美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

116个代数不等式：
来自AwesomeMath全年课程

116 Algebraic Inequalities：from the AwesomeMath Year-Round Program

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)
[罗] 马吕斯·斯塔内(Marius Stanean) 著
余应龙 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

116个代数不等式：来自AwesomeMath全年课程

116 Algebraic Inequalities：from the AwesomeMath Year-Round Program

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)
[罗] 马吕斯·斯塔内(Marius Stanean) 著
余应龙 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2018－106 号

图书在版编目(CIP)数据

116 个代数不等式:来自 AwesomeMath 全年课程/(美)蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu),(罗)马吕斯·斯塔内(Marius Stanean)著;余应龙译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.4

书名原文:116 Algebraic Inequalities: from the AwesomeMath Year-Round Program

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5149 - 0

Ⅰ.①1… Ⅱ.①蒂…②马…③余… Ⅲ.①不等式—问题解答 Ⅳ.①O178—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 038708 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 12　字数 248 千字
版　　次　2019 年 4 月第 1 版　2019 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 5149 - 0
定　　价　58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 序言

不等式大量存在于数学的一切领域之中.本书的目的是呈现不等式理论中的一些基本的技巧.我们从 *Mathematical Reflections* 丛书,以及解题艺术网站,Gazeta Matematică 中精选出了不少问题.本书中的许多问题都体现了作者的特色.

在第一章中,读者将会遇到一些经典的不等式,其中包括幂平均和 AM-GM 不等式,Cauchy-Schwarz 不等式,Hölder 不等式,排序和 Chebyshev 不等式,Schur 不等式,Jensen 不等式等,这些不等式我们都给出了证明,并列举一个或几个例子,还给出它们有趣的、容易接受的解答.本书内容旨在拓展读者的视野:我们的读者包括高中的学生和教师、大学生,以及一切对数学怀有热情的人士.

在第二章中,我们致力于研究一些问题,这些问题分为入门题和提高题.每一节中的不等式都按照变量的个数:一个、两个、三个、四个和多个变量排序.每一个问题至少有一个完整的解答,很多问题有多种解答,这对发展竞赛中的必要的数学机制十分有用.

本书对参加奥林匹克数学竞赛,并准备研究不等式的学生将会有很大的帮助,本书中的不等式也是在各级竞赛中频繁使用的课题.我们希望这本书能成为证明一些代数不等式以及发现一些新的不等式的灵感的源泉.我们对 *Mathematical Reflections* 的所有的编者和在 AoPS 网站上提供问题的对数学有热情的人士表示感谢.

让我们一同分享这些问题吧!

目录

1　一些经典的不等式和一些新的不等式 …… 1

1.1　平方非负 …… 1
1.2　各个平均之间的不等式 …… 6
1.3　Cauchy-Schwarz 不等式 …… 13
1.4　Aczél 不等式 …… 27
1.5　Jensen 不等式 …… 30
1.6　一般的加权幂平均不等式 …… 32
1.7　Hölder 不等式 …… 37
1.8　Minkowski 不等式 …… 43
1.9　Schur 不等式 …… 46
1.10　Chebyshev 不等式 …… 55
1.11　排序不等式 …… 58
1.12　Bernoulli 不等式 …… 64
1.13　Karamata 不等式 …… 66
1.14　Popoviciu 不等式 …… 71

2　116 个不等式 ………………………………………………… 77

2.1　入门题 ………………………………………………… 77

2.2　提高题 ………………………………………………… 82

2.3　入门题的解答 ………………………………………… 88

2.4　提高题的解答 ………………………………………… 117

1 一些经典的不等式和一些新的不等式

1.1 平方非负

对于任何实数 x,最简单的不等式是 $x\geqslant 0$. 因此,当我们试图证明一个表达式是非负的时候,我们就设法将该表达式写成平方的形式或者几个平方和的形式. 但将一个表达式写成一个平方形式或者几个平方和的形式通常是远非明显的. 这需要具有一定的直觉和创造力,但也许更重要的是经验. 于是,我们从一些入门的问题开始.

