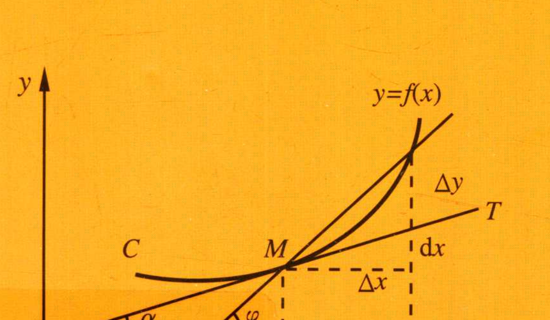
普通高等教育“十三五”规划教材

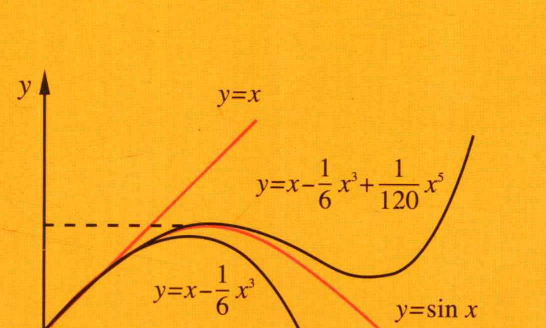
大学数学基础丛书
丛书主编 袁学刚 周文书 刘 满

微积分学习指导

（上册）

王金芝 齐淑华 主编





清华大学出版社

大学数学基础丛书

微积分学习指导

（上册）

王金芝　齐淑华　主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本学习指导是与我们编写的教材《微积分》配套辅导用书. 书中按教材章节顺序编排，与教材保持一致. 全书共 5 章，每章又分 4 个板块，即大纲要求与重点内容、内容精要、题型总结与典型例题、课后习题解答，以起到同步辅导的作用，帮助学生克服学习中遇到的困难.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导. 上册 / 王金芝，齐淑华主编. —北京：清华大学出版社，2018
(大学数学基础丛书)
ISBN 978-7-302-51396-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①王… ②齐… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 228433 号

责任编辑：刘 颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：董 瑾

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：15.25 **字 数**：488 千字
版 次：2018 年 12 月第 1 版 **印 次**：2018 年 12 月第 1 次印刷
定 价：36.00 元

产品编号：077724-01

前言 PREFACE

本学习指导是与我们编写的教材《微积分》配套的辅导用书.

微积分是高等院校的重要基础课之一，它不仅是后续课程学习及在各个学科领域中进行研究的必要基础，而且对学生综合能力的培养起着重要的作用，同时更是考研数学试题的重要组成部分. 为更好地指导学生学好这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决问题的能力，我们组织编写此书. 本书按教材章节顺序编排，与教材保持一致. 全书共 5 章，每章又分 4 个板块，即大纲要求及重点内容、内容精要、题型总结与典型例题、课后习题解答，对现行教材逐章逐节同步辅导. 各板块具有以下特点：

1. 大纲要求及重点内容部分列出了国家教学大纲对本章内容的基本要求，帮助同学们明确本章应该掌握的数学概念及相关知识.

2. 内容精要部分对每章的内容都给出了简明的摘要，用以帮助读者理解和记忆本书中的主要概念、结论和方法，对本章有一个全局性的认识和把握.

3. 题型总结与典型例题部分，选取了近几年的考研题和竞赛题作为例题，并进行了详细的解答. 每种题型的解法都具有代表性. 读者可以通过典型例题既对这部分知识消化理解，掌握了常见的解题方法与技巧，又扩充了知识面，同时也做到举一反三，触类旁通.

4. 课后习题解答部分，是对《微积分》一书的课后习题的详细解答，用以帮助读者在完成课后习题遇到困难时参考、查阅. 对于课后习题，希望读者在学习过程中，先独立思考，自己动手解题，然后再对照检查，不要依赖于解答.

本书既是大学本科学生学习微积分有益的参考用书，又是有志考研同学的良师益友，相信通过对本书的系统阅读，会对学好微积分有很大帮助.

本书由大连民族大学理学院组织编写，由王金芝、齐淑华主编，参加编写的有刘强、张誉铎、李娇. 理学院领导和同事们对本书的编写提出了宝贵的意见和建议，在此表示感谢.

