普通高等教育“十三五”规划教材

# 复变函数与积分变换

宋桂荣　丁蕾　陈岩　编

FUNCTION OF COMPLEX VARIABLE AND INTEGRAL TRANSFORM

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

# 复变函数与积分变换

宋桂荣　丁　蕾　陈　岩　编



机　械　工　业　出　版　社

本书依据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，为高等院校工科类各专业学生编写，是高等数学的后继课．全书内容丰富、思路清晰、结构严谨、体系完整，具有推理严密、概念准确、叙述详略得当的特点．书中在应用高等数学知识进行推理论证时，对涉及的高等数学知识都给予了详细的注解，更有利于学生的学习和掌握．书中的例题经过精心编选，每节都配备了基本题和提高题．

本书内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、傅里叶变换、拉普拉斯变换．书末还附有傅里叶变换简表、拉普拉斯变换简表及习题答案．

本书适当高等院校“复变函数与积分变换”课程教学使用，也可供相关自学者、工程技术人员参考、使用．


**图书在版编目（CIP）数据**

复变函数与积分变换/宋桂荣，丁蕾，陈岩编．—北京：机械工业出版社，2018.12

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-111-61248-3

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①宋…②丁…③陈…　Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 249847 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　乐
责任校对：刘雅娜　封面设计：鞠　杨
责任印制：常天培
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷
2019 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
184mm × 260mm · 8.5 印张 · 206 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-61248-3
定价：29.00 元

# 前　　言

复变函数与积分变换是高等工科院校许多专业重要的一门基础课，更是自然科学与工程技术中常用的数学工具，已经被广泛应用到自然科学的众多领域．因此，复变函数与积分变函的理论与方法，对于高等理工院校的学生来说是必不可少的数学基础知识，有着重要的意义．通过对本门课程的学习，学生可以较系统、完整地了解复变函数与积分变换理论的基本内容，学会借助高等数学中的相关知识处理复变函数的一些基本问题，包括解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、洛朗级数、留数理论、傅里叶变换及拉普拉斯变换等．复变函数是高等数学的后继课程，学生只有在较全面、系统地学习完高等数学课程后再学习该课程，才能更好地应用高等数学的方法去解决复变函数中的论证及推理，保证学习复变函数与积分变换的效率．

在以往的教学过程中，我们所用的教材虽然也做到了高等数学与复变函数相关知识的衔接，但是对于这门课的教学也存在几点不足：

第一，对高等数学的重、难点知识涉及较多，而对这些知识的相关内容讲解又较少，这样给学生学习复变函数带来了很大困难．

第二，复数与复变函数一章中复数内容过多，而复数知识学生在高中时已经学习过，又因为这门课的教学内容多、课时少，所以这部分知识显得啰嗦．

本书编写组成员多年讲授该课程，理论基础扎实，教学经验丰富，对其理论、应用和发展有很好的理解和把握．我们根据多年的教学实践和体会，参照教育部高等学校教材编写的相关文件编写了这部教材，系统介绍了复变函数与积分变换的基本理论、方法与应用．

在本教材的编写中我们努力做到以下几点：

第一，内容编写上注重复变函数与高等数学中一元、二元函数的比较，通过进行类比，从内容上引导学生熟练掌握复变函数中的许多概念，如函数、极限、连续、导数、积分等，这些概念形式上与高等数学中一元函数的相关概念类似，但却有本质上的不同．本教材既指出其相似之处，更强调其本质上的不同，注重两者之间的联系与区别．

第二，本教材强调复变函数和积分变换具体的应用，这能使学生在学习过程中有明确的目的性，有利于培养应用型人才．

第三，本教材内容丰富、语言简明通俗、叙述详略得当、例题丰富全面，每节配有练习题，分为 A 类和 B 类．A 类是基本题，围绕本节知识内容进行学习和训练；B 类是提高题，供学有余力的学生进一步提高数学水平选用．

为此，我们对原用教材进行了全面审视，力求站在现代科学技术水平的高度上，从培养 21 世纪高素质创新人才的目标出发，进行新的构想和精选基本内容．我们删去学生高中学过的内容，补充在讲授复变函数时用到的高等数学的相关知识，但由于课时有限，这部分知识将放在书下的注解中，以便于学生自学．本教材的编写顺应了教育部关于高等工科专业基础

教学改革方向，对促进高校工科专业基础教学的改革，推进课程建设，深化教学内容，加强学生综合实践能力和创新能力的培养具有一定的现实意义和实用价值.

