山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学
学习辅导与习题解答

主编 朱爱玲 程 涛

GAODENG SHUXUE
XUEXI FUDAO YU XITI JIEDA

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学学习辅导与习题解答

主 编 朱爱玲 程 涛

副主编 徐述声 王德臣 孙胜秋

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导与习题解答/朱爱玲，程涛主编
.—东营:中国石油大学出版社，2017. 5(2018.7 重印)
ISBN 978-7-5636-5546-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①朱… ②程… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 073067 号

书　　名:高等数学学习辅导与习题解答
主　　编:朱爱玲　程　涛

责任编辑:刘玉兰(电话　0532—86981535)
封面设计:赵志勇

出 版 者:中国石油大学出版社
(地址:山东省青岛市黄岛区长江西路 66 号　邮编:266580)
网　　址:http://www.uppbook.com.cn
电子邮箱:eyi0213@163.com
排 版 者:青岛汇英栋梁文化传媒有限公司
印 刷 者:沂南县汶凤印刷有限公司
发 行 者:中国石油大学出版社(电话　0532—86983566)
开　　本:185 mm×260 mm
印　　张:12.5
字　　数:320 千
版 印 次:2017 年 5 月第 1 版　2018 年 7 月第 2 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5636-5546-5
印　　数:2501—5000 册
定　　价:30.80 元

前言
PREFACE

高等数学既是一门必修的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重要科目。为了方便同学们学好王爱云、张燕主编的《高等数学》(乙种本・第三版)，我们编写了《高等数学学习辅导与习题解答》，与该书相配套。在内容编排上，本书与教材——《高等数学》(乙种本・第三版)的章节顺序一致，每章分为基本要求、题型解析、习题选解、提高练习及解答四个部分，有助于学生在课后练习、复习时更好更快地掌握所学知识。

“基本要求”，主要按照教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的高等数学本科教学基本要求确定，并根据教学实际作适当变更，沿用“理解”“了解”或“掌握”“会”的惯例次序表示程度上的差异。

“题型解析”，主要针对学生学习过程中遇到的带有普遍性的问题，以及因为课时限制使教师不能在课堂上讲深、讲透的典型题型给予分析解答和总结。题目选择主要是对基本概念的理解和基本理论、基本方法的掌握应用，较教材例题稍有一些难度。

“习题选解”，主要是选择了教材中相对较难并具代表性的部分习题，给出主要解题方法和步骤。

“提高练习及解答”，题目大多选自历年来研究生入学考试的相关试题，以便准备考研的学生开拓思路、提高应试能力。

本书编写分工：徐述声(第一、二章)，程涛(第三、八章)，朱爱玲(第四、五章)，王德臣(第六、七章)，孙胜秋(第九、十章)。全书由程涛统稿，朱爱玲定稿。

本书的编写与出版得到中国石油大学出版社的指导和帮助，得到山东师范大学教务处、数学与统计学院的大力支持，得到王爱云教授、张燕教授的关心和关照，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥甚至谬误之处，恳请专家和读者批评指正。

编　者

2017 年 2 月

目录

CONTENTS

第一章 函数、极限与连续

第一节 基本要求

1. 理解映射、函数(反函数)、复合函数、初等函数、分段函数的概念;知道函数的二要素;会建立简单实际问题的函数关系;掌握函数的四种特性及基本初等函数的性质、图形等.

2. 理解、掌握极限的概念和性质;理解左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系;了解数列极限与函数极限的关系.

3. 理解无穷小、无穷大的定义及其关系;掌握有极限的函数与无穷小的关系;掌握无穷小量的运算法则,会利用等价无穷小求极限;了解无穷小的阶的有关概念.

4. 掌握极限的性质及四则运算法则和复合函数的极限运算法则;掌握极限存在的准则;熟悉两个重要极限;能熟练应用极限运算法则及两个重要极限求极限.

