于任意 $a \in A$, 有蕴涵关系

$$S(a) \subseteq B \Longrightarrow a \in B,$$

则 $B = A$.

证明 由条件知, A 的最小元在 B 中 (因为 $\varnothing \subseteq B$), 因此, B 不为空集. 若 $B \neq A$, 即 $A - B \neq \varnothing$, 则存在最小元 $a \in A - B$. 由最小元和 $A - B$ 的定义知,

$$\{c \in A \mid c < a\} \subseteq B.$$

又根据假设, $a \in B$, 从而

$$a \in B \cap (A - B) = \varnothing,$$

矛盾. 因此, $B = A$. □

推论 1.1.1 如果有一命题 $E(a)$ 与一良序集 $A \stackrel{\mathrm{d}}{=} (A, \leqslant)$ 的每一个元素 a 相联系, 那么, 若

(1) $E(a_0)$ 成立, 其中 a_0 为 A 的最小元; 而且

(2) 关于任意元素 $a \in A$, $E(x)$ 关于所有 $x \in S(a)$ 都成立蕴涵 $E(a)$ 成立,

则根据超限数学归纳法原理, $E(x)$ 关于所有 $x \in A$ 都成立.

下面的事实是超限归纳法的一个应用.

定理 1.1.4 (Zermelo 定理) 令 $A \stackrel{\mathrm{d}}{=} (A, \leqslant)$ 为一良序集. 若 f 为 A 上一严格保序变换, 即

$$a > b \Longrightarrow f(a) > f(b),$$

则关于任意 $x \in A$, $f(x) \geqslant x$.

证明 (应用良序公理) 令 a_0 为 A 的最小元. 显然 $f(a_0) \geqslant a_0$. 假设关于任意 $a \in A$, 当 $x < a$ 时, $f(x) \geqslant x$, 下证 $f(a) \geqslant a$. 若 $b \stackrel{\mathrm{d}}{=} f(a) < a$, 则由假设知, $f(b) \geqslant b$. 又由 f 的严格保序性知, $f(a) > f(b)$, 从而

$$b = f(a) > f(b) \geqslant b,$$

矛盾. 因此 $f(a) \geqslant a$. 根据超限归纳法原理, 结论成立. □

注 1.1.2 Zermelo 定理的逆定理不成立; 在全序集上, 一般地, Zermelo 定理不成立.

1.2 集合间的映射和集合上的等价关系

1.2.1 涉及映射 (变换) 的若干基本事项的回顾和罗列

映射的定义见高等代数教材, 这里不再赘述. 首先, 给出关于映射的几个常用记法.

令 A, B 为两个集合, $f: A \longrightarrow B$ 为一映射, 称

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im} f \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{f(a) \mid a \in A\},\\&\operatorname{Ker} f \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{(a_1, a_2) \subseteq A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\},\\&f^{-1}(b) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{a \in A \mid f(a) = b\},\\&f^{-1}(B_1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in B_1\}\end{aligned}$$

分别为 f 的像、f 的核、b 在 f 下的完全原像和 B_1 在 f 下的完全原像, 其中 $b \in B, B_1 \subseteq B$. $\operatorname{Im} f$ 有时也写成 $f(A)$.

定义 1.2.1 令 A, B 为两个集合, $f: A \longrightarrow B$ 与 $g: B \longrightarrow C$ 为两个映射. 称映射

$$\begin{aligned}h:\ A &\longrightarrow C,\\a &\longmapsto g(f(a))\end{aligned}$$

为 f 与 g 的合成, 记为 $h = g \circ f$ (有时也记为 $h = gf$).

显然, 这一合成是满足结合律的.

定义 1.2.2 令 $f: A \longrightarrow B$ 为一映射. 称 f 为一单射 (满射; 双射), 如果

$$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b), \text{即 } (\forall\, b \in B)\ |f^{-1}(b)| \leqslant 1$$

$$\Big(\operatorname{Im} f = B, \text{即 } (\forall\, b \in B)\ |f^{-1}(b)| \geqslant 1;$$

$$f \text{ 既是单射又是满射}\Big).$$

推论 1.2.1 令 A 为一有限集, f 为 A 上的一个变换. 则 f 为一单射当且仅当 f 为一满射.

换句话说, 当 A 为一无限集时, A 上有单不满的变换, 或满不单的变换. 实际上, 利用良序公理可以证明, 任一无限集上, 既有单不满的变换, 又有满不单的变换. 下面给出一个具体的例子.

例 1.2.1 令 $\mathbb{F}[x]$ 为一数域 $\mathbb{F}$ 上全体一元多项式构成的集合. 则

$$\begin{aligned}\varphi:\ \mathbb{F}[x] &\longrightarrow \mathbb{F}[x],\\f(x) &\longmapsto f'(x)\end{aligned}$$

为 $\mathbb{F}[x]$ 上一满但不单的变换. 而

$$\begin{aligned}\psi:\ \mathbb{F}[x] &\longrightarrow \mathbb{F}[x],\\f(x) &\longmapsto xf(x)\end{aligned}$$

为 $\mathbb{F}[x]$ 上一单但不满的变换.