本书第一、二章由陈岩编写，第三、四章由宋桂荣编写，第五、六、七章及附录部分由丁蕾编写. 全书由宋桂荣统稿.

由于编者水平和时间有限，本书肯定还有许多不完善和需要改进之处，祈望广大教师和读者不吝指正.

编　者

# 目　录

# 第 1 章 复数与复变函数

【学习目标】

1. 掌握复数的基本运算、乘幂与方根.
2. 理解复平面与复球面.
3. 理解复变函数概念与复变函数的极限、连续性.

## 1.1 复数

### 1.1.1 复数的概念

复数的概念起源与求解方程的根. 在初等代数中，方程 $x^2 = -1$ 是没有根的. 由实际问题需要，为求解类似方程的根，引入虚数单位 i，规定 $\mathrm{i}^2 = -1$，也就是说，i 是方程 $x^2 = -1$ 的一个根.

**定义 1.1.1** 对任意二实数 $x$，$y$，称 $z = x + \mathrm{i}y$ 为复数，其中 $x$，$y$ 分别称为 $z$ 的实部与虚部，记为 $x = \mathrm{Re}(z)$，$y = \mathrm{Im}(z)$. 表示式 $z = x + \mathrm{i}y$ 为 $z$ 的代数表示式.

特别地，当 $x = 0$，$y \neq 0$ 时，$z = \mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y = 0$ 时，$z = x$，此时 $z$ 视为实数. $z = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 且 $y = 0$.

与 $z$ 实部相同，虚部绝对值相等符号相反的复数，称为 $z$ 的共轭复数，记为 $\bar{z}$，$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

### 1.1.2 复数的几何表示

**1. 复平面**

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与一对有序实数组 $(x, y)$ 一一对应，从而与平面直角坐标系上的点一一对应. 称 $x$ 轴为实轴，$y$ 轴为虚轴，两轴所在平面称为复平面或者 $z$ 平面，可以用复平面上的点来表示复数.

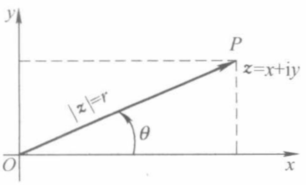


图 1.1.1

在复平面上，点 $z$ 还与从原点指向点 $z$ 的平面向量一一对应，因此复数 $z$ 也可以用从原点指向点 $z$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示（见图 1.1.1）. 向量的长度称为复数 $z$ 的模或绝对值，记作 $|z|$. 当

$z\neq0$时，以正实轴为始边，$\overrightarrow{OP}$为终边的角的弧度数 $\theta$ 称为 $z$ 的辐角，记作 $\operatorname{Arg} z$.

显然，复数 $z$ 的模与辐角满足

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\tan(\operatorname{Arg}z)=\frac{y}{x}.$$

任意非零复数都有无穷多个辐角，将其中满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的角 $\theta_0$ 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，记作 $\theta_0=\arg z$，那么 $\operatorname{Arg} z=\theta_0+2k\pi$（$k$ 为任意整数）.

当 $z=0$，即 $|z|=0$ 时，辐角不确定；当 $z\neq0$ 时，其辐角主值可通过解三角方程 $\tan(\arg z)=\dfrac{y}{x}$，$-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 来确定：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,y\in\mathbf{R},\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y\neq0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi, & x<0,y\neq0,\\ \pi, & x<0,y=0,\end{cases}\tag{1.1.1}$$

其中 $z\neq0$，$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

利用直角坐标系与极坐标系的关系：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z$ 的代数式可化为：

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

称为复数的三角表示式.

