概率论与数理统计典型题解答指南

李汉龙 隋英 李选海 主编

GUIDE AND ANSWER FOR TYPICAL PROBLEMS IN PROBABILITY AND STATISTICS

典型例题分析详解评注
同步习题配答案参考
21套自测题自测对结果
精选课外习题进一步提高

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

2019

概率论与数理统计

典型题解答指南

主　编　李汉龙　隋　英　李选海
副主编　赵恩良　闫红梅
参　编　孙丽华　刘　丹
　　　　艾　瑛　顾艳丽　付春菊

机械工业出版社

本书是编者结合沈阳建筑大学多年的教学实践编写的. 全书共 9 章，其内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、自测试题及解答. 前 8 章配备了较多的典型例题和同步习题，并对典型例题给出了详细的分析、解答和评注. 第 9 章是自测试题及解答. 在本书附录中给出了“概率统计”课外习题全解.

本书可作为理工科院校本科各专业学生的概率论与数理统计课程学习指导书或考研参考书，也可作为相关课程教学人员的教学参考资料.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计典型题解答指南/李汉龙，隋英，李选海主编. —北京：机械工业出版社，2019. 1
ISBN 978-7-111-61686-3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… ②隋… ③李… Ⅲ. ①概率论—高等学校—题解 ②数理统计—高等学校—题解 Ⅳ. ①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 000634 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　乐　任正一
责任校对：王明欣　封面设计：鞠　杨
责任印制：张　博
三河市国英印务有限公司印刷
2019 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 20.25 印张 · 507 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-61686-3
定价：49.90 元

前　言

概率论与数理统计是高等院校一门十分重要的基础课，它对学生综合素质的培养及后续课程的学习起着极其重要的作用. 因此，学好概率论与数理统计至关重要，而概率论与数理统计题海茫茫，变化万千. 许多学生上课能听懂，解题却不知道从何下手或自己想不到，但经别人一点就明白. 究其原因，主要是概率论与数理统计课程内容多、学时少、讲授速度快、班级人数多. 许多学生在学习过程中囫囵吞枣，课堂上没有理解，课后又缺少归纳总结，结果事倍功半. 我们编写本书，旨在帮助读者较好地解决学习中的困难，其特点是针对不同的问题，对分析、解决问题的思路、方法和技巧加以指导. 编者一方面借鉴了国内同类教材的主要优点，另一方面融合了我校众多教师长期讲授该门课程的经验体会. 本书力求思路清晰、推证简洁且可读性强，从而满足广大师生的教学及学习需求.

本书与国内通用的各类优秀的概率论与数理统计课程教材相匹配，可同步使用，同时也可以作为考研辅导教材. 全书共分 9 章，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、自测试题及解答. 前 8 章配备了较多的典型例题和同步习题，并对典型例题给出了详细的分析、解答和评注. 第 9 章是自测试题及解答. 在本书附录中给出了“概率统计”课外习题全解.

本书以概率论与数理统计课程教材的内容为准，按题型归类，进行分析、解答与评注，归纳总结具有共性题目的解题方法，解题简洁、新颖，具有技巧性而又道理显然，期望帮助读者开阔思路，使所学知识融会贯通，灵活运用，达到事半功倍之效. 期望本书成为学生学习概率论与数理统计课程的良师益友.

本书前 8 章每章内容分为四部分：①内容概要，可以使读者了解课程内容；②典型例题分析、解答与评注，通过对例题的详细剖析、细致解答，指导读者掌握解题思路和解题方法；③本章小结，可帮助读者更清楚明了地把握学习要点，更深刻地理解该章的主要学习内容；④同步习题及解答，对本章重点习题进行梳理，帮助读者检验知识的掌握程度. 第 9 章给出了自测试题及解答，供读者自测之用.