由于作者水平有限，难免有疏漏、不足或错误之处，敬请同行和广大读者指正.

编　者

2018 年 6 月

目录 CONTENTS

1.2 内容精要

1. 函数

(1) 函数的概念

① **函数** 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫做自变量，y 叫做因变量，数集 D 叫做这个函数的定义域.

一个函数当它的定义域及对应法则确定后，这个函数就确定了，所以，定义域和对应法则称为函数的**两要素**.

注：两个函数的定义域及对应法则相同，则这两个函数相同，而与自变量用什么表示无关. 如 $y=\sin x$ 与 $y=\sin t$ 是相同的函数.

② **定义域** 函数的定义域就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的自变量 x 的全体取值所组成的集合，记作 $D(f)$. 在实际问题中，函数的定义域往往由问题的实际意义来确定.

(2) 函数的基本性质

① **有界性** 设数集 X 是函数 $f(x)$ 的定义域的一个子集. 如果存在常数 M，使得：

- 对于任意 $x\in X$，有不等式 $f(x)\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有上界**.
- 对于任意 $x\in X$，有不等式 $f(x)\geqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有下界**.
- 对于任意 $x\in X$，有不等式 $|f(x)|\leqslant M$（这里 $M>0$）成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**.
- 若对任意的 $M>0$，都存在 $x\in X$，有 $|f(x)|\geqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

注 有界函数 $f(x)$ 在 X 上的图像夹在两条平行线 $y=M$，$y=-M$ 之间.

② **单调性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于 I 内任意两点 x_1，x_2，若：

- 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内是单调增加的.
- 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内是单调减少的.

注 单调增加函数的图像从左往右是上升的；单调减少函数的图像从左往右是下降的.

③ **奇偶性** 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果：

- 对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；
- 对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

注 奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

④ **周期性** 对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 T，使得对于定义域内的任何 x，$x\pm T$ 仍在定义域内，且关系式 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数. T 称为它的一个周期.

注 函数的周期是指它的最小正周期；周期为 T 的周期函数的图像，在长度为 T 的任何区间上有相同的形状.

(3) 复合函数

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 在数集 D_2 上有定义，对应的值域 $W_2=\{u\,|\,u=\varphi(x),x\in D_2\}$，并且 $W_2\subset D_1$，那么对于每个数值 $x\in D_2$，有确定的数值 $u\in W_2$ 与 x

值对应.由于这个值 u 也属于函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1,因此有确定的值 y 与值 u 对应,这样对于每个数值 $x\in D_2$,通过 u 有确定的数值 y 与 x 对应,从而得到一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,而 u 称为中间变量.

注 不是任意两个函数都能复合成一个复合函数的.复合函数可以有多个中间变量.

将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中的运算就是函数的复合运算;从复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 中分解出 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的运算就是分解复合步骤的运算.

函数的复合运算是不同于函数的四则运算及其他运算的一种独特的运算,它具有内层函数与外层函数环环相扣的所谓"函数的函数"这样一个特征,所以分清中间变量与自变量是理解和解决复合函数问题的关键,对于一元函数和多元函数都是如此.

(4) 反函数

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,对应的函数值集合为 $Y=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$,如果对于每个数 $y\in Y$,按照对应法则 $f(x)=y$,在 I 中有唯一的数 x 与 y 对应,则称这样得到的函数为 $y=f(x)$ 在区间 I 上的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,或按字母使用习惯记为 $y=f^{-1}(x)$.而 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

注 反函数定义域和值域与直接函数的值域和定义域对应相等.互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(5) 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

(6) 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成,并且可以用一个式子表示的函数,叫做初等函数.是否为初等函数主要取决于函数中的运算是否为四则运算和复合运算,并且运算的次数是否为有限次.

(7) 分段函数

在定义域的不同部分用不同的解析式来表示的函数就是分段函数.由于分段函数是一个函数,所以它的定义域是各段定义域的并集.讨论分段函数时,还要特别注意在相邻两段分段点处函数是如何定义的.

(8) 常见的经济函数

收入函数 $R=R(x)$,成本函数 $C=C(x)$,利润函数 $L=L(x)=R(x)-C(x)$,需求函数 $x=x(P)$,供应函数 $Q=Q(P)$ 都是常见的经济函数,其中 x 表示产(销)量,P 表示价格,每个具体的经济函数要根据实际的经济问题来确定.