再由欧拉（Euler）公式[⊖] $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，又可得

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

称为复数的指数表示式.

复数的各种表示式，根据需要可以互相转换.

**例 1.1.1** 将复数 $z=1+\mathrm{i}$ 化为三角表示式与指数表示式.

**解** 首先 $|z|=\sqrt{2}$，点 $z$ 位于第一象限，由式(1.1.1) 知 $\theta=\arg z=\arctan1=\dfrac{\pi}{4}$，因此，$z$ 的三角表示式为

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$z$ 的指数表示式为

$$z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}.$$

⊖ 欧拉（Euler）公式是由 $\mathrm{e}^x$，$\sin x$ 和 $\cos x$ 的麦克劳林级数展开式得到的.

**2. 复球面**

下面介绍一种利用球面上的点表示复数的方法．

取一个与复平面相切于原点 $O$ 的球面，切点记为 $S$，$S$ 与 $O$ 重合，称为南极．过 $S$ 作垂直于复平面的直线交球面于另外一点 $N$，$N$ 称为北极．那么复平面上任一异于原点的点 $z$ 与球面上北极 $N$ 的连线交球面于唯一一点 $P$，$P$ 与 $z$ 一一对应．当 $|z|\to\infty$时，称 $z$ 是一个无穷大，此时与 $z$ 对应的 $P\to N$. 我们把复平面上的"无穷大"视为一个点，记作$\infty$，称为无穷远点，那么这个点与复球面上的北极 $N$ 对应．这样球面上的每一个点也都对应一个复数，我们就可以用球面上的点来表示复数．这个球面，称为复球面（见图 1.1.2）．

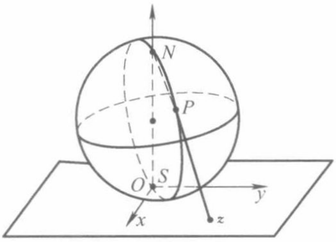



图　1.1.2

包含无穷远点的复平面称为扩充复平面，不包含无穷远点的复平面称为有限平面．如无特殊说明，以后所称的复平面指的是有限平面．复球面可以把扩充复平面上的无穷远点明确标示出来，这是它相对复平面的优势．

对于复数$\infty$，其实部、虚部、辐角均无意义，规定其模为正无穷大，并对其四则运算做如下规定：

$$\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty),$$

$$\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty),$$

$$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty \quad (\alpha\neq 0),$$

$$\frac{\alpha}{\infty}=0,\ \frac{\infty}{\alpha}=\infty \quad (\alpha\neq\infty),\ \frac{\alpha}{0}=\infty \quad (\alpha\neq 0,\text{但可为无穷大}).$$

与实变函数中一样，其他与$\infty$有关的运算，仍为待定型，其结果不确定．

## 1.2　复数的运算

### 1.2.1　复数的代数运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，定义 $z_1$ 与 $z_2$ 的四则运算如下：

（1）和差 $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$；

（2）乘积 $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$；

（3）商 $z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$，其中 $z_2\neq 0$.

上述运算满足交换律、结合律和分配律：

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\ z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1;$$

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,\ z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3;$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

**例 1.2.1** 设 $z=\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,求 $z$ 的三角表示式与指数表示式.

**解** $z$ 的代数表示式为

$$z=\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

易知 $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且点 $z$ 位于第二象限，由式(1.1.1) 知

$$\arg z=\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right)+\pi=\arctan(-1)+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3}{4}\pi,$$

从而 $z$ 的三角表示式为

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

$z$ 的指数表示式为 $\qquad z=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}.$

## 1.2.2 共轭复数的运算

由复数的四则运算，很容易得到 $z=x+\mathrm{i}y$ 与其共轭复数 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 的以下运算性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}(z_2\neq0)$；