本书第 1 章、第 2 章由隋英编写；第 3 章由闫红梅编写；第 4 章由刘丹编写；第 5 章由艾瑛编写；第 6 章由顾艳丽编写；第 7 章由赵恩良编写；第 8 章由孙丽华编写；第 9 章由李汉龙编写；附录由付春菊编写. 全书由李汉龙统稿，李汉龙、隋英、李选海定稿.

本书参考了国内出版的一些教材，见本书所附参考文献. 由于编者水平所限，书中不足之处在所难免，恳请读者、同行和专家批评指正.

编　者

目　录

第1章 随机事件及其概率

1.1 内容概要

1.1.1 基本概念

1. 随机试验

在概率论中，将满足以下特点的试验称为随机试验：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个可能结果会出现.

通常用 E 表示.

2. 样本空间

将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S.

3. 样本点

样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

4. 随机事件

把随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称为事件，通常记为 $A,B,C,\cdots$. 在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

5. 基本事件

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件.

6. 必然事件

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生，称为必然事件.

7. 不可能事件

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

8. 事件之间的关系及运算

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1) 事件的包含：事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$.

(2) 事件的相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(3) 和事件：事件 A、B 至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A\cup B$.

类似地，称$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件；称$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的和事件.

(4) 积事件：事件A,B同时发生，称为事件A与事件B的积事件，记作$A\cap B$或AB.

类似地，称$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件；称$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件.

(5) 差事件：事件A发生、事件B不发生，称为事件A与事件B的差事件，记作$A-B$或$A\overline{B}$.

(6) 互不相容(互斥)事件：事件A,B不能同时发生，称事件A与事件B为互不相容(互斥)事件，记作$A\cap B=\varnothing$.

(7) 对立(逆)事件：对每次试验而言，事件A,B中必有一个发生，且仅有一个发生，称事件A与事件B为对立(逆)事件. A的对立事件，记为$\overline{A}$.

A和$\overline{A}$满足：$A\cup\overline{A}=S, A\overline{A}=\varnothing, \overline{\overline{A}}=A$.

9. 概率

设E是随机试验，S是它的样本空间，对E的每一个事件A赋予一个实数，记为$P(A)$，称为随机事件A的概率，如果集合函数$P(\cdot)$满足下列条件：

(1) 非负性：对于每一个事件A，有$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：对于必然事件S，有$P(S)=1$；

(3) 可列可加性：设$A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容事件，即对于$i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

10. 等可能概型

如果随机试验E满足下列特点：

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性是相同的；

这样的试验称为等可能概型，也称为古典概型.

若古典概型的样本空间S中包含的基本事件的总数是n，事件A包含的基本事件的个数是m，则事件A的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

11. 几何概型

古典概率是在有限样本空间下进行的，为了克服这种局限性，我们将古典概型推广.

如果一个试验具有以下两个特点：

(1) 样本空间S是一个大小可以计量的几何区域(如线段、平面、立体)；

(2) 向区域内任意投一点，落在区域内任意点处都是“等可能的”，

那么，事件A的几何概率由下式计算：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的计量}}{S\text{ 的计量}}.$$

12. 条件概率

设A,B是两事件，且$P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率.

在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\ (P(B)>0).$$

13. 事件的独立性

设 A,B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B),$$

则称事件 A,B 相互独立，简称 A,B 独立.

设 A,B,C 是三个事件，如果满足：

$$P(AB)=P(A)P(B),P(BC)=P(B)P(C),P(AC)=P(A)P(C),$$

则称这三个事件 A,B,C 是两两独立的.

设 A,B,C 是三个事件，如果满足：

$$P(AB)=P(A)P(B),P(BC)=P(B)P(C),P(AC)=P(A)P(C),$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称这三个事件 A,B,C 是相互独立的.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，若对任意 $k(1<k\leqslant n)$，对任意 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

都成立，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

14. 可靠性

一个元件(或系统)能够正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性.