2. 极限

(1) 数列极限、函数极限定义(略)

(2) 无穷小与无穷大

无穷小 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$),就称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷小.

注 ① 无穷小是以 0 为极限的变量.

② 说到无穷小,必须指明自变量的变化过程.

③ 无穷小与绝对值很小的数不能混为一谈.

④ 零是唯一可以作为无穷小的常数.

无穷大

① 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷大.

② 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为正无穷大.

③ 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为负无穷大.

注 ① 无穷大是变量.

② 说到无穷大,必须指明自变量的变化过程.

③ 无穷大与绝对值很大的数不能混为一谈.

等价无穷小代换 若 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

这表明,求两个无穷小之比的极限时,可以用等价无穷小来代替.

(3) 函数的连续性

① 连续的定义

定义1 记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,称为 $f(x)$ 在 x_0 的增量,若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

定义2 设 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 处连续,x_0 称为 $f(x)$的连续点.

注 ①连续函数的图像是一条连续不间断的曲线. ②一般的证明性命题用函数连续的第一个定义较方便;判断函数在某点连续,尤其是判断分段函数在分段点处是否连续用定义2较方便.

② 单侧连续

- 若 $f(x)$在点 x_0 的某个左邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 点左连续;
- 若 $f(x)$在点 x_0 的某个右邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 点右连续.

$f(x)$在 x_0 点连续的充要条件是 $f(x)$在 x_0 点既左连续,又右连续,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

区间上连续 若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点处都连续,则称 $f(x)$在(a,b)内连续;若 $f(x)$在(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,则称 $f(x)$在$[a,b]$上连续.

③ 间断点

定义 若 $f(x)$在 x_0 处出现以下3种情形之一:

- $f(x)$在 x_0 处无定义;
- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处间断，称 x_0 为 $f(x)$的间断点.

间断点的类型 设 x_0 为 $f(x)$的间断点.

第一类间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在，$x_0$ 称为 $f(x)$的第一类间断点. 第一类间断点分为可去与跳跃两类：

- 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在且**相等**.
- 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在但**不相等**.

第二类间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$中至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$的第二类间断点.

- 无穷间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$中至少有一个极限为无穷大.
- 振荡间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$中至少有一个极限不存在且振荡.

3. 重要公式和定理

(1) 重要公式

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

推广 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$，　$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$，　$\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

② **抓大头公式** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m}{b_0x^n}=\begin{cases}\infty, & m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\ m,n>0.\\ 0, & m<n,\end{cases}$

何谓“抓大头”，即分子分母都抓最大那一项，同一数量级的认为不能忽略.

③ 常用极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$；　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；　$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$；　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>0)$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=\infty$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$；　$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{x}}=0$；　$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{a^x}=0(a>0,p>0)$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；　$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$；　$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$.

④ **无穷小的比较** 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta(x)=0$.

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0, & \text{则称 }\alpha(x)\text{ 是 }\beta(x)\text{ 的高阶无穷小，记为 }\alpha(x)=o(\beta),\\ \infty, & \text{则称 }\alpha(x)\text{ 是 }\beta(x)\text{ 的低阶无穷小，}\\ C(C\neq 0), & \text{则称 }\alpha(x)\text{ 是 }\beta(x)\text{ 的同阶无穷小，}\\ 1, & \text{则称 }\alpha(x)\text{ 是 }\beta(x)\text{ 的等价无穷小，记为 }\alpha(x)\sim\beta(x).\end{cases}$

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C(C\neq 0)$，$k>0$，则称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的 k 阶无穷小.

⑤ **无穷小的阶的运算法则**

若 $x\to 0$,则:

- $m>n, o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n), o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$;
- $o(kx^n)=o(x^n)$;
- $x^m o(x^n)=o(x^{m+n})$;
- 若 $\varphi(x)$ 有界时,则 $\varphi(x)o(x^n)=o(x^n)$;
- $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$.

⑥ **关于等价无穷小**

- 当 $x\to 0$ 时,$x^n+x^m\sim x^{\min\{m,n\}}$;
- 当 $\varphi(x)\to 0$ 时,$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

例如,当 $x\to 0$ 时,$x^3=o(3x)$,则 $x^3+3x\sim 3x$;$1-\cos x=o(x)$,则 $x+(1-\cos x)\sim x$.

