Methods and Cases of Mathematics Research in Secondary Schools

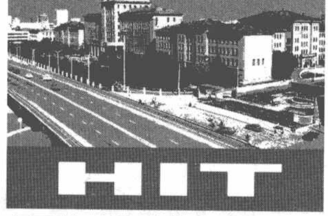
HIT

全国优秀数学教师专著系列

中学数学研究的方法及案例

陈世明 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



全国优秀数学教师专著系列

中学数学研究的方法及案例

Methods and Cases of Mathematics Research in Secondary Schools

陈世明 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

全书共分五章,第一章主要介绍教学方法、教学重点与难点等内容的研究方法与选题,第二章主要介绍解题方法与技巧等内容的研究方法与选题,第三章介绍了初等数学研究的方法与选题,第四章介绍了高考复习模式、高考命题特点及高考题型与解法等内容的研究方法与选题,篇幅较短的第五章总结了中学数学命题的原则与技术.

本书有别于以理论研究为主的各类专著,通过大量的研究案例阐述中学数学研究的方法与选题,适合广大中学数学教师、师范院校数学系本科生及教学论方向的研究生阅读,也可供有志于从事中学数学研究的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

中学数学研究的方法及案例/陈世明著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.5

ISBN 978-7-5603-7397-3

Ⅰ.①中… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①中学数学课—教学研究 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 110508 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451—86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 24.5 字数 440 千字
版　　次 2018 年 5 月第 1 版 2018 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978—7—5603—7397—3
定　　价 58.00 元

◎作者简介

陈世明，大学本科毕业，中学数学高级教师，广州市优秀教师，华南师范大学硕士研究生校外导师.从事中学数学教学工作34年，创建了“高三数学一轮复习法”的高考复习新模式，取得了优异的高考成绩.1992年至1996年从事数学竞赛培训工作.在1994年和1995年全国高中数学联赛中，获湖南省特等奖二人并入选全国数学“冬令营”，一等奖三人，三等奖三人，优胜奖七人；两次获湖南省团体总分一等奖.1996年开始从事中学数学研究工作，已在《数学通报》等全国近三十家期刊上发表文章160余篇.2017年1月获“广东省初等数学研究杰出贡献奖”.

◎写在前面的话

1984 年，作者毕业于湖南省零陵师范专科学校（现湖南科技学院）数学科，同年被分配到一所湖南省重点中学工作. 1992 年毕业于湖南教育学院数学系，2001 年又从湖南师范大学数学系硕士研究生课程进修班结业. 从参加工作的第一天起，作者就给自己定下了专业成长的第一个目标：弄清中学数学中所有疑难问题. 因此，那时每天除了上好课外，作者就在努力做题. 在湖南教育学院脱产学习的两年里，受张垚教授（时任湖南省数学普及委员会主任）等老师的影响，作者对数学竞赛产生了浓厚的兴趣，当时就给自己定下了专业成长的第二个目标：开展数学竞赛培训，且要获省一等奖（当时要获省一等奖，难度实在有点大，因为全省只有六个特等奖、十五个一等奖，所以要获一等奖，意味着竞赛成绩要排全省前二十一名）. 经过三年多的努力，在 1995 年的全国高中数学联赛中，作者培训的学生有两人获省特等奖，三人获省一等奖，没想到第二个目标很快实现. 由于作者没有在省级以上数学期刊发表三篇论文，导致在 1996 年职称评审中与破格评高级教师擦肩而过. 1996 年以后，作者开始从事中学数学的研究工作并学习论文写作，同时也给自己定下了专业成长的第三个目标：要在全国所有与中学数学有关的期刊上发表论文. 从 1997 年在西北师范大学的《数学教学研究》上发表第一篇文章起至今已有二十余年，尽管第三个目标还没有全部实现，但已在全国近三十家数学期刊上发表文章 160 多篇，在全国十余家报刊上发表学生辅导文章数十篇. 本书就是从这些发表的文章中精心挑选编著而成的，它既记录了作者从教以来的专业成长历程，同时也初步总结了作者从

事中学数学研究二十余年的点滴体会与收获.