1.1.2 基本理论

1. 事件之间的关系及运算的性质

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

2. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(3) 设 A,B 是两事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),P(B)\geqslant P(A);$$

(4) 对于任一事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$;

(5) 对于任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(6) 对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

对于任意三个事件 A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC),$$

一般地,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

3. 和事件的概率常用结论

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B\overline{A})=P(A)+P(B-A)$;

(2) $P(A\cup B)=P(B)+P(A\overline{B})=P(B)+P(A-B)$;

(3) $P(A\cup B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)$;

(4) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$($A,B$ 独立时).

4. 差事件的概率常用结论

(1) 对任意事件 A,B,有 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$;

(2) 若 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$;

(3) 若 $AB=\varnothing$,则 $P(A-B)=P(A)$;

(4) $P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)$(A,B 独立时).

5. 实际推断原理

概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的.

6. 乘法定理

设 $P(A)>0$,则有 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$,

设 $P(B)>0$,则有 $P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$.

一般地,若 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$,则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

7. 全概率公式

设试验 E 的样本空间 S,A 为 E 的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i),$$

称为全概率公式.

8. 贝叶斯公式

设随机试验 E 的样本空间 S,A 为 E 的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(A)>0$,$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}(i=1,2,\cdots,n)$$

称为贝叶斯公式.

9. 独立性定理

(1) 定理 1:设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,若 A,B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$,反之亦然.

(2) 定理 2:若事件 A,B 相互独立,则下列各对事件

$$A \text{ 与 } \overline{B}, \overline{A} \text{ 与 } B, \overline{A} \text{ 与 } \overline{B}$$

也相互独立.

1.1.3 基本方法

1. 用事件之间的运算关系表示事件.

2. 事件概率的计算:

(1) 利用概率的性质;

(2) 利用等可能概型;

(3) 利用几何概型;

(4) 利用条件概率;

(5) 利用乘法定理;

(6) 利用全概率、贝叶斯公式;

(7) 利用事件的独立性.

1.2 典型例题分析、解答与评注

1.2.1 用事件之间的运算关系表示事件

要想求解一个事件发生的概率,首先要将所求的事件用正确的方式表述出来.本章正是利用事件之间的运算关系来表示事件,从而利用各种概率计算方法来求解事件的概率.

例 1.1 设 A,B,C 表示三个随机事件,试将下列事件用 A,B,C 表示出来.

(1) A 出现,B,C 不出现;

(2) A,B 都出现,C 不出现;

(3) 三个事件都出现;

(4) 三个事件至少有一个出现;

(5) 三个事件都不出现;

(6) 不多于一个事件出现;

(7) 不多于两个事件出现;

(8) 三个事件至少有两个出现;

(9) A,B 至少有一个出现,C 不出现;

(10) A,B,C 中恰好有两个出现.

分析 利用事件的和、差、积、对立等运算关系来表示事件.

解答 (1) A 出现用 A 表示,B,C 不出现用其对立事件表示,且同时发生,为积事件,所以表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) A,B 都出现,C 不出现同时发生,为积事件,所以表示为 $AB\overline{C}$;

(3) 三个事件都出现同时发生,为积事件,所以表示为 ABC;

(4) 三个事件至少有一个出现,为和事件,所以表示为 $A\cup B\cup C$;

(5) 三个事件都不出现同时发生,为积事件,所以表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(6) 不多于一个事件出现的对立事件是至少出现两个事件,所以表示为 $\overline{(AB)\cup(AC)\cup(BC)}$;

(7) 不多于两个事件出现的情况包含:三个事件都不出现、出现一个事件、出现两个事件,

情况复杂;而该事件的对立事件仅有一种情况:三个事件都出现,因此,用简单事件的对立事件来表示,所以表示为$\overline{ABC}$;

(8) 三个事件至少有两个出现是和事件,所以表示为$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$;

(9) A,B 至少有一个出现是和事件,同时 C 不出现为积事件,所以表示为$(A\cup B)\overline{C}$;

(10) 恰好有两个出现有三种互斥的情况,所以表示为$(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$.