5. 理解函数连续的概念、函数间断点的概念并会判断其类型,会讨论分段函数在分段点处的连续性;掌握连续函数的四则运算和复合函数的连续性,掌握初等函数的连续性,会利用函数的连续性求极限.

6. 会利用定义讨论函数的连续性;会判断函数的间断点;会应用闭区间上连续函数的性质讨论问题.

第二节 题型解析

题型一 求函数定义域、关系式及其反函数

函数定义域是函数的两要素之一,在研究函数特性之前必须搞清楚其定义域,不能含糊. 反函数也是研究函数时转换角度适当考虑的,有助于我们理解掌握函数及其变化规律.

例1 求函数 $f(x)=\arccos\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$的定义域.

分析 函数定义域就是指满足函数解析式子蕴含的各项约束条件的自变量 x 的取值范围.

解 $\lg\left(\dfrac{x}{10}\right)$的定义域为$\dfrac{x}{10}>0$,即 $x>0$,$\arccos u$ 的定义域为$|u|\leqslant 1$,即$-1\leqslant\lg\left(\dfrac{x}{10}\right)\leqslant 1$,所以函数 $f(x)$的定义域为 $x\in[1,100]$.

例2 设 $f(x)=\begin{cases} x, & -2<x<1, \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 2^x, & 2<x\leqslant 4, \end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

分析 $f(x)$是分段函数,因此,要求分别求出各区间段的反函数及定义区间.

解 由 $y=x$,$-2<x<1$,可得 $x=y$,$-2<y<1$,故其反函数是 $y=x$,$-2<x<1$;由 $y=x^2$,$1\leqslant x\leqslant 2$,可得 $x=\sqrt{y}$,$1\leqslant y\leqslant 4$,故其反函数是 $y=\sqrt{x}$,$1\leqslant x\leqslant 4$;

由 $y=2^x$，$2<x\leqslant4$，可得 $x=\log_2 y$，$4<y\leqslant16$，故其反函数是 $y=\log_2 x$，$4<x\leqslant16$.

所以 $f(x)$ 的反函数是 $y=\begin{cases} x, & -2<x<1; \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant4; \\ \log_2 x, & 4<x\leqslant16. \end{cases}$

例 3　设 $f(x)$ 满足关系式 $2f(x)+x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+x}$，求 $f(x)$.

分析　由于已知 $f(x)$ 和 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的函数关系式，取适当形式建立其他的函数关系式，以便消去两者之中的某一项，从而可得所求函数关系.

解　在原方程中用 $\dfrac{1}{x}$ 代替 x，得 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=\dfrac{1+2x}{1+x}$，利用消元法，消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 项，得 $-3f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-2x-4}{1+x}$，所以 $f(x)=\dfrac{-2x^3-x^2+2x+4}{3(x+1)}$.

题型二　用极限 $\varepsilon\sim\delta$ 定义验证极限

例 1　用极限定义验证 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}=1$.

分析　用"$\varepsilon\sim\delta$"定义验证极限时，δ 的存在性（一般情况下 δ 与 ε 取值有关）是关键，δ 不是唯一的；通过不等式适当"放大"，可使求 δ 的运算更加简便. 值得注意的是，在"放大"时，不应破坏 ε 的任意小性.

证明　对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|<\varepsilon$ 成立，注意到 $x\to2$，因此不妨设 $|x-2|<1$，于是

$$|x+1|=|3+(x-2)|\leqslant3+|x-2|<4,\quad |x+2|=|4+(x-2)|\geqslant4-|x-2|>3,$$

从而有不等式

$$\left|\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|=\left|\frac{(x-2)(x+1)}{x+2}\right|\leqslant\frac{4}{3}|x-2|,$$

因此可取 $\delta=\min\left(1,\dfrac{3\varepsilon}{4}\right)$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，总有 $\left|\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|<\varepsilon$，极限得证.

题型三　求极限的运算

(1) 对于求和、差、积、商形式的极限，要运用极限的四则运算法则，应用时要注意下面几点：

① 法则是在参加运算的各函数极限存在的条件下成立的.