本书有别于以理论研究为主的中学数学研究的各类专著，通过大量的研究案例阐述中学数学研究的方法与选题. 全书共分五章，第一章主要介绍教学方法、教学重点与难点等内容的研究方法与选题，第二章主要介绍解题方法与技巧等内容的研究方法与选题，第三章介绍了初等数学研究的方法与选题，第四章介绍了高考复习模式、高考命题特点及高考题型与解法等内容的研究方法与选题，篇幅较短的第五章总结了中学数学命题的原则与技术. 本书适合广大中学数学教师、师范院校数学系本科生及教学论方向的研究生阅读，也可供有志于从事中学数学研究的读者参考.

作为一名中学教师，没有好的教学成绩在学校就没有“地位”，只有好的教学成绩而无一定的教研成果在同行和专家心中就无“品位”. 因此，作者的研究始终根植于课堂教学，由教生研，以研促教，教研相长，这就决定了作者的研究不能偏离中学数学教学太远、太深，许多研究专题也仅仅是“入门”而已，虽参阅了许多文献，并从中吸收了大量营养，但囿于作者的学识与水平，书中的疏漏与不足在所难免，祈盼读者不吝指教，以便有机会时修改.

在本书的写作过程中，得到了作者所在学校——广州市第七中学曾优鲜校长及各位领导、老师及有关专家的大力支持与鼓励，作者的好友兼徒弟广州市执信中学的周奇高级教师对本书的文字输入做了大量的工作，在此特向关心、支持、帮助与鼓励本书写作、出版的所有领导、专家、老师、参考文献的原作者及各界朋友表示由衷的感谢！

作者于五羊新城寒舍

2018 年元旦

◎目录

教学研究

第一章

在现代汉语词典里，教学是指教师把知识、技能传授给学生的过程；在百度词条里，教学是指教师的教和学生的学所组成的一种人类特有的人才培养活动. 无论在把知识、技能传授给学生的过程里，还是在教师的教和学生的学的活动中，有许多问题值得我们去思考，也有许多规律值得去探索，从而促进教学质量的提高. 运用科学的理论和方法，有目的、有计划地去探索教学活动的内容、现象、特点及其规律的研究活动就是教学研究. 本章分三节介绍教学研究的选题，并通过一些案例说明其研究方法.

1.1　教学方法研究

常言道：教学有法但无定法. 在课堂教学中，怎样设计教学情境？概念、公式、定理及法则如何生成来得自然？公式、定理及法则的证明思路如何产生？怎样让解题思路来得更自然一些？对每节、每章教材的内容如何组织（处理）、怎么展开才能使学生更易懂且难忘？…… 这些都是教学研究的重点课题，也是提高教学能力的有效途径之一.

1.1.1　教学设计

【案例 1.1】　从一个简单不等式到两个著名不等式——一堂《不等式选讲》课的预设

在广东省，高二学生在高二第二学期快要结束前必须参加“反科”学业水平测试（下简称为“水平测”），即文科生须参加

“理、化、生”的理科“水平测”,理科生须参加“政、史、地”的文科“水平测”,且每科的测试成绩均在等级C以上(最高等级为A),高考时才有资格报考一本院校,有不少地方的教育行政部门还将“水平测”的成绩纳入学校教学质量评估.这样一来,不仅学生对“水平测”非常重视,而且有许多学校对“水平测”也高度关注,以至每年到了“水平测”的前期,其他科目都要为“水平测”“停车让路”,有的学校减少非“水平测”科目的课时,有的学校虽仍上课,但不许给学生留课后作业,等到了“水平测”的前一周,则一律停课.因此在“水平测”的这一时段里,学生的数学学习状况非常糟糕,在这一时段里如何使数学教学不受影响是广大的高二数学教师,尤其是理科数学教师(因为理科数学的课时非常紧)面临的一个新问题.今年的“水平测”期间碰上我校正在学习《不等式选讲》的内容,为了使教学少受影响,我们在教学设计上做了一些努力,下面是一堂《不等式选讲》课的预设.