(2) $\bar{\bar{z}}=z$；

(3) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

(4) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

## 1.2.3 复数的代数运算的几何表示

复数的加减法和相应的向量的加减法是一致的（见图 1.2.1）：由图 1.2.1 可知

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ |z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

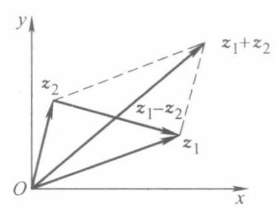



图 1.2.1

复数 $z$ 与其共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面上关于实轴对称（见图 1.2.2），因而 $|z|=|\bar{z}|$，如果 $z\neq0$，且不在负实轴上，还有 $\arg z=-\arg\bar{z}$.

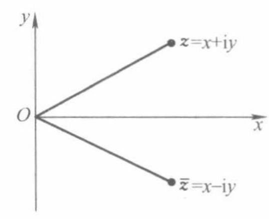


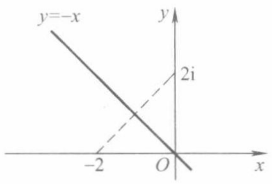

图 1.2.2

很多平面图形可以用复数形式的方程（或不等式）来表示．同样，给定复数形式的方程（或不等式），也可以确定它所表示的平面图形．如，$|z|=1$ 表示复平面上以原点为圆心的单位圆．

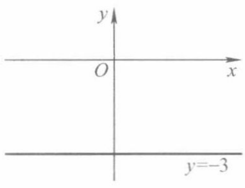
**例 1.2.2** 直线 $l$ 通过点 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，求 $l$ 的复数形式方程．

**解** 平面上，通过点 $(x_1,y_1)$ 与 $(x_2,y_2)$ 的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\ y=y_1+t(y_2-y_1),\end{cases}\qquad -\infty<t<\infty.$$




a)




b)

图　1.2.3

从而

$$z=x+\mathrm{i}y=z_1+t(z_2-z_1),\quad -\infty<t<\infty,$$

这就是 $l$ 的参数式方程.

**例 1.2.3**　求下列方程所代表的曲线:

(1) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$; (2) $\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}+\bar{z})=4$.

**解**　(1) 在复平面上, $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$表示到点 2i 与点 $-2$ 的距离相等的点的轨迹, 也就是点 2i 与点 $-2$ 的连线的垂直平分线 (见图 1.2.3a);

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$, 则 $\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$, 于是 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=1-y$, 由已知 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$, 立得所求曲线的直角坐标方程为 $y=-3$ (见图 1.2.3b).

## 1.2.4　复数的乘幂与方根

### 1. 乘积与商

利用复数的三角表示式与指数表示式, 很容易得到以下结论及其几何意义:

**定理 1.2.1**　两个复数的乘积的模等于它们的模的乘积, 乘积的辐角等于它们的辐角的和.

**定理 1.2.2**　两个复数的商的模等于它们的模的商, 商的辐角等于被除数与除数的辐角的差.

这是因为, 设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 那么显然

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\quad (r_2\neq 0).$$

定理说明, 向量 $z_1z_2$ 表示的是向量 $z_1$ 逆时针转过 $\mathrm{Arg}\,z_2$, 同时伸缩$|z_2|$倍得到的. 特别地, 当$|z_2|=1$ 时, $z_1z_2$ 变成了只是旋转. 如 i$z$ 就是将向量 $z$ 逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$. 而如果 $\arg z_2=0$, 那么 $z_1z_2$ 表示将 $z_1$ 伸缩$|z_2|$倍.