下面的定理是容易证明的.

定理 1.2.1 令 $f: A \longrightarrow B$ 为一映射. 则

(1) f 为一单射 $\Longleftrightarrow$ $(\exists\, g: B \longrightarrow A)\ g \circ f = 1_A$;

(2) f 为一满射 $\Longleftrightarrow$ $(\exists\, g: B \longrightarrow A)\ f \circ g = 1_B$;

(3) f 为一双射 $\Longleftrightarrow$

$$(\exists\, g_1: B \longrightarrow A, g_2: B \longrightarrow A)\ g_1 \circ f = 1_A, f \circ g_2 = 1_B. \tag{1.1}$$

定义 1.2.3 令 $f: A \longrightarrow B$ 为一映射. 称 f 为可逆的, 如果

$$(\exists\, g: B \longrightarrow A)\ g \circ f = 1_A, \quad f \circ g = 1_B.$$

推论 1.2.2 令 $f: A \longrightarrow B$ 为一映射. 则 f 为可逆的当且仅当 f 为一双射.

(式 (1.1) 中的 g_1 与 g_2 实际上是相等的.)

1.2.2 集合上的等价关系和集合的分划

定义 1.2.4 令 A 为一非空集, σ 为 A 上一个二元关系. 称 σ 为集合 A 上的一个等价关系, 如果它满足

(1) 自反性: $(\forall\, a \in A)\ a\sigma a$;

(2) 对称性: $a\sigma b \Longrightarrow b\sigma a$;

(3) 传递性: $a\sigma b\ \&\ b\sigma c \Longrightarrow a\sigma c$.

A 上全体等价关系构成的集合记为 $\mathscr{E}(A)$.

与偏序关系一样, 定义等价关系的三个性质相互独立 (请读者举例指出, 其中任意两个推不出另一个).

映射 $f: A \to B$ 的 $\mathrm{Ker} f$ 显然是 A 上的一个等价关系. 下面的例子给出了某些集合上的若干等价关系.

例 1.2.2 令 A 为一非空集. A 上的相等关系 ι_A 和泛 (全) 关系 $\omega_A \overset{\mathrm{d}}{=} A \times A$ 都为 A 上的等价关系. 它们分别为 A 上的最小等价关系和最大等价关系.

容易验证下面推论成立.

推论 1.2.3 令 A 为一非空集, $\sigma, \tau \in \mathscr{E}(A)$. 则 $\sigma \cap \tau \in \mathscr{E}(A)$, 即 $\cap$ 为 $\mathscr{E}(A)$ 上的一个二元运算.

应该注意到, 等价关系的 $\cup$(并) 和 $\circ$(二元关系的通常合成) 未必是等价关系. 例如, 令 $A = \{1, 2, 3, 4\}$. 则显然

$$\sigma_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\},$$

$$\sigma_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (3,2)\}$$

是 A 上的两个等价关系. 但

$$\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$$

不是 A 上的等价关系, 因为 $(1,2)$, $(2,3)\in\sigma_1\cup\sigma_2$, 但 $(1,3)\notin\sigma_1\cup\sigma_2$, 不满足传递性.

关于 $\circ$ 未必是等价关系的反例, 见例 2.2.3 的 (4).

定义 1.2.5 令 A 为一非空集, $\sigma\in\mathscr{E}(A)$, $a\in A$. 记

$$a\sigma \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{b\in A \mid b\sigma a\}.$$

容易知道, $a\sigma$ 为 A 的一个满足下列条件的子集:

(1) $a\in a\sigma$;

(2) $(\forall\, b,c\in a\sigma)\ b\sigma c$;

(3) $a\sigma$ 为 A 的满足 (1), (2) 的极大子集.

称 $a\sigma$ 为 a 所在的 σ 等价类 (或 σ-类).

推论 1.2.4 令 A 为一非空集, $S\subseteq A$, $\sigma\in\mathscr{E}(A)$. 则

(1) $a\sigma b \Longleftrightarrow a\sigma = b\sigma$;

(2) $a\sigma\cap b\sigma\neq\varnothing \Longleftrightarrow a\sigma=b\sigma$;

(3) $\sigma|_S = S\times S \Longleftrightarrow (\exists\, a\in A)\ S\subseteq a\sigma$.

定义 1.2.6 令 A 为一非空集, $\sigma\in\mathscr{E}(A)$,

$$A/\sigma \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{A_i \mid i\in I\}$$

为 A 上全体 σ-类构成的集合. 根据选择公理,

$$C_\sigma \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{a_i\in A_i \mid i\in I\}$$

存在, 称其为 σ 的一个截面.

