最·新·版

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP
海文考研

叶盛标 主编

考研数学 数学二

考前预测8套卷

✓ 精挑细选考前预测8套题

✓ 图文并茂的答案详尽解析

✓ 高效易记的歌诀方法总结

✓ 开启全新的冲刺备考体验

中国出版集团 研究出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学考前预测8套卷. 数学二 / 叶盛标主编.
—北京:研究出版社，2016.10
ISBN 978-7-5199-0004-5

Ⅰ.①考… Ⅱ.①叶… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 253043 号

考研数学考前预测 8 套卷 · 数学二

作　　者　叶盛标 主编
责任编辑　寇颖丹
出版发行　研究出版社
地　　址　北京市东城区沙滩北街 2 号中研楼
邮政编码　100009
电　　话　010—64257481(总编室) 010—64267325(发行部)
网　　址　www.yjcbs.com
电子信箱　yjcbsfxb@126.com
印　　刷　三河市越阳印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8.25
版　　次　2016 年 10 月第 1 版　2016 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5199-0004-5
定　　价　28.00 元

使用说明

《考研数学考前预测 8 套卷》系列分数学一、数学二、数学三三册，每册各含“考研数学考前预测卷”八套。特别在题号的右上角标注了[1],[2],[3]，表明该题的适用范围，例如(23)[1]，表明第(23)题只适用于数一考生。未标注者，数一、数二和数三的考生均可以做，考生可以根据个人的学习能力和精力自主选择一册或多册，也就是每位考生最多可做 24 份试卷。

“以考纲为纲，以课本为本，以思维定势拿高分，以常考题型论输赢！”是本试题集的指导思想。编者非常用心，精心甄选试题。试卷中突出了历年来考试的全部热点，涵盖了“考试大纲”中的全部考点。

本套考前预测卷的题目都有完整详细的答案和解析，在解析和答案的右侧用歌诀这种为考生所喜闻乐见的形式，旁注了解题思路，解题方法，一看就懂，一学就会，便于记忆，便于操作。这是本系列的一大特色。

本套考前预测卷在内部刊印多年，在网上发布多年，经多次修改定稿。不足之处敬请各位同仁和使用本书的考生不吝指正，再版再改，力争更加完美！更加适用！

叶盛标
2016 年 9 月 20 日
于武昌巡司河畔

目录

考研数学考前预测卷(一)

一、选择题:第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列各题给出的四个选项中,只有一个选项符合试题要求.

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0, f'(0)=-1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}=$ ( )

(A) 2. (B) e^{-2}. (C) $e^{\frac{1}{2}}$. (D) e^{2}.

(2) 方程 $x-e\ln|x|=1$ 的实根的个数为 ( )

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(3) 设 $z=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 问在点 $(0,0)$ 处函数 ( )

(A) 不连续.

(B) 连续,但偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 不存在.

(C) 连续且偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在,但不可微.

(D) 全微分存在但一阶偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 不连续.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$,则 $f'(1)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{n(n+1)}$. (B) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$. (C) $\dfrac{1}{n+1}$. (D) $\dfrac{(-1)^{n}}{n+1}$.

(5) 若 $I=\dfrac{1}{s}\int_0^{st} f\left(t+\dfrac{x}{s}\right)dx\,(s>0,t>0)$,则 I 的值 ( )

(A) 依赖于 t,s,x. (B) 依赖于 t 和 s.

(C) 依赖于 t,不依赖于 s. (D) 依赖于 s 和 x.

(6) 设 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,dx=5, f(\pi)=3$,则 $f(0)=$ ( )

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

(7) 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆矩阵,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是三维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\neq-\boldsymbol{\beta}$,若满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\alpha}$,则下述结论正确的是 ( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似.

(B) $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似.

(D) $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解向量，则不是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

二、填空题：第 9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，则 $y^{(n)}=$ ________.

(10) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，则 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 满足 $y''+4y'+4y=0,y(0)=0,y'(0)=1$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(13) [1,2]设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t,\\ y=\mathrm{e}^{-t}\cos t.\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________.

(14) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，则 $k=$ ________.