- 当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$,

$e^x-1\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

当 $x\to 0^+$ 时,$x^x-1=e^{x\ln x}-1\sim x\ln x$.

当 $x\to 1$ 时,$\ln x\sim x-1$.

- 推广 将上面的 x 都换成 $\varphi(x)$ 等价仍成立,即当 $\varphi(x)\to 0$ 时

$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x)$,

$a^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)\ln a$, $\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$, $e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$,

$(1+\varphi(x))^\alpha-1\sim\alpha\varphi(x)$, $1-\cos\varphi(x)\sim\frac{1}{2}\varphi(x)^2$.

当 $\varphi(x)\to 1$ 时,$\ln\varphi(x)\sim\varphi(x)-1$.

- 更进一步的等价我们也经常用,求极限时更简便(由第 3 章的泰勒公式可推导下面的等价关系).

当 $x\to 0$ 时

$\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3$; $\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3$;

$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$; $\arctan x-x\sim-\frac{1}{3}x^3$;

$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$; $e^x-1-x\sim\frac{1}{2}x^2$; $\ln(1+x)-x\sim-\frac{1}{2}x^2$.

将上面的 x 都换成 $\varphi(x)$ 等价关系仍成立.

⑦ **求两个无穷小比的极限时,可用等价无穷小的代换**

设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也存在,且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

这是因为 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\frac{\beta}{\beta'}\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

在求无穷小比的极限,而分子或分母为两个无穷小的和或差时,可用等价无穷小代换:

设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,若:

$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} \neq 1$,则在求极限时可用等价无穷小代换 $\alpha-\beta \sim \alpha'-\beta'$;

$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} \neq -1$,则在求极限时可用等价无穷小代换 $\alpha+\beta \sim \alpha'+\beta'$.

例如,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x-\sin x}{\ln(1+5x)-(e^x-1)}$. 因为

$$\tan 3x \sim 3x, \sin x \sim x, \ln(1+5x) \sim 5x, e^x-1 \sim x,$$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3\neq 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5\neq 1$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x-\sin x}{\ln(1+5x)-(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-x}{5x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}.$$

(2) 数列极限的性质及判定

收敛数列的性质:

① 若$\{x_n\}$收敛,则其极限唯一;

② 若$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$有界,其逆不真.

收敛数列的判别法:

① 单调有界数列$\{x_n\}$必有极限;

② 夹逼定理 设存在自然数 N,当 $n>N$,恒有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,若$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=l$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$.

(3) 函数极限的重要定理

定理 1(常用于判别函数的连续性) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

定理 2(常用于极限的证明或计算中) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

定理 3(函数极限的保号性定理) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $A>0$(或 $A<0$),则存在一个 $\delta>0$,当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x\neq x_0$ 时,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 4(函数极限的保号性定理的逆定理) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

定理 5(夹逼准则,常用于求极限) 设在 x_0 的邻域内,恒有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

定理 6(无穷小的运算性质及规律)

① 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;

② 有限个无穷小的乘积仍为无穷小;

③ 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小;

④ $\lim f(x)g(x)=A$ 且 $\lim g(x)=\infty$,则 $\lim f(x)=0$;

⑤ $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=A$ 且 $\lim g(x)=0$,则 $\lim f(x)=0$.

定理 7(无穷小与无穷大的关系定理) 在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大;反之,如果 $f(x)$ 为无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小.

定理 8（初等函数的连续性） 初等函数在其定义域子区间上连续.

定理 9（闭区间上连续函数的性质）

① **（连续函数的有界性）**若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界；

② **（最值定理）**若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上 $f(x)$能取得最大值与最小值；

③ **（介值定理）**若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 μ 介于 $f(a)$，$f(b)$之间，则在$[a,b]$上存在 ξ 使得 $f(\xi)=\mu$；

④ **（零点存在定理或根的存在定理）**若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

1.3 题型总结与典型例题

重点题型 1. 求函数的极限；2. 无穷小的比较与阶的确定；3. 极限中常数的确定；4. 判断函数的连续性及间断点的类型，特别是分段函数在分段点处的连续性；5. 闭区间上连续函数的零点定理和介值定理.