因此, A/σ 也写成 $\{a_i\,\sigma \mid a_i\in C_\sigma\}$, 或 $\{a_i\,\sigma \mid i\in I\}$, 称其为 A 关于等价关系 σ 的商集.

显然, 关于 A 的任意子集 C, C 为等价关系 σ 的一个截面当且仅当

(1) $(\forall\, a\in A)(\exists\, c\in C)\ a\sigma c$;

(2) $(\forall\, a,b\in C)\ a\neq b \implies a\sigma\neq b\sigma$.

商集 $A/\sigma=\{a_i\ \sigma \mid a_i\in C_\sigma\}$ 有下列性质:

I. (1) $(\forall\, i\in I)\ a_i\sigma\neq\varnothing$;

(2) $a_i\sigma\cap b_j\sigma=\varnothing, i,j\in I, i\neq j$;

(3) $A=\bigcup_{i\in I} a_i\sigma$.

II. $\sigma=\bigcup_{i\in I}(a_i\sigma\times a_i\sigma)$.

例 1.2.3 令 $\mathbb{F}$ 为一数域, $\sim_1$ 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的一个二元关系, 其中

$$A\sim_1 B \Longleftrightarrow B=PAQ,\quad P,Q \text{ 为 } \mathbb{F}^{n\times n} \text{ 中的可逆矩阵}.$$

则 $\sim_1$ 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的一个等价关系, 且

$$\{E_n^{(0)},E_n^{(1)},\cdots,E_n^{(n)}=E_n\}$$

构成 $\sim_1$ 的一个截面 $C_{\sim_1}$, 其中, $E_n^{(r)}$ 为秩为 r 的 n 阶矩阵的等价标准形, $r=0,1,\cdots,n$.

例 1.2.4 令 $\sim_2$ 为 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的一个二元关系, 其中

$$A \sim_2 B \Longleftrightarrow B = P^{-1}AP,\ P \text{ 为 } \mathbb{C}^{n\times n} \text{ 中的可逆矩阵}.$$

则 $\sim_2$ 为 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的一个等价关系 (这就是我们熟知的矩阵的相似关系), 且

$$\{J \mid J \text{ 为 } \mathbb{C} \text{ 上的 } n \text{ 阶 Jordan 标准形}\}$$

构成 $\sim_2$ 的一个截面 $C_{\sim_2}$.

例 1.2.5 令 $\sim_3$ 为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的一个二元关系, 其中

$$A \sim_3 B \Longleftrightarrow B = P'AP, \quad P \text{ 为 } \mathbb{R}^{n\times n} \text{ 中的可逆矩阵}.$$

则 $\sim_3$ 为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的一个等价关系 (这就是我们熟知的矩阵的合同关系), 且

$$\left\{ \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix} \,\middle|\, r = 0,1,2,\cdots,n, \quad p = 0,1,2,\cdots,r \right\}$$

构成 $\sim_3$ 的一个截面 $C_{\sim_3}$.

定义 1.2.7 令 A 为一非空集. 称 A 的子集族 $\pi \overset{\mathrm{d}}{=} \{A_i \mid i \in I\}$ 为 A 的一个分划, 如果

(1) $(\forall\, i \in I)\ A_i \neq \varnothing$;

(2) $A_i \cap A_j = \varnothing, i, j \in I, i \neq j$;

(3) $A = \bigcup_{i\in I} A_i$.

A 的全体分划构成的集合记为 $\Pi(A)$.

关于映射 $f: A \to B$, 显然, $\{f^{-1}(b) \mid b \in \mathrm{Im}\, f\}$ 为 A 的一个分划.

令 σ 为 A 上一等价关系. 则商集 A/σ 显然构成 A 的一个分划, 记为 π_σ , 称 π_σ 为等价关系 σ 确定的分划. 反之, 令 $\pi = \{A_i \mid i \in I\}$ 为非空集 A 的一个分划. 则 $\sigma_\pi \overset{\mathrm{d}}{=} \bigcup_{i\in I}(A_i \times A_i)$ 为 A 上一等价关系, 称 σ_π 为分划 π 所确定的等价关系.

推论 1.2.5 $\sigma_{\pi_\sigma} = \sigma,\ \pi_{\sigma_\pi} = \pi$.

推论 1.2.6 令 A 为一非空集. 则映射

$$\begin{aligned} \eta:\ \mathscr{E}(A) &\longrightarrow \Pi(A), \\ \sigma &\longmapsto \pi_\sigma \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} \xi:\ \Pi(A) &\longrightarrow \mathscr{E}(A), \\ \pi &\longmapsto \sigma_\pi \end{aligned}$$

为一对互逆的映射. 因此, 它们都为双射.