三、解答题：第 15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

设 $x_1>0$，且 $x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(16)(本题满分 10 分)

证明由方程 $u = y + x\varphi(u)$ 确定的函数 $u = u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$,在曲线 l 任意一点 $(x, f(x))(x \neq 0)$ 作曲线的切线,此切线在 x 轴上的截距记作 $\varphi(x)$,证明 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x)}{x}$ 存在并求出极限值.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_{D} xy^2 \, dx dy$,其中 $D = \{(x,y) \mid \sqrt{2x - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}\}$.

(19)(本题满分 10 分)

将 $y=y(x)$ 所满足的微分方程 $y''+(x+e^{2y})y'^3=0$，变换为 $x=x(y)$ 所满足的微分方程，求此微分方程的通解.

(20)(本题满分 11 分)

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 满足下列两个条件：

(Ⅰ) 通过(0,0) 和(1,2) 两点，且 $a<0$；

(Ⅱ) 与抛物线 $y=-x^2+2x$ 围成的图形面积最小.

试求 a,b,c 的值.

(21)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f'(x)>0(0<x<1)$，$f(0)=0$，证明：存在 $\lambda,\mu\in(0,1)$，使得 $\lambda+\mu=1$，有

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{f'(\mu)}{f(\mu)}.$$

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=r<n$.

(Ⅰ) 证明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有且仅有 $n-r+1$ 个线性无关的解；

(Ⅱ) 若 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=b,\\2x_1+x_2+3x_3+ax_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解，求 a,b 及方程组的通解.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3\,(a<0)$ 通过正交变换化为标准形 $2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$.

(Ⅰ) 求常数 a,b；

(Ⅱ) 求正交变换矩阵；

(Ⅲ) 当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，求二次型的最大值.

考研数学考前预测卷(一) 答案解析

一、选择题

(1)**【答案】** B.

【解析】

$$\lim_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln[1+2f(x)]}{\sin x}}\quad(1^{\infty})$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+2f(x)]}{\sin x}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x)}{x}}$$
$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}}$$
$$\overset{\text{导数}}{\underset{\text{定义}}{=\!=}}e^{2f'(0)}=e^{-2}.$$

选(B).

本题还可用特例法,取 $f(x)=-x$.

$$\lim_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x}{x}}=e^{-2}.$$

(2)**【答案】** C.

【解析】 令 $f(x)=x-e\ln|x|-1$,定义域:$x\neq 0$.

$f'(x)=1-\dfrac{e}{x}$,令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=e$.

	$-\infty$	$(-\infty,0)$	0	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$	$+\infty$
$f'(x)$		+		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	↘	−1	↗	$+\infty$

因此,共有三个实根. 选(C).

(3)**【答案】** D.

【解析】 因为
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}z(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=z(0,0),$$
所以 $z(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 排除(A).

$$z'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x+0,0)-z(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0;$$

同理,$z'_y(0,0)=0$. 所以 $z(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在,排除(B).

8 道选择:
定、计、排、特

强行代入,
定型定法,
以洛为主,
单、夹、积、导.

洛:洛必达法则.
单:单调有界数列有极限.
夹:夹逼定理.
积:定积分的定义.
导:导数的定义.

幂指函数,
对数恒等.

特例特法,
瞬间搞定.

函数性态,
导数搞定.

连、偏、微中,
关系定理.

又 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-\left[z'_x(0,0)\Delta x+z'_y(0,0)\Delta y\right]}{\rho}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta x\cdot\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=0,$$

所以 $z(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. 排除(C).

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$z'_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z'_y(x,y)=x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时,

$$z'_x(0,0)=0,z'_y(0,0)=0.$$

$z'_x(x,y)$ 对 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限,当取路径 $y=x$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}}z'_x(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}}\left[x\sin\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}x}\right]$$

不存在,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}z'_x(x,y)$ 不存在,故 $z'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续,同理 $z'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续,选(D).

(4)【答案】 B.

【解析】 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

选(B).

一点导数,
定义搞定.

上限函数,
要标准化.

(5)【答案】 C.

【解析】 $I\xlongequal{\text{令}u=t+\frac{x}{s}}\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_t^{2t}f(u)\cdot s\mathrm{d}u=\int_t^{2t}f(u)\mathrm{d}u$. 选(C).