评注 要注意各种运算关系的概率描述,正确使用事件的运算.对于复杂的事件,当其对立事件简单的时候,可用简单事件的对立事件来表示.

例 1.2 一批产品中有合格品和废品,从中有放回地抽取三个产品,每次取一个.试用事件的运算关系表示下列各个事件:

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品;

(2) 只有第一次抽到废品;

(3) 三次都抽到废品;

(4) 至少有一次抽到合格品;

(5) 只有两次抽到废品.

分析 对于具体问题的事件表示,首先要将已知事件用字母表示,然后再利用事件的运算关系来表示事件.

解答 设 A_i表示事件"第 i 次抽到废品",

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品,为和事件,所以表示为 $A_1\cup A_2$;

(2) 只有第一次抽到废品,第二次、第三次没有抽到废品,三个事件同时发生,为积事件,所以表示为 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(3) 三次都抽到废品同时发生,为积事件,所以表示为 $A_1A_2A_3$;

(4) 至少有一次抽到合格品,是和事件,所以表示为 $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$;或利用对立事件:全部抽到废品,所以表示为$\overline{A_1A_2A_3}$;

(5) 只有两次抽到废品,将所有情况列出,所以表示为$(A_1A_2\overline{A_3})\cup(A_1\overline{A_2}A_3)\cup(\overline{A_1}A_2A_3)$.

评注 利用事件的运算关系来表示事件,各事件的表示法并不一定唯一.

1.2.2 事件概率的计算

1. 利用概率的性质求概率

例 1.3 设 A,B 是两事件,且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$,问:

(1) 在什么条件下,$P(AB)$取得最大值,最大值是多少?

(2) 在什么条件下,$P(AB)$取得最小值,最小值是多少?

分析 利用和事件的概率公式,推出积事件概率,然后再分情况讨论.

解答 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

即

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

(1) 当 $P(A\cup B)$最小时,$P(AB)$取得最大值,

而 $A\subset B$ 时,即 $A\cup B=B$ 时,$P(A\cup B)$最小,

$P(A\cup B)=P(B)=0.7$,此时,

$$P(AB)=P(A)=0.6.$$

(2) 当 $P(A\cup B)$ 最大时，$P(AB)$ 取得最小值，

当 $A\cup B=S$ 时，$P(A\cup B)$ 最大，$P(A\cup B)=1$，此时，

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-1=0.3.$$

评注　$P(A\cup B)$ 是讨论的关键，特别是取最小值的情况要注意，不是 $P(A\cup B)=0$.

例 1.4　已知 A,B 两事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

分析　利用德摩根律、对立事件的概率、和事件的概率公式.

解答

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB),\end{aligned}$$

且

$$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B}),$$

故

$$P(B)=1-P(A)=1-p.$$

评注　多个概率的公式和性质的综合应用，要熟练掌握各公式，以免造成混淆.

例 1.5　设 A,B 是两事件，已知 $P(A)=p$，$P(B)=q$，$P(A\cup B)=r$，求 $P(A\overline{B})$.

分析　利用和事件和差事件的概率公式.

解答

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=p+q-r;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A-B)\\&=P(A)-P(AB)=r-q.\end{aligned}$$

评注　差事件与和事件的概率公式中都含有积事件的概率，通过积事件的概率将两个公式联立使用.

例 1.6　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=\dfrac{1}{6}$，$P(AC)=P(BC)=0$，求 A,B,C 均不发生的概率.

分析　先将所求事件利用事件的运算关系表示出来，再利用德摩根律、对立事件的概率、三个事件的和事件概率公式进行求解.

解答

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]\\&=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

评注　在三个事件的和事件概率公式中，条件 $P(AC)=P(BC)=0$ 中隐含着条件$P(ABC)=0$.

例 1.7　设 A,B,C 为随机事件，证明：$P(A-B-C)=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$.