② 在运用商的运算法则时，分母极限不能为零.

③ 使用法则前往往需要通过恒等变形将函数作适当的化简，常用的方法有因式分解、约分或通分、分子或分母有理化、三角函数恒等式、利用某些求和/求积公式以及适当的变量替换等.变形或变换后的函数不同，但它们在相应自变量变化过程中的极限相同.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

分析　本题因为分子、分母当 $x\to3$ 时极限均为零，所以属于 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，不能直接用商的运算法则，应当先有理化，再约去分子、分式中的零因式.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+13-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=-\frac{1}{16}.$$

(2) 利用两个重要极限，若所求极限类型是$\dfrac{0}{0}$型且含有三角函数，首先考虑第一重要极限的应用变形；若所求极限类型为$(1+0)^{\infty}$型，则考虑第二重要极限的应用.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$.

解　$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$.

解　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}\cdot\frac{4}{2x-1}(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}\cdot\frac{4(x+1)}{2x-1}}=e^2.$$

(3) 利用极限存在准则求极限.

利用夹逼定理求极限，要对数列(或函数)进行适当放大或缩小，并注意夹逼两端的极限值一定要相同.

例 4　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=1.$

分析　分析$\chi_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，它是$n$项之和，虽然无法求出其和，但各项之间递减，因此可以将x_n进行放大，缩小，用夹逼定理证之.

证明　记
$$\chi_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

则
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\chi_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

故由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\chi_n=1$. 证毕.

例 5　设数列$\{x_n\}$由式子$x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}}\right)(n=1,2,\cdots)$定义，其中$x_0$为大于零的常数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

分析　先利用单调有界数列极限的存在准则，辨别$\{x_n\}$是单调有界数列，因此极限存

在，然后再求极限.

证明　由于$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$，故有$x_{n-1}^2-2x_nx_{n-1}=-a$，从而

$$x_{n-1}^2-2x_nx_{n-1}+x_n^2=x_n^2-a,\quad \text{即}(x_{n-1}-x_n)^2=x_n^2-a.$$

由此可得$x_n^2-a\geqslant 0$，即$x_n^2\geqslant a$，故该数列有下界.

又
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant 1,$$

所以$x_{n+1}\leqslant x_n$，因而该数列单调递减，由极限的存在准则知，该数列$\{x_n\}$有极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则对$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$两边取极限，可得$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$，解得$A=\sqrt{a}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

(4) 利用等价无穷小求极限.

例 6　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{e^x-1}$.

分析　含有根号时，首先想到有理化，用它们的共轭根式分别乘以分子、分母，消去因式公共项，再用其他相应方法去处理.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{(e^x-1)(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=1.$$

小结　等价无穷小在加减法中不能任意代换使用，例如，下面的做法错误：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

正确的做法是：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^3\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

还需注意：不是无穷小量不能随意代换. 例如，下面 $\tan 2^x$ 用 2^x 代换的运算是错误的，因为 $\tan 2^x$ 在 $x\to+\infty$时不是无穷小量.
$$\lim_{x\to+\infty}\tan 2^x\ln\left(1+\frac{3}{2^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}2^x\cdot\frac{3}{2^x}=3.$$

该题目的解法留给同学们思考，随后我们还会介绍相应的求解方法.

题型四　几个杂例

例 1　设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求常数 a 的取值.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}=8$，

所以 $a=\ln 2$.

例 2　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，试求 a,b 的取值.

解　由已知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}\right]=0,$$

则必有 $\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}$ 解之得 $a=1,b=-1$.

小结　当 $x\to\infty$ 时，有理分式的极限取决于分子和分母中最高次项的系数，故此题主要对分母中的变量系数进行考察即可.

例 3　当 $x\to0$ 时，试比较无穷小 $\sin 2x-2\sin x$ 与 $x^{\frac{5}{2}}$ 的阶高低.