本题可用特例法:取 $f(x)\equiv 1,I=t$,选(C).

(6)【答案】 A.

【解析】 $\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}\cos x$

$$=-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}f(x)$$

$$=f(\pi)+f(0)+\int_0^{\pi}f'(x)\mathrm{d}\sin x$$

$$= f(\pi) + f(0) + f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f''(x)\sin x\mathrm{d}x$$

$$= f(\pi) + f(0) - \int_0^{\pi} f''(x)\sin x\mathrm{d}x$$

$\therefore \int_0^{\pi}[f(0)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x = f(\pi)+f(0) = 5$,

$\therefore f(0) = 2$,选(A).

(7)【答案】 B.

【解析】 $\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{A}$ 至少有一个特征值为零,$\lambda_1 = 0$,又 $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{A\beta} = \boldsymbol{\alpha}$,

$\therefore \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) \neq \boldsymbol{0}$, 特征值为 -1;

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) \neq \boldsymbol{0}$, 特征值为 1.

$\therefore -1,1,0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值,$\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化,选(B).

方阵角化,
n 个无关.

儿 歌

单、单、单,干得欢;
单、重、重,弄一弄;
重、重、重,不用弄!

(8)【答案】 B.

【解析】 (A) $\underset{\text{后组}}{(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)}$

$$= \underset{\text{前组}}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)} \underset{\text{过渡矩阵}}{\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}.$$

线性方程,
三大定势.

ⅰ)齐通:$n-r$ 搞定.
ⅱ)非齐:系秩、增秩相等.
ⅲ)非齐通 = 齐通 + 非齐特.

(B) $\underset{\text{后组}}{(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)}$

$$= \underset{\text{前组}}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)} \underset{\text{过渡矩阵}}{\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}}.$$

前组、后组,
过渡矩阵.

(C) $\underset{\text{后组}}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)}$

$$= \underset{\text{前组}}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)} \underset{\text{过渡矩阵}}{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}.$$

矩阵求秩:
定、形、四、齐.

(D) $\underset{\text{后组}}{(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)}$

$$= \underset{\text{前组}}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)} \underset{\text{过渡矩阵}}{\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}}.$$

定:矩阵秩的定义.
形:矩阵的形状.
四:秩的四则运算.
齐:齐次方程.

显然,(B) 中的过渡矩阵的行列式为零,所以(B) 中向量组的秩 $\leqslant 2$,因而(B) 中的向量线性相关,因而不是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

二、填空题

(9) 应填:$(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

有假打假,
无假拆分.

【解析】 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$,

$y' = (-1)(x-1)^{-2} - (-1)(x+1)^{-2}$,

假分式 ⇒ 真分式 ⇒ 部分分式

$$y''=(-1)(-2)(x-1)^{-3}-(-1)(-2)(x+1)^{-3},$$

…

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

n 阶导数，形式优美.

(10) 应填：$\dfrac{\pi}{2}$.

【解析】 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx=\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx.$

求定积分，换元分部.

而 $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx\xlongequal{令x=-t}-\int_{\pi}^{0}\frac{\sin^2 t}{1+e^{-t}}dt=\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx,$

$$\therefore\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\right)dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

用瓦里斯，秒杀搞定.

详见本卷 12 页答案.

(11) 应填：e^2.

【解析】 $\because e^3=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}\qquad(1^{\infty})$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}}$$

强行代入，定型定法，以洛为主，单、夹、积、导.

洛：洛必达法则.
单：单调有界数列有极限.
夹：夹逼定理.
积：定积分的定义.
导：导数的定义.

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3,\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0,\text{则}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,\therefore f(0)=0,$$

$$\therefore f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

于是 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x^2}\right]=3,\qquad\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2.$$

而 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}\qquad(1^{\infty})$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2.$$

(12) 应填：$\frac{1}{4}$.

二阶线性，三大定势.

ⅰ) 齐通：一元二次方程搞定.

ⅱ) 非齐特与右端修正同名.

ⅲ) 非齐通 = 齐通 + 非齐特.