一、情境创设

目前,同学们正在紧张地进行“水平测”的复习备考,一定很辛苦吧!今天我就带大家去放松一下,去哪里好呢?去国外?路太远!去美丽的大草原?没时间!去香港迪士尼乐园?不行的!教室前面的门上还贴着呢,我们要考“3A”的!那就算了吧,我们哪儿也别去了,还是到我们的“数学王国”里来吧!去感受一下我们“数学王国”里的美丽风光.那么,如何进入“数学王国”呢?请别紧张,我们并不收门票,同学们就跟我来吧!

二、步入新课

1.一个简单不等式

设 $x \in \mathbf{R}$,则 $x^2 \geqslant 0$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

2.从简单不等式出发

(1)取特值:令 $x=a-b(a,b \in \mathbf{R})$,则得:

定理1 若 $a,b \in \mathbf{R}$,则

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab \tag{1}$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

不等式(1)是一个优美的不等式,它具有特征:每一项的次数是2,变元的个数是2,右边的系数是2,简称为“三个不同的2”.

(2)类比:类比猜想具有“三个不同的3”的特征的不等式,易得

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$

类比得出的结论不一定正确,上述不等式成立还需证明,证明后即得(推广了课本上的结论):

定理2 若 $a,b,c \in \mathbf{R}$,且 $a+b+c \geqslant 0$,则

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc \tag{2}$$

当且仅当 $a+b+c=0$ 或 $a=b=c$ 时等号成立.

不等式(1)(2) 统称为基本不等式.

再进一步猜想具有“三个不同的 4”的特征的不等式,即得:

若 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,则

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号成立.

……

……

(3) 加强条件:设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则由不等式(1)(2),易得

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab} \tag{3}$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

不等式(3) 即为二元均值不等式

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc} \tag{4}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

不等式(4) 即为三元均值不等式.

(4) 推广

定理 3 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$ $(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,则

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i} \tag{5}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

不等式(5) 即为著名的(n 元) 均值不等式.

(5) 变式

变式 Ⅰ:从不等式(1) 出发,设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,易得

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{6}$$

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \tag{7}$$

变式 Ⅱ:从不等式(3)(4) 出发,分别可得

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab} \tag{8}$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leqslant\sqrt[3]{abc} \tag{9}$$

将不等式(3)(5)(6) 和(4)(7)(9) 分别连起来得(不等式链)

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

推广即得:

定理 4　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$ $(n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 2)$,则

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \qquad (10)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

不等式(10) 即为:调和平均 $\leqslant$ 几何平均 $\leqslant$ 算术平均 $\leqslant$ 平方平均.

变式 Ⅲ:从不等式(5) 出发:可得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i},\ \prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^n$$

由此即得:

定理 5(最值定理)　(1) 若 n 个正数的积是一个定值,则当且仅当这 n 个正数相等时,它们的和有最小值;

(2) 若 n 个正数的和是一个定值,则当且仅当这 n 个正数相等时,它们的积有最大值.

3. 课堂练习

题目(《数学　选修 4-5　A 版　不等式选讲》(人教版) 第 10 页,第 8 题)

已知 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

求证:$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant 1$.(基本不等式(1) 的应用)

反思 1(条件不变,加强结论)　若 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$,那么 $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant 1$ 是否仍成立?(基本不等式(1) 的加强应用,即 $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$ 的应用)

反思 2(改变条件,变换结论形式)　已知 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.求 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 的最大值.(原解法失效,须先变换条件,意在强化取等号的条件.)

反思 3(将条件一般化) 已知 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = A(>0)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = B(>0)$. 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ 的最大值.