1. 函数及其性质

题型 1-1 函数的定义域

【解题思路】 求函数的定义域时，一般要根据分母不为零，负数不能开偶次方、负数和零无对数，$k\pi$ 无余切，$k\pi\pm\frac{\pi}{2}$无正切，以及绝对值大于 1 时无反正弦和反余弦等原则列出不等式(组)，求得其解即为所求函数的定义域.

例 1.1 求函数 $f(x)=\lg(4-x)+\sqrt{x^2+3x-10}$的定义域.

解 依题意$\begin{cases}4-x>0,\\ x^2+3x-10\geqslant 0,\end{cases}$解之得 $2\leqslant x<4$，即函数的定义域为$\{x\mid 2\leqslant x<4\}=[2,4)$.

例 1.2 设 $f(x)$的定义域为$[0,3]$，求 $g(x)=f(\tan^2 x)$的定义域.

解 因为 $f(x)$的定义域为$[0,3]$，所以 $0\leqslant\tan^2 x\leqslant 3$，由 $\tan^2 x\leqslant 3$，得到$-\sqrt{3}\leqslant\tan x\leqslant\sqrt{3}$，因而 $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\tan x\leqslant\tan\frac{\pi}{3}$.

由 $\tan x$ 的周期性，得 $g(x)$的定义域为$\left\{x\,\middle|\,k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}\right\}$.

例 1.3 函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求 $f(a+x)+f(a-x)(a>0)$的定义域.

解 因为函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，故函数 $f(a+x)+f(a-x)$的 x 应满足

$$\begin{cases}0\leqslant a+x\leqslant 1,\\ 0\leqslant a-x\leqslant 1,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a-1\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

因为 $a>0$，所以有 $-a<a$. 当 $a-1\leqslant 1-a$ 时，上面的不等式组有解，否则无解，即当 $0<a\leqslant 1$ 时，不等式组有解.

当$-a\leqslant a-1$，即$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$ 时，不等式组的解如图 1-1(a)所示，函数的定义域为$[a-1,$

$1-a]$. 当 $-a \geqslant a-1$, 即 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 不等式组的解如图 1-1(b)所示, 函数的定义域为 $[-a, a]$.

(a) (b)

图 1-1

题型 1-2 函数概念的理解

【解题思路】 函数关系式的确定只取决于函数的定义域和函数对应关系, 定义域和对应法则相同表示同一函数.

例 1.4 (1) 函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 是否为同一函数.

(2) 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否为同一函数.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} 3^x, & x \geqslant 1, \\ \arcsin x, & -1<x<1, \\ 1+x, & x \leqslant -1, \end{cases}$ 求 $f(-3), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(2)$.

解 (1) 是. 由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $-1<x<1$, 对应法则也相同, 所以它们是同一函数.

(2) 不是. 虽然 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 但它们的对应法则不一样, 所以它们不是同一函数.

(3) $f(-3)=1+(-3)=-2$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$, $f(2)=3^2=9$.

题型 1-3 函数的简单性态的判别

【解题思路】 函数的奇偶性和周期性是在定义域上讨论的, 而单调性和有界性是在有定义的某区间上讨论的.

例 1.5 设 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+5}$, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

证明 因为 $|f(x)|=\left|\dfrac{x^2+3}{x^2+5}\right| \leqslant 1+\left|\dfrac{2}{x^2+5}\right| \leqslant 1+\dfrac{2}{5}=\dfrac{7}{5}$, 所以 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+5}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

例 1.6 证明函数 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 内单调增加.

证明 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, 不妨设 $x_1<x_2$, 则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0, \text{即 } f(x_1)<f(x_2),$$

故函数 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 内单调增加.

例 1.7 设 $f(x)$ 是周期为 6 的奇函数, 且 $f(x)=x^2-2x \quad x \in [0,3]$, 求 $f(11)$.

解 $f(11)=f(5+6)=f(5)=f(-1+6)=f(-1)=-f(1)=-(1^2-2\times 1)=1$.

题型 1-4 求复合函数

【解题思路】 函数的复合运算是不同于函数的四则运算及其他运算的一种独特运算，它具有内层函数与外层函数环环相扣的所谓“函数的函数”这样一种特征，所以分清中间变量与自变量是理解和解决复合函数问题的关键.