分析　利用差事件的定义及相关性质证明.

证明　由式 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$，得

$$\begin{aligned}P(A-B-C)&=P(A\overline{B}-C)=P(A\overline{B})-P(A\overline{B}C)=P(A-B)-P(AC-B)\\&=P(A)-P(AB)-[P(AC)-P(ABC)]\\&=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC).\end{aligned}$$

评注 对于差事件的概率,重点掌握性质:$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$,做题时经常会用到.

2. 利用等可能概型求概率

例 1.8 有 n 个不同的球,每个球都可以同样的概率$\frac{1}{N}$被投到 $N(n\leqslant N)$个箱子中的每个箱中,试求下列事件的概率.

(1) 某指定 n 个箱子中各有一个球(A);

(2) 恰有 n 个箱子,其中各有一个球(B);

(3) 某指定箱子中恰有 $m(m\leqslant n)$个球(C).

分析 先确定样本空间和事件的样本点个数,然后利用等可能概型计算.

解答 样本空间:将 n 个不同的球,投到 N 个箱子去,共有 N^n种投法.

(1) 事件 A:将 n 个不同的球,在某指定 n 个箱子中各投一个,共有 $n!$种投法.
故由等可能概型可得

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 事件 B:恰有 n 个箱子,其中各有一个球,分两个步骤:

在 N 个箱子中选 n 个箱子,共有 C_N^n种方法,

将 n 个不同的球恰在 n 个箱子中各投一个,共有 $n!$种投法,

则由乘法法则,事件 B 共有 $n!C_N^n$种投法,故由等可能概型可得

$$P(B)=\frac{n!C_N^n}{N^n}.$$

(3) 事件 C:某指定箱子中恰有 $m(m\leqslant n)$个球,分两个步骤:

首先在 n 个不同的球中选 m 个球放在某指定箱子中,共有 C_n^m种选法,

然后将其余的 $n-m$ 个球任意地放在剩下的 $N-1$ 个箱子中,共有$(N-1)^{(n-m)}$种放法,所以由乘法法则,事件 C 共有 $C_n^m(N-1)^{(n-m)}$种放法,故由等可能概型可得

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{(n-m)}}{N^n}.$$

评注 使用等可能概型首先要明确样本空间和所求事件是什么,然后再利用等可能概型的公式进行求解.

例 1.9 将 15 名新生(其中有 3 名优秀生)随机地分配到三个班级中,其中一班 4 名,二班 5 名,三班 6 名,求:

(1) 每一个班级各分配到一名优秀生的概率;

(2) 3 名优秀生被分配到同一个班级的概率.

分析 先分配新生中的优秀生,然后按要求分配其他新生,注意分配过程中的所有可能性.

解答 15 名新生分别分配给一班 4 名,二班 5 名,三班 6 名的分法有 $C_{15}^4C_{11}^5C_6^6=\frac{15!}{4!5!6!}$种.

(1) 将 3 名优秀生分配给三个班级各一名,共有 $3!$种分法,

再将剩余的 12 名新生分配给一班 3 名,二班 4 名,三班 5 名,共有 $C_{12}^3C_9^4C_5^5=\frac{12!}{3!4!5!}$种分

法.根据乘法法则,每个班级分配到一名优秀生的分法有 $3!\frac{12!}{3!4!5!}=\frac{12!}{4!5!}$ 种,故其对应概率为

$$p=\frac{12!}{4!5!}\Big/\frac{15!}{4!5!6!}=\frac{12!6!}{15!}=\frac{24}{91}\approx 0.2637.$$

(2) 设事件 A_i="3 名优秀生全部分配到 i 班"($i=1,2,3$).