略解 由已知条件得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\sqrt{A}}\right)^2=1$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{B}}\right)^2=1$. 由基本不等式(1)，得

$$\left(\frac{a_i}{\sqrt{A}}\right)^2+\left(\frac{x_i}{\sqrt{B}}\right)^2 \geqslant \frac{2a_i x_i}{\sqrt{AB}} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

当且仅当 $\frac{a_i}{\sqrt{A}}=\frac{x_i}{\sqrt{B}}(i=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立.

将上述 n 个不等式相加，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\sqrt{A}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{B}}\right)^2 \geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x_i}{\sqrt{AB}}$$

化简得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \sqrt{AB}$$

当且仅当 $\frac{a_i}{\sqrt{A}}=\frac{x_i}{\sqrt{B}}$，即 $x_i=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立.

反思 4(将条件一般化，进一步变换结论形式) 已知 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = A(>0)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = B(>0)$. 求 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right|$ 的最大值.

反思 5 由反思 4 的结论，你有什么发现?

反思 4 的结论 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \sqrt{AB}$，两边平方得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 \leqslant AB$，即

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

至此，著名的柯西不等式也就诞生了!

定理 6(柯西不等式) 设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

当且仅当 $a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 或存在常数 $\lambda\in\mathbf{R}$ 使 $b_i=\lambda a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立.

三、几点注记

1. 本课预设是为重点班设计的，因而容量较大，对一般的普通班来说可能

要两个课时才能完成.

2. 现实生活里既有数学的原型，又有数学的应用. 在数学教学中，从学生的实际情况出发，创设有助于学生自主学习的问题情境，引导学生通过实践、思考、探索交流，获得知识，形成技能，发展思维是新课程教学的基本理念. 在教学设计时，联系学生的生活经验，选取一些生动的实际事例创设问题情境已成为新课程课堂教学的一个重要环节. 自从实施新课程以来，许多经典的问题情境设计不断涌现，为达成新课程教学目标起到了重要作用. 传统的问题情境设计多是从现实生活的原型入手或从数学的内部去挖掘，本课预设的情境设计则"一反常态"，既没有从现实生活的原型去设计，也没有从数学的内部去考虑，而是从当时学生的"学情"出发，从"情感"的角度去创设教学情境，给人耳目一新之感，且教学效果颇佳. 事实上，在上课时，当把它呈现出来时，学生哄堂大笑，想不到老师还如此幽默一把，学生复习备考的紧张心情一下子轻松了许多，同时也很好地将学生拉回到了数学课堂里. 由此可见，在设计问题情境时，既要考虑教学内容，又要关注当时学生的"学情"，最大限度地发挥情境的功效. 现在有的地方规定，每节课都要有情境，尤其是一些公开课或优质课的评比，若缺少情境设计这一环节就很难被评为一节成功的课，从而导致了形式主义的泛滥，烦琐哲学流行. 另外，在当今的数学课堂教学中，一些"稀奇古怪"的问题情境也时有出现，它们既不能激发学生的学习兴趣和学习动机，沟通数学知识与现实生活的联系，又浪费了宝贵的教学时间，所有这些问题在今后的教学中是应该要避免的.

3. 新《数学课程标准》强调数学教学的目的既要使学生掌握基础知识、基本方法和基本技能，又要培养学生的数学能力和创新精神. 这就要求我们教师在教学设计时，要将一些基础知识进行横向拓宽与纵向深入，让学生体验数学发现和创造的历程. 本课预设从一个简单不等式出发直奔两个著名不等式（均值不等式和柯西不等式）而去，途中既有归纳、类比等合情推理的引领，又有取特值、加强条件和变式等演绎推理的巧用，尤其是通过对一道简单练习题的不断反思，出人意外地得出了著名的柯西不等式的一般形式，从而打破了教材对柯西不等式的呈现方式：先得出二维和三维的柯西不等式，再要求学生归纳猜想一般形式的柯西不等式. 使学生对柯西不等式既有亲近感，又培养和锻炼了学生的探究能力和创新意识，扩展了学生的视野.