例 1.8 将下列函数拆开成若干基本初等函数：

(1) $y=\sin^3(1+2x)$； (2) $y=10^{(2x-1)^2}$.

解 (1) $y=u^3, u=\sin v, v=1+2x$； (2) $y=10^u, u=v^2, v=2x-1$.

例 1.9 设 $y=f(u)=\arctan u, u=\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}, t=\phi(x)=x^2-1$，求 $f\{\varphi[\phi(x)]\}$.

解 由题意得 $\varphi(\phi(x))=\dfrac{1}{\sqrt{\phi(x)}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，故 $f\{\varphi[\phi(x)]\}=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

例 1.10 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，令 $u=x+\dfrac{1}{x}$，则 $f(u)=u^2-2$，故 $f(x)=x^2-2$.

题型 1-5 分段函数

【解题思路】 讨论分段函数时，要注意自变量变化的每一段上的函数关系.

例 1.11 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ x^2+\ln x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(1-x), f(x-1)$.

解 $f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & 1-x\leqslant 0,\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & 1-x>0,\end{cases}$ 即

$$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & x\geqslant 1,\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & x<1.\end{cases}$$

类似地 $f(x-1)=\begin{cases}\sin(x-1), & x\leqslant 1,\\ (x-1)^2+\ln(x-1), & x>1.\end{cases}$

2. 数列的极限

题型 1-6 收敛数列的性质

【解题思路】 收敛的数列极限唯一；收敛的数列有界；收敛数列具有保号性；收敛数列的任何子列都收敛并具有相同的极限. 有界数列不一定收敛；无界数列一定发散. 收敛数列与发散数列的和发散；两个发散数列的和可能收敛也可能发散；收敛数列(极限不为零)与发散数列的积发散.

例 1.12 选择题

(1) 数列收敛是数列有界的( ).

A. 必要条件 B. 充分条件 C. 充要条件 D. 无关条件

(2) 下列数列中收敛的是( ).

A. $\{n\}$ B. $\{(-1)^n\}$ C. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ D. $\{\sin n\}$

解 (1) 选 B； (2) 选 C.

题型 1-7 含根式差的极限计算

【解题思路】 凡函数的表达式中含有 $a+\sqrt{b}$（或$\sqrt{a}+\sqrt{b}$），则在运算前通常要在分子分母乘以其共轭根 $a-\sqrt{b}$（或$\sqrt{a}-\sqrt{b}$），反之亦然，然后再做有关的运算.

例 1.13 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})\right|$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$ （先求根号下的和）

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right] \quad \text{（分子有理化）}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}} \quad \text{（抓大头）}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)&=\lim_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi)+n\pi]\\&=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi) \quad \text{（分子有理化）}\\&=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \quad \text{（等价无穷小代换）}\\&=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})\right|&=\lim_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi)\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)\right|\\&=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\pi\right)\right|=\sin\frac{\pi}{2}=1.\end{aligned}$$

题型 1-8 单调有界必有极限证明数列极限的存在性，并求之，适用于 $x_{n+1}=f(x_n)$.

【解题思路】 由递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$定义的数列的极限问题，一般用单调有界必有极限. 解题步骤：(1)直接对通项进行分析或用数学归纳法验证数列$\{x_n\}$单调有界；(2)设$\{x_n\}$的极限存在，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，将其代入给定的 x_n 的表达式中，则该式变为 l 的代数方程，解之得该数列的极限.

证明数列$\{x_n\}$单调性的常用方法：

(1) 计算差 $d_n=x_{n+1}-x_n$，若 $d_n\leqslant 0$（或 $d_n\geqslant 0$），则$\{x_n\}$单调减少（增加）；

(2) 若 $x_n>0$，计算商 $r_n=\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$，若 $r_n\leqslant 1$（或 $r_n\geqslant 1$），则 $\{x_n\}$ 单调减少（增加）；

(3) 用数学归纳法证明之；

(4) 记 $x_n=f(n)$，若 $f(x)(x\geqslant 1)$ 可导，则 $f'(x)\leqslant 0$（或 $f'(x)\geqslant 0$）时，$\{x_n\}$ 单调减少（增加）.