例 1 设 a,b,c 是实数,且 $a+b+c\geqslant 0$,证明

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$$

证明 利用已知条件,我们有

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0\end{aligned}$$ □

注 1 通常将三个变量的 AM-GM 不等式的情况写成这一结果. 两个变量的类似的形式是 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 这一更容易的事实,只要变形为 $(a-b)^2\geqslant 0$. 上面的解答也建立了不等式 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$,该不等式可改写为 $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$. 这四个不等式在本书的其余部分将是十分常用的.

例 2(Titu Andreescu) 设 m 和 n 是大于 1 的整数,证明

$$(m^3-1)(n^3-1)\geqslant 3m^2n^2+1$$

证明 将原不等式改写为

$$(mn)^3+(-m)^3+(-n)^3-3mn(-m)(-n)\geqslant 0$$

它等价于

$$\frac{1}{2}(mn-m-n)[(mn+m)^2+(mn+n)^2+(m-n)^2]\geqslant 0$$

显然,由于 $mn-m-n=(m-1)(n-1)-1\geqslant 0$,因此所有的因子都非负. 当且仅当 $m=n=2$ 时,等式成立. □

例 3(Adrian Andreescu) 证明:对于任何实数 a,b,c,d,有

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd\geqslant 2\,|\,(a^2-b^2+c^2-d^2)(ab-cd)\,|$$

证明 我们有

$$
\begin{aligned}
a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd &= (a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2\\
&\geqslant \frac{1}{2}[(a^2-b^2)+(c^2-d^2)]^2+2(ab-cd)^2\\
&\geqslant 2|(a^2-b^2+c^2-d^2)(ab-cd)|
\end{aligned}
$$

这里我们用了不等式 $x^2+y^2\geqslant\frac{1}{2}(x+y)^2$ 和 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,这两个不等式都等价于 $(x-y)^2\geqslant 0$. □

例 4(Mathlinks) 设 a,b 是实数,且

$$ab(a^2-b^2)=a^2+b^2+1$$

求 a^2+b^2 的最小值.

解 利用极坐标,即

$$a=r\cos\alpha, b=r\sin\alpha, r>0, \alpha\in[0,2\pi)$$

我们看到已知条件变为

$$1+r^2=r^4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=r^4\cdot\frac{\sin 4\alpha}{4}\leqslant\frac{r^4}{4}$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
& r^4-4r^2-4\geqslant 0\\
\Leftrightarrow & (r^2-2)^2-8\geqslant 0\\
\Leftrightarrow & (r^2-2-2\sqrt{2})(r^2-2+2\sqrt{2})\geqslant 0
\end{aligned}
$$

于是

$$a^2+b^2=r^2\geqslant 2(1+\sqrt{2})$$

当 $r=\sqrt{2(1+\sqrt{2})}$,且 $\alpha\in\{\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8}\}$ 时,等式成立. □

例 5 设 a,b 是非负实数,且 $a+b\leqslant 2$,证明

$$(1+a^2)(1+b^2)\geqslant\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2$$

证明 展开后根据 a 和 b 在多项式中的次数重新排列,给出等价的不等式

$$a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^4-a^2b^2$$

两边分解出 $(a-b)^2$,上式变为

$$\frac{1}{2}(a-b)^2\geqslant\frac{1}{16}(a-b)^2(a^2+6ab+b^2)$$

因此只要证明 $8\geqslant a^2+6ab+b^2$,但是注意到

$$a^2+6ab+b^2=2(a+b)^2-(a-b)^2\leqslant 2(a+b)^2$$

由此容易推出该式. □

例 6(An Zhenping)　设 $a,b>0$,且 $ab=1$,证明

$$\frac{2}{a^2+b^2+1}\leqslant\frac{1}{a^2+b+1}+\frac{1}{a+b^2+1}\leqslant\frac{2}{a+b+1}$$

证明　我们有 $a=\frac{1}{b}$,所以原不等式可改写为

$$\frac{2a^2}{a^4+a^2+1}\leqslant\frac{a}{a^3+a+1}+\frac{a^2}{a^3+a^2+1}\leqslant\frac{2a}{a^2+a+1}$$