**例 1.2.4**　已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 与 $z_2=2+\mathrm{i}$, 求它的另外一个顶点.

**解**　设第三个顶点为 $z_3$, 根据复数的乘法与正三角形的性质, 有

$$z_3-z_1=\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1),$$

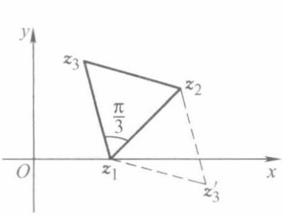



图　1.2.4

也就是说将正三角形一边 $z_2-z_1$ 逆时针或者顺时针旋转$\frac{\pi}{3}$, 得到另外一边 $z_3-z_1$, 其顶点 $z_3$ 即为所求 (见图 1.2.4):

$$z_3=z_1+\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1)=1+\left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right](1+\mathrm{i}),$$

解得 $z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 或 $z_3'=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

**2. 幂与方根**

由定理1.2.1，可知复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 $n$ 次幂

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta),\ n\text{ 为正整数}. \tag{1.2.1}$$

规定 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$，那么上式当 $n$ 为负整数时也成立.

特别地，当 $r=1$ 时，得到棣莫弗（De Moivre）公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.2.2}$$

利用式(1.2.1)与式(1.2.2)我们可求方程 $w^n=z$ 的根 $w$，$w=\sqrt[n]{z}$ 称为 $z$ 的 $n$ 次方根. 方法如下：

令 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，那么由式(1.2.1)有

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

于是

$$\rho^n=r,\quad \cos n\varphi=\cos\theta,\quad \sin n\varphi=\sin\theta$$

解得

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\ (k\text{ 为任意整数}),$$

因此

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ (k\text{ 为任意整数}). \tag{1.2.3}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 $n$ 个相异的根：

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

$k$ 取其他整数时，上述结果重复出现. 所以 $w_0$，$w_1$，…，$w_{n-1}$ 即为复数 $z$ 的 $n$ 个不同的 $n$ 次方根.

几何上，$\sqrt[n]{z}$ 是以原点为圆心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点.

**例 1.2.5** 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

**解** 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，由式(1.2.3)，

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),$$

令 $k=0$，1，2，3，得

$$w_0=2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),\ w_1=2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2=2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right),\ w_3=2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

如图 1.2.5 所示，这四个根是内接于圆心在原点，半径为 $2^{\frac{1}{8}}$ 的圆的正方形的四个顶点.

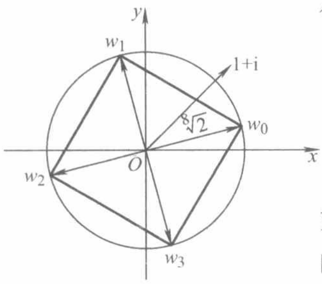


图　1.2.5

# 1.3　复变函数

## 1.3.1　区域

### 1. 开集

复平面上集合 $\{z\,||z-z_0|<\delta\}$ 称为 $z_0$ 的 $\delta$ 邻域，集合 $\{z\,|0<|z-z_0|<\delta\}$ 称为 $z_0$ 的去心 $\delta$ 邻域.

设 $G$ 为一平面点集，$z_0$ 为 $G$ 中任一点．如果存在 $z_0$ 的一个邻域，该邻域完整包含于 $G$，那么称 $z_0$ 为 $G$ 的内点．如果 $G$ 的每一点都是内点，则称 $G$ 为一个开集.

### 2. 区域

如果平面点集 $D$ 中任何一点都可以用完全属于 $D$ 的折线连接起来，称 $D$ 是连通的.

连通的开集称为区域.

设 $D$ 是一平面区域．如果点 $P$ 的任意邻域都既有属于 $D$ 的点，又有不属于 $D$ 的点，这样的点 $P$ 称为 $D$ 的边界点．$D$ 的边界点的集合称为 $D$ 的边界．区域 $D$ 与其边界的集合构成闭区域，简称闭域，记为 $\overline{D}$.