【解析】 由题意，微分方程的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$. 从而微分方程的通解为

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x},$$

由 $y(0)=0,y'(0)=1$，得 $C_1=0,C_2=1$，

故满足初始条件的特解为 $y=xe^{-2x}$.

所以 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx$

$$\xlongequal{令2x=t}\int_0^{+\infty}\frac{t}{2}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{2-1}dt=\frac{1}{4}\Gamma(2)=\frac{1}{4}.$$

(13)[1,2] 应填：$\frac{2e^{-3t}}{\sin t+\cos t}$.

复函剥皮，隐函直导.

【解析】 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$=\frac{-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}$$

$$=-e^{-2t};$$

$\frac{dy}{dx}=-e^{-2t}$. $\left(\frac{dy}{dx}\right)'_x=(-e^{-2t})'_x$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(-e^{-2t})'_t\cdot t'_x=\frac{2e^{-2t}}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\frac{2e^{-3t}}{\sin t+\cos t}.$$

两特定义，计算两特.

(14) 应填：$k=-2$ 或 $k=1$.

【解析】 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$，所以 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 即有

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix},\begin{cases}k+3=\lambda,\\2k+2=\lambda k,\\k+3=\lambda,\end{cases}$$

$k^2+k-2=0$，得 $k=-2$ 或 $k=1$.

三、解答题

数列极限，要看两头.

(15)**【解析】** $0<x_{n+1}=2-\frac{2}{2+x_n}<2,\quad n=1,2,\cdots$

所以 $\{x_n\}$ 有界.

又 $x_{n+1}-x_n=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_n)(2+x_{n-1})},n=2,3,\cdots$

又 $x_2-x_1=\frac{2-x_1^2}{2+x_1}$,

因此，ⅰ) 当 $x_1<\sqrt{2}$ 时，$\{x_n\}\uparrow$；

数列极限看两头，(x_1,x_∞)
看了两头不用愁，
单调有界有极限，
先求后证两步走！

ⅱ）当 $x_1 > \sqrt{2}$ 时，$\{x_n\} \downarrow$；

ⅲ）当 $x_1 = \sqrt{2}$ 时，$x_n = \sqrt{2}, n = 1, 2, \cdots$

所以，$\{x_n\}$ 单调有界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，

$$l = \frac{2(1+l)}{2+l}, l^2 = 2, l = \pm\sqrt{2}\ (-\sqrt{2}\ 舍去).$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

(16)【证】 $u = y + x\varphi(u) \Rightarrow u = u(x, y)$.

$(u)'_x = [y + x\varphi(u)]'_x$，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(u) + x\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)'_x = \left[\varphi(u) + x\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]'_x$$

$$= \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + x\varphi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + x\varphi'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

复函剥皮，
隐函直导.

因此，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{1 - x\varphi'(u)}\left[2\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\varphi''(u)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$

$$= \frac{1}{1 - x\varphi'(u)}\left[2\varphi'(u)\frac{\varphi(u)}{1 - x\varphi'(u)} + x\varphi''(u)\left(\frac{\varphi(u)}{1 - x\varphi'(u)}\right)^2\right],$$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + x\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\varphi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + x\varphi'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 2\varphi(u)\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \varphi^2(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= 2\varphi(u)\varphi'(u)\frac{1}{[1 - x\varphi'(u)]^2} +$$

$$x\varphi^2(u)\varphi''(u)\frac{1}{[1 - x\varphi'(u)]^3},$$

从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]$.

(17)【解析】 过点 $(x, f(x))$ 的曲线 $y = f(x)$ 的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

几何应用，
两线两积.

由于 $f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$，所以当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) \neq 0$. 因此，此切线在 x 轴的截距为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

两线：切线、法线.
两积：面积、体积.

且有

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f''(x)}=0,$$

即$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$.

强行代入，
定型定法，
以洛为主，
单、夹、积、导.