首先,我们证明右边的不等式.我们需要证明

$$\frac{a^2}{a^4+a^2+a}+\frac{a^2}{a^3+a^2+1}\leqslant\frac{2a^2}{a^3+a^2+a}$$

该不等式等价于以下不等式中的每一个

$$\frac{1}{a^4+a^2+a}+\frac{1}{a^3+a^2+1}\leqslant\frac{2}{a^3+a^2+a}$$

$$\frac{1}{a^4+a^2+a}-\frac{1}{a^3+a^2+a}\leqslant\frac{1}{a^3+a^2+a}-\frac{1}{a^3+a^2+1}$$

$$\frac{a^3-a^4}{(a^4+a^2+a)(a^3+a^2+a)}\leqslant\frac{1-a}{(a^3+a^2+a)(a^3+a^2+1)}$$

$$\frac{a^2(1-a)}{a^3+a+1}\leqslant\frac{1-a}{a^3+a^2+1}$$

$$(1-a)(a^5+a^4-a^3+a^2-a-1)\leqslant 0$$

$$(a-1)^2(a^4+2a^3+a^2+2a+1)\geqslant 0$$

这显然成立.

为证明左边的不等式,我们有类似的过程.我们必须证明

$$\frac{2a^2}{a^4+a^2+1}\leqslant\frac{a^2}{a^4+a^2+a}+\frac{a^2}{a^3+a^2+1}$$

该不等式等价于以下不等式中的每一个

$$\frac{2}{a^4+a^2+1}\leqslant\frac{1}{a^4+a^2+a}+\frac{1}{a^3+a^2+1}$$

$$\frac{1}{a^4+a^2+1}-\frac{1}{a^3+a^2+1}\leqslant\frac{1}{a^4+a^2+a}-\frac{1}{a^4+a^2+1}$$

$$\frac{a^3-a^4}{(a^4+a^2+1)(a^3+a^2+1)}\leqslant\frac{1-a}{(a^4+a^2+a)(a^4+a^2+1)}$$

$$\frac{a^3(1-a)}{a^3+a^2+1}\leqslant\frac{1-a}{a^4+a^2+a}$$

$$(1-a)(a^7+a^5+a^4-a^3-a^2-1)\leqslant 0$$

$$(a-1)^2(a^6+a^5+2a^4+3a^3+2a^2+a+1)\geqslant 0$$

这显然成立.

当 $a=b=1$ 时,该不等式的两边的等式都成立. □

例 7(Titu Andreescu) 证明:对于一切实数 a,b,c,d,e,有

$$2a^2+b^2+3c^2+d^2+2e^2 \geqslant 2(ab-bc-cd-de+ea)$$

证明 该不等式等价于

$$2e^2-2e(a-d)+2a^2+b^2+3c^2+d^2-2ab+2bc+2cd \geqslant 0$$

或

$$2\left(e-\frac{a-d}{2}\right)^2+2\left(\frac{a+d}{2}\right)^2+2(a+d)c+2c^2+a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc \geqslant 0$$

上式可归结为

$$2\left(e-\frac{a-d}{2}\right)^2+2\left(\frac{a+d}{2}+c\right)^2+(a-b-c)^2 \geqslant 0$$

这是显然的. 当且仅当

$$\begin{cases} 2e-a+d=0 \\ a+d+2c=0 \\ a-b-c=0 \end{cases}$$

即当且仅当

$$\begin{cases} a=d+2e \\ b=2d+3e \\ c=-(d+e) \end{cases}$$

时,等式成立.