解　$\sin 2x-2\sin x=2(\cos x-1)\sin x=4\sin^2\dfrac{x}{2}\sin x\sim x^3$，

从而
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{-x^3}{x^{\frac{5}{2}}}=0,$$

所以，当 $x\to0$ 时，$\sin2x-2\sin x$ 是关于 $x^{\frac{5}{2}}$ 的高阶无穷小.

第二节　习题选解

习题 1-2(P17)

2. 根据数列极限的定义证明：

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$；　　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证明　(3) 任给 $\varepsilon>0$，因为 $|x_n-A|=\left|\dfrac{n+1}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}$，所以令 $\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$，取 $N\geqslant\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，$|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

(5) 任给 $\varepsilon>0$，因为 $|x_n-A|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}<\dfrac{1}{n}$，令 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，取 $N\geqslant\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，$|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

(6) 任给 $\varepsilon>0$，因为

$$|x-A|=|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\left|1-\frac{1}{10^n}-1\right|=\frac{1}{10^n},$$

令 $\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$，即 $n>\lg\varepsilon$（不妨设 $0<\varepsilon<1$），取 $N\geqslant[-\lg\varepsilon]$，则当 $n>N$ 时，$|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，

此即$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

3. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 反过来是否成立？举例说明.

证明略. 反过来不成立. 例如，$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$而$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$极限不存在.

4. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明　任给$\varepsilon>0$，因为数列$\{x_n\}$有界，所以存在$M>0$，对一切的n有$|x_n|\leqslant M$，从而

$$|x_ny_n|=|x_n||y_n|\leqslant M|y_n|.$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以对上述$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时有$|y_n-0|<\dfrac{\varepsilon}{M}$，因此，当$n>N$时，

$|x_n||y_n|\leqslant M|y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，此即$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

5. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

证明　(1) 对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{1+x}{2x}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立，即

$$\left|\frac{1+x}{2x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon,$$

只需$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$即可. 因此可取$X=1+\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$|x|>X$时，总有$\left|\dfrac{1+x}{2x}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$. 极限得证.

6. 求$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$在$x=0$处的左、右极限，并说明它在$x=0$处极限是否存在.

解　因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，在$x=0$处的左、右极限存在且相等，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

因为$\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=1$，在$x=0$处的左、右极限存在但不相等，所以$\lim\limits_{x\to0}g(x)$不存在.

7. 设$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 问$f(x)$在$x=1$及$x=0$两点的极限是否存在？为什么？

解　因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，在$x=0$处的左、右极限存在但不相等，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

因为$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$，在$x=1$处的左、右极限存在且相等，所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$存在.

习题 1-3(P21)

1. 设数列x_n是无穷小，y_n与z_n都是无穷大，试问：

(1) x_ny_n是否为无穷小，为什么？　(2) y_n+z_n是否为无穷大，为什么？

(3) $\dfrac{x_n}{y_n}$是否为无穷小，为什么？　(4) y_nz_n是否为无穷大，为什么？

解　(1) 不一定.例如,若取 $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=n$,则 $x_ny_n=\frac{1}{n}$是无穷小,但是若取 $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=n$, $x_ny_n=1$ 不是无穷小.

(2) 不一定.例如,若取 $y_n=n$, $z_n=n$,则 $y_n+z_n=2n$ 是无穷大,但是若取 $y_n=n$, $z_n=-n$,则 $y_n+z_n=0$ 不是无穷大.

(3) 是无穷小.因为 x_n 是无穷小, y_n 是无穷大,则$\frac{1}{y_n}$是无穷小. 于是,根据无穷小的性质,$\frac{x_n}{y_n}=x_n\,\frac{1}{y_n}$仍是无穷小.

(4) 是无穷大. 因为 y_n 和 z_n 都是无穷大,则对于任给的 $M>0$(无论它多大),要使 $|y_nz_n|=|y_n||z_n|>M$,只要 $|y_n|>\sqrt{M}$, $|z_n|>\sqrt{M}$ 即可.