A_1 中所含基本事件个数 $m_1=C_{12}^1C_{11}^5=\frac{12!}{5!6!}$,

A_2 中所含基本事件个数 $m_2=C_{12}^2C_{10}^4=\frac{12!}{2!4!6!}$,

A_3 中所含基本事件个数 $m_3=C_{12}^3C_9^4=\frac{12!}{3!4!5!}$,

所以其对应概率为

$$P(A_1)=\frac{m_1}{n}=\frac{12!}{5!6!}\Big/\frac{15!}{4!5!6!}=\frac{4!12!}{15!}\approx 0.00879,$$

$$P(A_2)=\frac{m_2}{n}=\frac{12!}{2!4!6!}\Big/\frac{15!}{4!5!6!}=\frac{12!5!}{2!15!}\approx 0.02198,$$

$$P(A_3)=\frac{m_3}{n}=\frac{12!}{3!4!5!}\Big/\frac{15!}{4!5!6!}=\frac{12!6!}{3!15!}\approx 0.04396,$$

因为 A_1,A_2,A_3 互不相容,所以 3 名优秀生被分配到同一班级的概率为

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\approx 0.07473.$$

评注　实际问题求解概率应先设事件,然后根据所设事件来选择适当的求解方法.

例 1.10　一学生宿舍中有 6 名学生,求下列事件的概率:

(1) 6 名学生的生日都在星期天;

(2) 6 名学生的生日都不在星期天;

(3) 6 名学生的生日不都在星期天.

分析　每个学生的生日可能是 7 天中的任意一天,且等可能,故可使用等可能概型.

解答　设 A={6 名学生的生日都在星期天},

B={6 名学生的生日都不在星期天},

每个学生的生日可能是 7 天中的任意一天,且等可能,于是样本空间样本点的总数是 7^6.

(1) 事件 A:6 名学生的生日都在星期天只有一种情况,故

$$P(A)=\frac{1}{7^6};$$

(2) 事件 B:每个学生的生日可能是星期一至星期六中的任意一天,且等可能,于是事件 B 的基本事件的总数是 6^6,故

$$P(B)=\frac{6^6}{7^6}=\left(\frac{6}{7}\right)^6;$$

(3) 6 名学生的生日不都在星期天的对立事件是事件 A,故所求概率为

$$P(\overline{A})=1-\frac{1}{7^6}.$$

评注　实际问题求解概率应先设事件,然后根据所设事件来选择适当的求解方法.

例 1.11　从 1,2,…,10 这十个数中任取一个,假定各个数都以同样的概率被取中,取后

放回,先后取出 7 个数,求下列事件概率.

(1) 7 个数完全不相同;

(2) 不含有 1 和 10;

(3) 5 恰好出现两次;

(4) 6 至少出现两次;

(5) 取到的最大数恰好为 6.

分析 从 $1,2,\cdots,10$ 这十个数中任取一个,各个数都以同样的概率被取中,故可使用等可能概型.

解答 设 $A_1,A_2,\cdots,A_5$分别代表上述五个事件.

样本空间是 10 个不同元素允许重复的 7 个元素排列,所以样本点总数为 10^7.

(1) 事件 A_1要求所取 7 个数是互不相同的,考虑到各个数取出时有先后顺序之分,所以相当于从 10 个数中每次取出 7 个不同的元素的排列. 因此 A_1所包含的样本点数为 A_{10}^7,于是事件 A_1的概率为

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{A}_{10}^7}{10^7}.$$

(2) 事件 A_2所取的 7 个数中不含有 1 和 10. 所以,这 7 个数只能从 $2,3,4,5,6,7,8,9$ 中选取,相当于从 8 个不同元素中允许重复地取 7 个的排列,所以 A_2所包含样本点数为 8^7,于是事件 A_2的概率为

$$P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}.$$

(3) 事件 A_3中 5 出现两次,可以是 7 次取数中的任意两次,有 C_7^2种取法,

其余的 5 次,每次可以取剩下的 9 个数中的任一个,共有 9^5种取法,于是,A_3所包含的样本点总数为 $\mathrm{C}_7^2 9^5$. 则事件 A_3的概率为