4. "预设"与"生成"是构建高效课堂的两把"抓手"，只有有了高质量的"预设"，才可能有课堂上的精彩"生成". 这就要求我们老师深入钻研教材，吃透教材的精神与实质，把握好教学的重点与难点，挖掘教材编写者的"言外之意"，弹奏出教材文本的"弦外之音"，不断加强自身专业素养的修炼，树立"用教材教"，而不仅仅是"教教材"的意识，不断提高课堂教学效益. 本课预设没有按教材的

呈现方式去展开，而是将不等式的有关内容进行重组，对有关的知识做适当的拓宽和引申，对有关的结论进行整合，使学生对不等式主要内容的来龙去脉有更深刻的理解，为不等式的进一步应用打下坚实的基础，这正是本堂课的目标所在.

1.1.2 概念、公式、定理的生成

【案例 1.2】 一堂关于圆锥曲线概念的研究性学习课

无论是新课程里，还是在旧教材中，圆锥曲线历来是中学数学的重点内容之一. 关于圆锥曲线的教学一直是人们关注的焦点，更是各种赛课、说课、研讨课、试教课等公开课及教研课题的首选内容之一，其中不乏佳作涌现，学后受益匪浅. 但据作者所知，关于圆锥曲线的教学，一般都遵循“椭圆→双曲线→抛物线”这一教材思路，各个击破，因而在引出三种圆锥曲线的概念时，基本上都是从现实生活中的原型出发设计教学情境. 然而，数学发展史表明，数学的向前发展，一方面来自现实社会发展的需要，另一方面是源于数学内部的矛盾运动. 那么能否从数学内部出发，比较自然、系统地生成各种圆锥曲线的概念？最近，作者在这部分内容的教学时，根据这一思想进行了一堂研究性学习课，下面是该堂课的教学实录.

一、概念的生成

1. 承前

师：在平面内，到一个定点的距离等于常数的点的轨迹是什么？

生(异口同声地)：圆！

师：很好！

2. 启后

师：我们“异想天开”地来想一想：在平面内，如果有一个动点到两个定点的距离满足某个条件，那么这个动点的轨迹可不可以还是圆？

生 1(脱口而出)：不是吧！

生 2：还不一定！要看动点到两个定点的距离满足的条件是什么. 如果动点到两个定点的距离相等，那么动点的轨迹肯定不是圆，而是以这两个定点为端点的线段的垂直平分线；如果动点到两个定点的距离不相等，那么动点的轨迹有可能是圆.

生 3：若只有“动点到两个定点的距离不相等”这一条件，则动点的轨迹肯定也不是圆，这只需画一下图便知. 因此，要使轨迹是一个圆，除了“动点到两个定点的距离不相等”这一条件外，还必须另加条件，究竟加什么条件，暂时还没想好.

师(若有所思的)：生 2、生 3 说的都很有道理！到底需加什么条件呢？

3. 探究

生 4(不急不慢的):是不是“动点到两个定点的距离的比为一个不等于 1 的常数”?

师:你是如何想到这一条件的?

生 4:我是类比圆的定义,“瞎猜”的!

生 5(情绪激动的):对了!对了!前面课本里好像有这样一道求轨迹方程的习题,而且求出的轨迹恰好是一个圆(这时全班同学的目光都投向生 5).

师:是吗?大家回忆一下,到底书上有没有这样一道习题?(一会儿,同学们在《数学 2 必修 A 版》(人教版)第 124 页 B 组题中找到了该题:“已知点 M 与两个定点 $O(0,0)$,$A(3,0)$ 的距离的比为 $\frac{1}{2}$,求点 M 的轨迹方程”,且同学们都很高兴)

师(不以为然的):大家不要高兴得太早!这里的定点 O 和 A 都是特殊点 $O(0,0)$,$A(3,0)$,比值也为特殊值 $\frac{1}{2}$. 如果两个定点是任意的 $A(a,b)$,$B(c,d)$(其中 a,b,c,d 为常数),比值为 $\lambda(\lambda \neq 1)$,那么动点的轨迹还是不是圆?(同学们投入到紧张的计算之中,大约 3 分钟后.)