例 8 设 a,b,c 是非负实数,且 $a+b+c=\frac{3}{2}$,证明

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geqslant \frac{125}{64}$$

证明 我们利用恒等式

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(a+b+c-abc)^2+(1-ab-bc-ca)^2$$

由例 1,我们有

$$a+b+c=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3 \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

这意味着

$$abc \leqslant \frac{1}{8}$$

以及

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$$

这意味着

$$ab+bc+ca \leqslant \frac{3}{4}$$

于是

$$a+b+c-abc\geqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{8}=\frac{11}{8}$$

以及

$$1-ab-bc-ca\geqslant 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

因此

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geqslant\frac{121}{64}+\frac{1}{16}=\frac{125}{64}$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{2}$ 时，等式成立. □

例 9(Mathlinks)　设 x,y,z 是非负实数，证明

$$(x+2y+3z)(x^2+y^2+z^2)\geqslant\frac{20-2\sqrt{2}}{27}(x+y+z)^3$$

证明　首先，我们观察到如果 $z\geqslant x$，那么

$$\text{左边}\geqslant 2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\geqslant\frac{2}{3}(x+y+z)^3\geqslant\text{右边}$$

因此，接下来只要证明在 $z<x$ 的情况下不等式成立即可.

不失一般性，假定 $x+y+z=3$.

设 $x=a+1,y=b+1,z=c+1$，这表明 $a+b+c=0$，且 $-1\leqslant a,b,c\leqslant 2$.

欲证不等式变为

$$(6+c-a)(2a^2+2ac+2c^2+3)\geqslant 20-2\sqrt{2}$$

或

$$3(c-a)+12(a^2+ac+c^2)+2(c-a)(a^2+ac+c^2)\geqslant 2-2\sqrt{2}$$

设 $u=a-c,v=a+c$，所以 $0<u\leqslant 3$，最后一个不等式可写为

$$-3u+9v^2+3u^2-2u\left(\frac{3v^2}{4}+\frac{u^2}{4}\right)\geqslant 2-2\sqrt{2}$$

或

$$(2+2\sqrt{2}-u)(u-2+\sqrt{2})^2+3v^2(6-u)\geqslant 0$$

这显然成立. 当 $u=2-\sqrt{2},v=0$ 时，等式成立. 这就转化为

$$x=2-\frac{1}{\sqrt{2}},y=1,z=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

排除 $x+y+z=3$ 这一假定以后，就恢复了一般性，我们看到对于上面的 x,y,z 的任何倍数等式都成立. □

1.2 各个平均之间的不等式

具有十分广泛的应用的最重要的不等式之一是各个平均之间的不等式.

定理1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数,那么

$$Q_n \geqslant A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$$

其中

$$Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

是数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的平方平均

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

是数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

是数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的几何平均

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

是数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的调和平均.

证明 首先我们证明不等式(AM-GM不等式)

$$A_n \geqslant G_n \tag{1}$$

当 $n=2$ 时,容易看出

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geqslant 0$$

假定当 $n=k$ 时不等式成立,即

$$A_k \geqslant G_k$$

由归纳法

$$A=\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\geqslant (a_{k+1}A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{k}}=G$$

推出

$$A_{k+1}=\frac{A_k+A}{2}\geqslant\sqrt{A_kA}\geqslant\sqrt{G_kG}=\sqrt{(G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{k}}}$$

所以得到

$$A_{k+1}^{2k}\geqslant G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1}$$

或

$$A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$$

这就完成了不等式(1)的归纳证明.

在这一证明的基础上,容易证明当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时,等式成立.

当 $n=2$ 时,这一结果显然成立.假定对某个 $n=k\geqslant 2$ 不等式成立.

由上面的证明,我们看到如果 $A_{k+1}=G_{k+1}$,那么

$$A_k = A, A_k = G_k, A = G$$

因为 $A_k = G_k$,我们有

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k$$

又因为 $A=G$,我们有

$$a_{k+1} = A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1}$$

由此得

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$$

这就是所求的.

现在对数 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ 使用不等式(1),推出不等式(GM-HM 不等式)

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}}$$

成立,它等价于

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

或

$$G_n \geqslant H_n$$

在以下恒等式

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$$

中,因为

$$2a_ia_j \leqslant a_i^2 + a_j^2 \Leftrightarrow (a_i - a_j)^2 \geqslant 0$$

如果我们将项 $2a_ia_j$ 扩大为 $a_i^2 + a_j^2$,就得到不等式

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

对一切实数 $a_i, i \in \{1,2,\cdots,n\}$.如果一切 a_i 都是正数,那么上式由(QM-AM 不等式)

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

或

$$Q_n \geqslant A_n$$

推得. 当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时,等式成立. □

例 10 如果 x, y 是正实数,且 $x + y = 4$,求 $x^3 y$ 的最大值.