### 3. 单连通域与多连通域

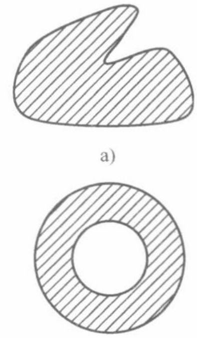
设曲线 $C$ 为区域 $D$ 内一条连续曲线，如果 $C$ 没有重合的点，称 $C$ 是一条简单曲线或若尔当（Jordan）曲线．如果简单曲线 $C$ 的起点与终点重合，称 $C$ 为简单闭曲线（见图 1.3.1）.

a) 简单、闭　b) 简单、不闭　c) 不简单、闭　d) 不简单、不闭

图　1.3.1

如果区域 $D$ 中任一简单闭曲线的内部总属于 $D$，则称 $D$ 是单连通域，否则，称其为多连通（或复连通）的（见图 1.3.2）．

显然，单连通域具有这样的特征：任何一条域内的简单闭曲线总可以通过连续的变形缩为域内一点，多连通域不具备这样的特征．



a)

b)

图 1.3.2

a）单连通域 b）多连通域

## 1.3.2 复变函数

### 1. 复变函数的定义

**定义 1.3.1** 设 $G$ 为复平面上一个点集．如果存在法则 $f$，$G$ 中每个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 按照法则 $f$ 都与一个或几个复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 对应，那么称复变数 $w$ 是复变数 $z$ 的函数，简称复变函数，记作 $w=f(z)$．

集合 $G$ 称为 $f(z)$ 的定义集合，$G$ 中所有 $z$ 对应的一切 $w$ 值所成的集合 $G^*$，称为函数值集合．

如果 $z$ 对应一个 $w$，称 $f(z)$ 是单值的；如果 $z$ 对应两个或两个以上的 $w$，则称 $f(z)$ 是多值的，如 $w=\sqrt[3]{z}$.

如无特殊说明，以后的讨论中，$f(z)$ 均为单值函数，定义集 $G$ 均为平面区域，称为定义域．

对复变函数 $w=f(z)=u+\mathrm{i}v$，由于 $z=x+\mathrm{i}y$ 是由一对有序实数 $(x,y)$ 决定的，从而 $u$，$v$ 也由 $(x,y)$ 决定，即 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，也就是说

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

这说明复变函数 $f(z)$ 是与一对有序实变二元函数 $(u(x,y),v(x,y))$ 对应的．如 $w=z^2$．令 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，那么 $u+\mathrm{i}v=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，因而 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$.

### 2. 映射

实变函数的函数关系可以通过几何图形直观表示，对于复变函数，由于它反映了两对变量的对应关系，因而无法在同一个平面或空间中表示，它表示的是两个复平面上的点集之间的对应关系．

设自变量 $z$ 是 $z$ 平面上的点，因变量 $w$ 是 $w$ 平面上的点，那么函数 $w=f(z)$ 在几何上即为将 $z$ 平面上的点集 $G$ 映到 $w$ 平面上的点集 $G^*$ 的映射．$w$ 称为 $z$ 的像，$z$ 称为 $w$ 的原像．

例如，函数 $w=\bar{z}$，将 $z_1=2+3\mathrm{i}$ 映射成 $w_1=2-3\mathrm{i}$；$z_2=1-2\mathrm{i}$ 映射成 $w_2=1+2\mathrm{i}$，$\triangle ABC$ 映射成 $\triangle A'B'C'$（见图 1.3.3a）．如果把 $z$ 平面和 $w$ 平面重叠在一起，可以看到，函数 $w=\bar{z}$ 是关于实轴的一个对称映射（见图 1.3.3b）．

跟实变函数一样，复变函数也有反函数的概念．设函数 $w=f(z)$ 的定义集合为 $z$ 平面上的集合 $G$，函数值集合为 $w$ 平面上的

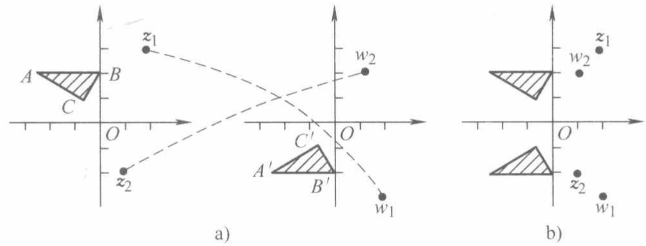



图　1.3.3

集合 $G^*$，那么 $G^*$ 中的每一个点必将对应着 $G$ 中的一个或者几个点，按照复变函数的定义，$G^*$ 上就定义了一个函数 $z=\varphi(w)$，称为函数 $w=f(z)$ 的反函数，或者映射 $w=f(z)$ 的逆映射.