5. 根据定义证明:当 $x\to 0$ 时函数 $y=\frac{1+2x}{x}$是无穷大.

证明　任给 $M>0$,要使 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$,因为 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|\geqslant\frac{1}{|x|}-2$,所以只要 $\frac{1}{|x|}-2>M$,即 $|x|<\frac{1}{2+M}$. 取 $\delta=\frac{1}{2+M}$,则当 $0<|x|<\delta$ 时,恒有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$ 成立,此即 $x\to 0$ 时, $y=\frac{1+2x}{x}$为无穷大.

6. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界? 又当 $x\to+\infty$ 时,这个函数是否为无穷大? 为什么?

解　函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界且非无穷大. 因为

(1) 取点列 $x_n=n\pi$,则 $x_n\to+\infty(n\to+\infty)$,而 $f(x_n)=(-1)^n n\pi$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$,所以有一子列 x_n,其函数值绝对值无限增大,因此 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

(2) 取点列 $x_n^*=n\pi+\frac{\pi}{2}$,则 $x_n^*\to 0(n\to\infty)$,而 $f(x_n^*)=0$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^*)=0$,所以当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 不是无穷大.

习题 1-5(P33)

3. 利用极限的准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

证明　(1) 因为 $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}\leqslant 1+\frac{1}{n}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

(2) 因为　$n\left(\frac{n}{n^2+n\pi}\right)<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<n\,\frac{n}{n^2+\pi}$,

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

习题 1-6(P42)

4. 求下列函数的间断点,并指出其类型.若为可去间断点,则补充或改变函数的定义使它连续.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, 1<x\leqslant 2;\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

解 (1) $x=1$ 为第一类间断点中的可去间断点,若令 $f(1)=-2$,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续;$x=2$ 为第二类间断点中的无穷间断点.

(2) $x=0$ 为第一类间断点中的可去间断点,若令 $f(0)=\dfrac{1}{2}$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(3) $x=1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

(4) $x=0$ 为可去间断点,若令 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

8. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 设 $f(x)=x^5-3x-1$,显然 $f(x)$ 在$[1,2]$上连续,$f(1)=-3<0$,$f(2)=28>0$. 由零点定理知,至少存在一个 $\xi\in(1,2)$,使 $f(\xi)=\xi^5-3\xi-1=0$,故 ξ 为所求. 得证.

10. 证明方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

证明 令 $f(x)=x-a\sin x-b$,显然 $f(x)$在$[0,a+b]$上连续. 又

$$f(0)=-b<0,\quad f(a+b)=a(1-\sin x)\geqslant 0,$$

若 $f(a+b)=0$,则 $a+b$ 是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的正根;若 $f(a+b)>0$,则由零点定理知,在$(0,a+b)$内至少有一个 ξ,使得 $f(\xi)=0$,即 ξ 是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的正根. 综上,结论得证.

11. 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,则在$[x_1,x_n]$上必有 ξ,使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明 显然 $f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续,由最大值最小值定理可知,在$[x_1,x_2]$上至少存在 ξ_1,ξ_2,使得 $f(\xi_1)=m$ 为最小值,$f(\xi_2)=M$ 为最大值,因此,$m\leqslant f(x_k)\leqslant M$,$k=1,2,\cdots,n$,于是

$$m=\frac{nm}{n}\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant\frac{nM}{n}=M.$$

由介值定理的推论 2 可知,在$[x_1,x_2]$上至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

总习题一(P43)

4. 试确定常数 a 和 b,使得$\lim\limits_{x\to\infty}\left(ax+b-\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)=1$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(ax+b-\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a-1)x^3+bx^2+ax+b-1}{x^2+1}=1$,

可得
$$\begin{cases}a-1=0,\\ b=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$$

6. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

解 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1,\end{cases}$ $x=1$ 及 $x=-1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点. 函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$.

7. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内至少有一实根.

证明 $f(x)=\sin x+x+1$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2+\frac{\pi}{2}>0,\quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0,$$
利用零点定理，得证.

8. 证明：若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，则存在点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=g(c)$.

提示 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，利用零点定理.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：至少存在一点 $\xi\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证明 令 $g(x)=f(x)-f(x+a)$，显然 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续. 又
$$g(0)=f(0)-f(a),\quad g(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0).$$

若 $f(a)=f(0)$，则 $\xi=0$ 或 $\xi=a\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$ 成立；

若 $f(a)\neq f(0)$，则 $g(0)$ 与 $g(a)$ 异号. 由零点定理知，在 $(0,a)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

综上所述，至少存在一点 $\xi\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

第四节　提高练习及解答

提高练习

1. 已知 $f(\sqrt{x}-1)=x+2$，求：$f[f(x)]$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\cos x\cdot\sin^2 x}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\ln(1+x)\cdot\tan x}$.

6. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，当 a,b 取何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续？

7. 设常数 $a\neq 0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求 a.

8. 求出函数 $f(x)=\dfrac{\sin x\cdot\sqrt{1-2x+x^2}}{x(x-1)(x-3)}$ 的所有间断点，并判别其类型.

9. 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求常数 a.

10. 设数列 $\{x_n\}$ 用递推关系定义：$x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

提高练习题解答

1. $[(x+1)^2+3]^2+2$.　　2. $e^{-\frac{1}{2}}$.　　3. 3.

4. $\dfrac{1}{4}$.　　5. $\dfrac{1}{2}e$.　　6. $a=0,b=1$.

7. $a=\ln 3$.

8. $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点；$x=1$ 是跳跃间断点；$x=3$ 是无穷间断点.

9. $a=-1$.

10. **证明**　$x_1=10>3$，$x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4>3$，设 $x_n\geqslant 3$，则有 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\geqslant\sqrt{6+3}=3$. 由数学归纳法，对一切大于 1 的自然数 n，都有 $x_n\geqslant 3$，故数列 $\{x_n\}$ 有下界(由递推关系式知 $x_n\geqslant 3$，故有下界 3).

对所有 $x_n\geqslant 3$，又因为

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n\geqslant\frac{6+x_n-x_n^2}{\sqrt{6+x_n}+x_n}=\frac{-(2+x_n)(x_n-3)}{\sqrt{6+x_n}+x_n}\leqslant 0,$$

所以 $x_{n+1}\leqslant x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调减少，故 $\{x_n\}$ 是单减且有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，得 $l=\sqrt{6+l}$，即 $l^2-l-6=0$，解得该方程的正根为 3，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

第二章　导数与微分

第一节　基本要求

1. 理解导数、左导数、右导数的概念，理解导数的几何意义，掌握可导的充要条件.

2. 会求平面曲线的切线方程和法线方程；了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量的变化规律.

3. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则；掌握基本初等函数的导数公式，会求初等函数和分段函数的导数.

4. 了解高阶导数的概念，会用莱布尼兹公式，掌握简单函数的 n 阶导数公式.

5. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的一、二阶导数.

6. 理解微分的概念，理解可导和连续、可微的关系，掌握微分的四则运算法则和一阶微分形式不变性，了解函数微分的几何意义.

7. 会求函数的微分，了解微分在近似计算中的应用.

8. 了解相关变化率，会解决简单问题中的相关变化率.

第二节　题型解析

题型一　利用导数定义解题

例 1　设 $f(x)=\arctan x\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$，求 $f'(0)$.

解　$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=1\cdot 1=1.$$

小结　此类题目不宜先求 $f'(x)$，然后将 $x=0$ 代入 $f'(x)$ 求得 $f'(0)$.

例 2　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{2x}{1+\mathrm{e}^{x}}, & x>0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解　分段函数，须分别求 $x=0$ 点的左、右导数.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1,$$