生(斩钉截铁地):还是圆!

师:既然如此,能否给圆再下一个定义?

生:平面内,到两个定点的距离的比为一个不等于 1 的常数的点的轨迹叫作圆.

师:很好!我们不妨把上述定义叫作圆的第二定义,原来的定义叫作圆的第一定义(此时同学们的成功之感,溢于言表).其实圆的第二定义早在两千多年以前古希腊数学家阿波罗尼斯(Apollonius)就已经发现了,人们为了纪念这位数学家,现在通常称该圆为阿波罗尼斯圆.有点遗憾吧!要是你能早生两千多年,说不定这个圆就是你的了(学生大笑).不过没关系,你们还年轻,只要你们敢想、肯钻,将来还有大把机会.

4. 拓广

师:在平面内,若动点到两个定点的距离的比不是常数,而它们的 —— 和(学生脱口而出)为一个常数,那么该动点的轨迹又将是什么?(1 分多钟后)

生 6:一条线段!

生 7:不存在!

生 8:生 6、生 7 说的都对,但均不全面.当这个常数等于两定点的距离时,动点恰好位于以这两个定点为端点的线段上,所以轨迹是一条线段;当这个常数小于两定点的距离时,轨迹不可能存在,因为三角形两边之和大于第三边.当这个常数大于两定点的距离时,还不知道轨迹是什么图形.

师:生 8 说得很有道理! 同学们清楚了吗?

生:清楚了!

师:真棒! 下面我们一起来看,当这个常数大于两定点的距离时,轨迹是什么图形(这时,老师打开课件,演示轨迹的形成过程,如图 1).

生(脱口而出):椭圆!

师:你们怎么知道它就是椭圆?

生:这个图形在许多地方都见过!

师:那举几个出来看看?

生 9:老师,你戴的眼镜就是椭圆.

师:是吗? 我还没注意到呢! 还有吗?

生:我们早餐吃的面包、我戴的手表的表面、地球的运行轨道、油罐车的横断面,还有我们吃的鸡蛋看上去也像是椭圆,……

师:不错! 现实生活中的确有许多椭圆这种图形. 现在你们自己能不能画出椭圆这一图形?

生:能!

师:那好! 回到家自己动手画一画. 这里值得指出的是:画圆已有了“圆规”,你能否“发明”一个画椭圆的“椭圆规”? 与圆一样,现该给椭圆下一个定义了吧!

生:平面内,到两个定点的距离的和等于常数(大于两定点间的距离)的点的轨迹叫作椭圆.

师:很好! 今后,我们把这两个定点叫作椭圆的焦点,两定点间的距离叫作椭圆的焦距. 下面我们能否沿着这条思路继续探究下去,而得出其他一些轨迹图形?

生 9:前面已研究了“动点到两个定点的距离的比为常数”的情况,又研究了“动点到两个定点的距离的和等于常数”的情况. 我想下面应研究“动点到两个定点的距离的差或积等于常数”的情况.

生 10:同意生 9 的想法,但由于动点到两个定点的距离的差可正可负,应考虑差的绝对值为常数似乎更好一些吧?

师:有道理! 赶快试试吧!(由于有前面的基础,大约 2 分钟后)

生:当这个常数等于两定点的距离时,轨迹是两条射线;当这个常数大于两定点的距离时,轨迹不可能存在;当这个常数小于两定点的距离时,不知道轨迹是什么图形.

师:很好! 下面我们再一起来看,当这个常数小于两定点的距离时,轨迹是什么图形(这时,老师又打开课件,演示轨迹的形成过程,如图 2).