$$P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_7^2 9^5}{10^7}.$$

(4) 事件 A_4是 6 个两两互不相容事件“6 恰好出现 k 次”$(k=2,3,4,5,6,7)$的和,其逆事件是“6 恰好出现一次或一次也不出现”,显然,逆事件比较简单,则事件 A_4的概率为

$$P(A_4)=1-P(\overline{A}_4)=1-\frac{\mathrm{C}_7^1 9^6+9^7}{10^7}.$$

(5) 事件 A_5是 6 个不同元素$(1,2,3,4,5,6)$允许重复的且最大数为 6 的 7 元排列. 这种排列可以分为 6 出现 1 次、2 次、3 次、4 次、5 次、6 次、7 次七类. 它们的排列数依次为 $\mathrm{C}_7^1 5^6$,$\mathrm{C}_7^2 5^5$,$\mathrm{C}_7^3 5^4$,$\mathrm{C}_7^4 5^3$,$\mathrm{C}_7^5 5^2$,$\mathrm{C}_7^6 5^1$,$\mathrm{C}_7^7 5^0$. 于是,

$$P(A_5)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{7}\mathrm{C}_7^k 5^{7-k}}{10^7}.$$

事件 A_5包含的样本点数也可以这样来考虑:最大数字不大于 6 的 7 元重复排列有 6^7种,它可以分为两类,一类是最大数恰好是 6 的 7 元重复排列,一类是最大数小于 6 的 7 元重复排列,排列数有 5^7种. 最大数恰好是 6 的 7 元重复排列总数为 6^7-5^7. 故

$$P(A_5)=\frac{6^7-5^7}{10^7}.$$

评注 该题中最关键的问题就是确定事件 A_4的样本点计算是使用可重复排列还是不可重

复排列.

例 1.12　在 1～3000 的整数中随机地取 1 个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少？

分析　先根据等可能概型确定已知事件的概率，然后再利用德摩根律、对立事件的概率、和事件的概率公式进行求解.

解答　设 A＝{取到的数能被 6 整除}；

B＝{取到的数能被 8 整除}；

根据等可能概型可知

$$P(A)=\frac{333}{2000},P(B)=\frac{250}{2000},P(AB)=\frac{83}{2000},$$

则所求概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-\left(\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000}\right)=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

评注　既不能被 6 整除，又不能被 8 整除同时发生，因此是积事件，正确表示所求事件是求解问题的关键.

例 1.13　袋中有 a 个黑球，b 个白球，现将球随机地一个个摸出来，求第 k 次摸出的球是黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

分析　利用等可能概型求解问题.

解答　将 $a+b$ 个球编号，把球依摸出的先后次序排队，则样本空间样本点总数就是 $a+b$ 个不同元素的全排列 $(a+b)!$.

设 A_k＝“第 k 次摸出黑球”，这相当于在第 k 个位置放一个黑球，在其余 $(a+b-1)$ 个位置上放另外 $(a+b-1)$ 个球，所以，A_k 包含的样本点数为 $a(a+b-1)!$，所以，由古典概型 A_k 的概率为

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

特别地，如果每次抽取完再放回，则第 k 次摸出的球是黑球的概率仍然是

$$P(A_k)=\frac{a}{a+b}.$$

评注　无论是有放回抽样还是无放回抽样，结果都是一样的：每个人摸出的球是黑球的概率都是一样的，与抽取的先后顺序无关.

例 1.14　设一批零件共有 100 件，其中合格品 95 件，次品 5 件，从中任取 10 件，求：

(1) 10 件全是合格品的概率；

(2) 恰有 2 件次品的概率.

分析　利用等可能概型求解问题.

解答　样本空间：100 件零件从中任取 10 件，则样本空间样本点总数就是 C_{100}^{10}.

(1) 设 A＝{10 件全是合格品}；

10 件合格品只能从 95 件合格品任取，共有 C_{95}^{10} 种取法，故