洛：洛必达法则.
单：单调有界数列有极限.
夹：夹逼定理.
积：定积分的定义.
导：导数的定义.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}}{x}$

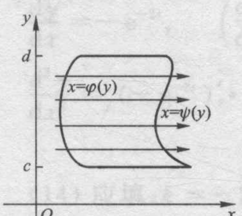
$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}1-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f'(x)+xf''(x)}$$

$$\xlongequal[\text{定义}]{\text{导数}}1-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f'(x)}{x}}{\dfrac{f'(x)}{x}+f''(x)}$$

$$=1-\frac{f''(0)}{f''(0)+f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

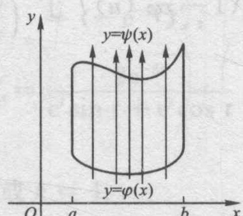
导数定义，
永恒考题.



$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

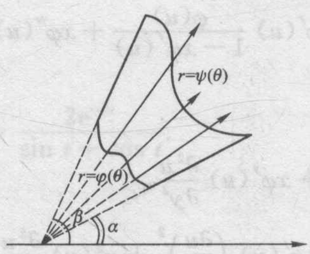
横着穿



$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$

直着穿



$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi(\theta)}^{\psi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r.$

斜着穿

二重积分，
三穿搞定.

横着穿、直着穿、斜着穿

(18)**【解析】** 如图 4 所示，$\sqrt{2x-x^2}=y\Rightarrow r=2\cos\theta$.

$\sqrt{4-x^2}=y\Rightarrow r=2$.

$$\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2} r\cos\theta r^2\ \sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2} r^4\,\mathrm{d}r$$

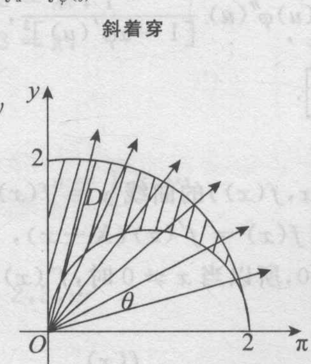


图 4

二重积分，
三穿搞定.

横着穿，直着穿，斜着穿

$$= \frac{2^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^5\theta)\cos\theta\sin^2\theta d\theta$$

$$= \frac{2^5}{5}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^2\theta d\theta\right)$$

$$= \frac{2^5}{5}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\theta d\theta\right)$$

$$= \frac{2^5}{5}\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} + \frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{32}{15} - \frac{\pi}{8}.$$

用瓦里斯，秒杀搞定.

瓦里斯公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx = \begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数},\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

(19)【解析】 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)'_x,\ \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)'_y\cdot\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)'_y\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = -\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3},$$

复函剥皮，隐函直导.

代入原方程，得

$$\frac{d^2x}{dy^2} - x = e^{2y},$$

这是二阶常系数线性非齐次微分方程.

先解$\dfrac{d^2x}{dy^2} - x = 0$，

特征方程：$r^2 - 1 = 0, r = \pm 1$.

$\therefore x = C_1e^{-y} + C_2e^y$（齐通）.

再求$\dfrac{d^2x}{dy^2} - x = e^{2y}$ 的特解.

令 $x^* = Ae^{2y}$，代入$\dfrac{d^2x}{dy^2} - x = e^{2y}$，得$A = \dfrac{1}{3}$，

$\therefore x^* = \dfrac{1}{3}e^{2y}$（非齐特）.

$$\therefore \underset{\text{非齐通}}{x} \underset{=}{=} \underset{\text{齐通}}{C_1e^{-y} + C_2e^y} \underset{+}{+} \underset{\text{非齐特}}{\frac{1}{3}e^{2y}}.$$

二阶线性，三大定势.

ⅰ）齐通：一元二次方程搞定.

ⅱ）非齐特与右端修正同名.

ⅲ）非齐通 = 齐通 + 非齐特.

(20)【解析】（Ⅰ）抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(0,0)$、$(1,2)$，故 $c = 0, a + b = 2$，由于 $a < 0$，知抛物线开口向下；又抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 通过点 $(0,0)$，顶点为 $(1,1)$，显然抛物线 $y = ax^2 + bx$ 在抛物线 $y = -x^2 + 2x\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 的上方.

（Ⅱ）设两抛物线的另一交点为 A，由

$$\begin{cases}y = ax^2 + (2-a)x,\\ y = -x^2 + 2x,\end{cases} \Leftrightarrow ax^2 + (2-a)x = -x^2 + 2x,$$

几何应用，两线两积.

两线：切线、法线.

两积：面积、体积.