解 由 AM-GM 不等式,我们有

$$x^3 y = 27\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right) y \leqslant 27\left[\frac{\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+y}{4}\right]^4 = 27$$

当 $x = 3, y = 1$ 时,等式成立. □

例 11 设 $a > b > c > d > 0$,证明

$$a + \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-d)} \geqslant d + 4$$

证明 该不等式等价于

$$(a-b)+(b-c)+(c-d)+\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-d)} \geqslant 4$$

这是由 AM-GM 不等式得到的. 当且仅当

$$a-b=b-c=c-d=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-d)}$$

时,即当

$$a-b=b-c=c-d=1$$

时,等式成立,所以对于所有的四元数组

$$(a,b,c,d)=(t+3,t+2,t+1,t),t>0$$

等式成立. □

例 12 设 $a \geqslant x_0 > x_1 > \cdots > x_n \geqslant a-1$,证明

$$(x_0-x_1)(x_1-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_n) \leqslant \frac{1}{n^n}$$

证明 由 AM-GM 不等式和

$$1 = a-(a-1) \geqslant x_0 - x_n$$

这一事实,我们有

$$\sqrt[n]{(x_0-x_1)(x_1-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_n)} \leqslant \frac{(x_0-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)}{n}$$

$$=\frac{x_0-x_n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

由此推出 $(x_0-x_1)(x_1-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_n) \leqslant \frac{1}{n^n}$,这就是所求的. □

例 13(Russia MO 2015) 设 a,b,c,d 是实数,且满足

$$|a|,|b|,|c|,|d|>1$$

以及

$$abc+abd+acd+bcd+a+b+c+d=0$$

证明

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}>0$$

证明 因为 $|a|,|b|,|c|,|d|>1$,我们推得

$$\frac{a+1}{a-1}>0,\frac{b+1}{b-1}>0,\frac{c+1}{c-1}>0,\frac{d+1}{d-1}>0$$

已知条件等价于

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)=(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$$

可写成

$$\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{b+1}{b-1}\cdot\frac{c+1}{c-1}\cdot\frac{d+1}{d-1}=1$$

现在回到原题,由 AM-GM 不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}&=\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{a-1}+\frac{b+1}{b-1}+\frac{c+1}{c-1}+\frac{d+1}{d-1}\right)-2\\&>2\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{b+1}{b-1}\cdot\frac{c+1}{c-1}\cdot\frac{d+1}{d-1}}-2=0\end{aligned}$$

注意到上面用了严格的不等式,因为在 AM-GM 不等式中,要求

$$\frac{a+1}{a-1}=\frac{b+1}{b-1}=\frac{c+1}{c-1}=\frac{d+1}{d-1}=1$$

这是不可能的. □

例 14(Titu Andreescu,USA TST 2001) 设 a,b,c 是正实数,且 $a+b+c\geqslant abc$,证明:在不等式

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}\geqslant 6,\ \frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a}\geqslant 6,\ \frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{6}{b}\geqslant 6$$

中至少有两个成立.

证明 设 $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$,那么推出 $xy+yz+zx\geqslant 1$. 另一方面,由 AM-GM 不等式,我们有

$$\begin{aligned}&(2x+3y+6z)^2+(2y+3z+6x)^2\\&=40x^2+13y^2+45z^2+36xy+60xz+48yz\\&=36x^2+9y^2+4x^2+9z^2+4y^2+36z^2+36xy+60xz+48yz\\&\geqslant 2\cdot 6x\cdot 3y+2\cdot 2x\cdot 3z+2\cdot 2y\cdot 6z+36xy+60xz+48yz\\&=72(xy+yz+zx)\geqslant 72\end{aligned}$$