例 1.14 设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\,(a>0)(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

证明 用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+x_1}>\sqrt{a}=x_1$，知 $x_1<x_2$，即 $n=1$ 时，有 $x_n<x_{n+1}$. 设 $n=k$ 时，不等式 $x_n<x_{n+1}$ 成立. 由 $x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+x_{k+1}}=x_{k+2}$ 可知，$n=k+1$ 时，不等式 $x_n<x_{n+1}$ 也成立，因而对一切的自然数时，不等式 $x_n<x_{n+1}$ 总成立.

又 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$. 设 $n=k$ 时，$x_k<\sqrt{a}+1$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2}=\sqrt{a}+1.$$

可知 $\{x_n\}$ 有界，由单调有界准则可知原数列有极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，等式 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ 两边取极限得 $l=\sqrt{a+l}$，即 $l=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$ $\left(l=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})\text{，与题意不符，舍去}\right)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$.

例 1.15 设 $x_0>0$，$x_n=\dfrac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之.

证明 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 注意到对于一切的 n 恒有

$$x_n=1+\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}>1,\quad x_n=2-\frac{2}{2+x_{n-1}}<2,$$

因此知数列 $\{x_n\}$ 有界. 又

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\left(2-\frac{2}{2+x_n}\right)-\left(2-\frac{2}{2+x_{n-1}}\right)\\&=2\left(\frac{1}{2+x_{n-1}}-\frac{1}{2+x_n}\right)=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_{n-1})(2+x_n)},\end{aligned}$$

故得

$$x_n-x_{n-1}=\frac{2(x_{n-1}-x_{n-2})}{(2+x_{n-2})(2+x_{n-1})},\cdots,x_2-x_1=\frac{2(x_1-x_0)}{(2+x_0)(2+x_1)}.$$

于是可知 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_1-x_0 同号，故当 $x_1>x_0$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递增；当 $x_1<x_0$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递减. 也就是说，数列 $\{x_n\}$ 为单调有界数列，故此单调有界数列必有极限.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$a=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}=\frac{2(1+a)}{2+a},$$

解之得 $a=\sqrt{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

例 1.16 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$，$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.（2018 数三）

证明 (1) 有界性. 由 $x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 得 $e^{x_{n+1}}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$，即 $x_{n+1}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$，从而 $x_2=\ln\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}$.

设 $f(x)=e^x-1-x$，则 $f'(x)=e^x-1>0(x>0)$ 且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 单调递增，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $e^x-1>x(x>0)$，于是 $\dfrac{e^x-1}{x}>1$，故 $\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>1$，即 $x_2=\ln\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>0$，从而 $\forall n\in\mathbf{N}, x_n>0$.

单调性. $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}$.

令 $g(x)=e^x-1-xe^x$，则 $g'(x)=-xe^x<0(x>0)$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，当 $x>0$ 时，$g(x)<g(0)=0$，从而有 $e^x-1<xe^x$，即 $\dfrac{e^x-1}{xe^x}<1$，于是

$$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<0,$$

故 $\{x_n\}$ 单调递减. 于是 $\{x_n\}$ 单调递减有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $ae^a=e^a-1$，解得 $a=0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 1.17 已知 $a>0, x_1>0$，定义

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

解 第一步：证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

注意到，当 $n\geqslant 2$ 时，$x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(x_n+x_n+x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)\geqslant\sqrt[4]{x_n x_n x_n\dfrac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}$，因此数列 $\{x_n\}$ 有下界. 又 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{4}\left(3+\dfrac{a}{x_n^4}\right)\leqslant\dfrac{1}{4}\left(3+\dfrac{a}{a}\right)=1$，即 $x_{n+1}\leqslant x_n$，所以 $\{x_n\}$ 单调递减，由极限存在准则知，数列 $\{x_n\}$ 有极限.

第二步：求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $A\geqslant\sqrt[4]{a}>0$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)$，有 $A=\dfrac{1}{4}\left(3A+\dfrac{a}{A^3}\right)$，解得 $A=\sqrt[4]{a}$（舍掉负根），即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$.

题型 1-9 无限项之和的极限

无限项之和的项数自然随着项数变化而变化，因此不能用和的极限运算法则. 求这类极限的关键是使和的项数不随项数的变化而变化，将和化为有限且易求其极限的形式.

【解题思路一】 先求和，再求极限.

求和时，常用下述求和公式：

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$