以后，我们不再区分函数与映射. 如果函数 $w=f(z)$ 与它的反函数 $z=\varphi(w)$ 都是单值的，称函数 $w=f(z)$ 是一一的，也称集合 $G$ 与 $G^*$ 是一一对应的.

## 1.3.3 复变函数的极限与连续性

### 1. 复变函数的极限

**定义 1.3.2**　设函数 $w=f(z)$ 在 $z_0$ 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义. 如果存在确定的数 $A$，满足对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta$，$0<\delta\leqslant\rho$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

则称 $A$ 为 $f(z)$ 在 $z\to z_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，或者记为当 $z\to z_0$ 时，$f(z)\to A$（见图 1.3.4）.

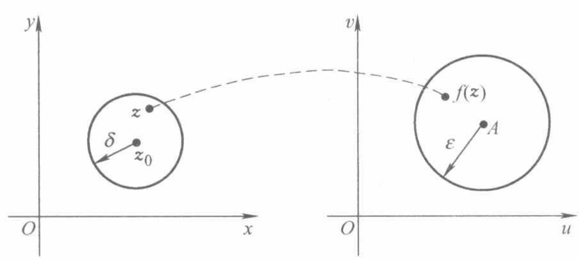



图　1.3.4

这个定义与一元实变函数极限的定义十分类似，只不过，其中的邻域为平面上的圆域. 其几何意义也十分类似：当变点 $z$ 进入 $z_0$ 的充分小（由 $\varepsilon$ 决定）的去心邻域时，其像点 $f(z)$ 就落入 $A$ 的预先给定的 $\varepsilon$ 邻域中.

与一元实变函数极限的定义不同的是，定义中 $z\to z_0$ 的方式是任意的. 也就是说，如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，那么无论 $z$ 从哪个方向，以哪种方式趋于 $z_0$，$f(z)$ 都趋于同一个数值 $A$，这比一元函数极限定义的要求苛刻得多.

由于复变函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z\to z_0$ 对应 $(x,y)\to(x_0,y_0)$，从而

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)]$$
$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)+\mathrm{i}\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y).\tag{1.3.1}$$

这样复变函数 $w=f(z)$ 的极限问题就转化为两个二元实变函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 的极限问题.

设$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，不难证明，复变函数具有如下运算法则：

（1）$\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$；

（3）若 $B\neq 0$，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$.

### 2. 复变函数的连续性

**定义 1.3.3** 若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称$f(z)$ 在 $z_0$ 是连续的.如果$f(z)$ 在区域 $D$ 内处处连续，称$f(z)$ 在 $D$ 内连续.

由式(1.3.1)，$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是二元函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 连续.例如函数$f(z)=\dfrac{1}{x-y}+2xy\mathrm{i}$ 在平面上除直线 $x=y$ 外，处处连续.

需要注意的是，$f(z)$ 在曲线 $C$ 上 $z_0$ 处连续的意义是指$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，$z\in C$.

在闭曲线，或包括端点在内的曲线段上连续的函数$f(z)$，在曲线上是有界的.

## 习　题　一

### A 类

1. 求下列复数的模、辐角：

（1）$z=-1-\mathrm{i}$；　　（2）$z=\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$；

（3）$z=\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$；　　（4）$z=\dfrac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$.

2. 将下列复数化为三角表示式与指数表示式：

（1）$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；　　（2）$1+\mathrm{i}\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$；

（3）$-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$；　　（4）$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.