因此

$$(2x+3y+6z)^2+(2y+3z+6x)^2\geqslant 72$$

类似的

$$(2x+3y+6z)^2+(2z+3x+6y)^2\geqslant 72$$

$$(2y+3z+6x)^2+(2z+3x+6y)^2\geqslant 72$$

于是在 $2x+3y+6z,2y+3z+6x,2z+3x+6y$ 中至少有两个必定至少是 6. □

例 15 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数,且

$$x_1x_2\cdots x_n=1$$

证明

$$x_1^n(1+x_1)+x_2^n(1+x_2)+\cdots+x_n^n(1+x_n)\geqslant\frac{n}{2^{n-1}}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$$

证明 根据 AM-GM 不等式,我们连续有

$$\frac{x_1^n}{(1+x_2)\cdots(1+x_n)}+\frac{1+x_2}{2^n}+\cdots+\frac{1+x_n}{2^n}\geqslant\frac{n}{2^{n-1}}x_1$$

$$\frac{x_2^n}{(1+x_1)\cdots(1+x_n)}+\frac{1+x_1}{2^n}+\cdots+\frac{1+x_n}{2^n}\geqslant\frac{n}{2^{n-1}}x_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_n^n}{(1+x_1)\cdots(1+x_{n-1})}+\frac{1+x_1}{2^n}+\cdots+\frac{1+x_{n-1}}{2^n}\geqslant\frac{n}{2^{n-1}}x_n$$

将这些不等式相加,再利用 AM-GM 不等式,得到

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{x_1^n}{(1+x_2)\cdots(1+x_n)}\geqslant\left(\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}\right)\sum_{\text{cyc}}x_1-\frac{n(n-1)}{2^n}$$

$$\geqslant\frac{n(n+1)}{2^n}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}-\frac{n(n-1)}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时,等式成立. □

例 16(Mathlinks) 设 a,b,c 是非负实数,且 $a+b+c=2$,证明

$$3abc+\sqrt{4+a^2b^2c^2}\geqslant(a+b)(b+c)(c+a)$$

证明 不失一般性,我们可以假定 $c=\max\{a,b,c\}$,这意味着 $2-3c\geqslant 0$. 因为

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc\geqslant 3abc$$

并利用

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

所以得到

$$\sqrt{4+a^2b^2c^2}\geqslant 2(ab+bc+ca)-4abc$$

然后将不等式的两边平方,得到

$$4+a^2b^2c^2\geqslant 4(ab+bc+ca)^2-16abc(ab+bc+ca)+16a^2b^2c^2$$

或

$$[2(ab+bc+ca)-5abc][2(ab+bc+ca)-3abc]\leqslant 4$$

但是

$$\text{左边}\leqslant[2(ab+bc+ca)-3abc]^2$$

所以只要证明

$$2(ab+bc+ca)-3abc\leqslant 2$$

或

$$ab(2-3c)+2c(2-c)\leqslant 2 \tag{1}$$

但是由 AM-GM 不等式，我们有

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{a+b+c}{2}=1$$

因此

$$ab(2-3c)\leqslant\sqrt{ab}(2-3c)\leqslant\frac{(2-c)}{2}(2-3c)$$

于是要证明式(1)，只要证明

$$\frac{(2-c)}{2}(2-3c)+2c(2-c)\leqslant 2\Leftrightarrow(2-c)(2+c)\leqslant 4$$

这显然成立.

当$(a,b,c)=(1,1,0),(1,0,1)$或$(0,1,1)$时，等式成立. □

例 17(Mathlinks) 设a,b,c是非负实数，且$a+b+c=2$，证明

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)\leqslant 2$$

证明 不失一般性，假定$a\geqslant b\geqslant c$，注意到我们有

$$\begin{aligned}&(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)\\&=(a+b)(b+c)(c+a)(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\end{aligned}$$

以及

$$b^2-bc+c^2\leqslant b^2$$

$$c^2-ca+a^2\leqslant a^2$$

于是，只要证明

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a^2-ab+b^2)a^2b^2\leqslant 2$$

由 AM-GM 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&(a+b)(b+c)(c+a)(a^2-ab+b^2)a^2b^2\\&=(a+b)(c^2+ab+bc+ac)(a^2-ab+b^2)abab\\&\leqslant(a+b)\left(\frac{c^2+ab+bc+ac+a^2-ab+b^2+ab+ab}{4}\right)^4\end{aligned}$$