工科泛函分析基础

Functional Analysis

孙明正
李洹岸
张建国
邹杰涛
编著

清华大学出版社

工科泛函分析基础

孙明正 李沍岸 张建国 邹杰涛 编著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书主要研究泛函分析中的几类空间，以及定义在这些空间上的线性算子的性质与应用。本书共6章，包括预备知识、距离空间、巴拿赫空间、希尔伯特空间、巴拿赫空间中的基本理论以及索伯列夫空间。

本书的起点低，只要求读者具备高等数学与线性代数的相关知识。本书可以作为数学系高年级学生及工科各专业包括研究生在内的学生的教材。

图书在版编目（CIP）数据

工科泛函分析基础/孙明正等编著. —北京：清华大学出版社，2019
ISBN 978-7-302-53096-1

Ⅰ. ①工…　Ⅱ. ①孙…　Ⅲ. ①泛函分析　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 104445 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市吉祥印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　　张**：9　　**字　　数**：168 千字
版　　次：2019 年 7 月第 1 版　　**印　　次**：2019 年 7 月第1 次印刷
定　　价：28.00 元

产品编号：081082-01

前　　言

高等数学研究的对象是函数，其定义域与值域大多都在实数集$\mathbb{R}$中，例如函数

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

定义为

$$f(t) = t^2, \quad t \in [0,1],$$

我们研究了这类函数的极限、连续、可导、可积等性质。

泛函分析研究的主要对象是定义域与值域都在无限维空间中的算子（也叫映射），例如算子

$$T: C([a,b]) \to C^1([a,b]),$$

定义为

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(s)\mathrm{d}s, \quad \forall x(s) \in C([a,b]),$$

这里的$C([a,b])$表示在区间$[a,b]$上连续的所有函数所构成的空间，$C^1([a,b])$表示在区间$[a,b]$上连续且一阶导数也连续的所有函数所构成的空间。此时算子T的定义域不再是"数集"，而是"函数集"$C([a,b])$，其值域也有同样的特点。特别地，当算子的值是实数时，称算子为泛函，"泛函"这两个字可以理解为"更广泛的函数"。

为此，本书的主要内容包含两个方面：一是研究各种不同空间的定义与性质，二是研究定义在这些空间上的算子的性质与应用。

"空间理论"：本书的第1章虽然是预备知识，但本质是研究实数空间及其相应函数的性质，其内容主要来源于高等数学与线性代数课程。虽然读者都接触过这些知识点，但是希望大家不要轻易跳过这部分内容，原因之一在于里面的一些知识点比如极限的ε-δ定义是我们本书证明的主要工具，希望大家熟练掌握，另一个重要的原因是后面许多新的概念是

实数空间中相应知识点的推广，把实数空间中的内容理解好之后，再学习新的内容就会事半功倍。另外，第 1 章中还简单列举了部分实变函数的内容，比如勒贝格积分及相应的可积函数空间等，这部分内容是高等数学中函数积分的推广。

“推广”是泛函分析的一大特点：在第 2 章中，我们把实数集中两个元素的距离概念推广到一般的距离空间，并用来研究不动点理论，此理论在各类方程解的存在性与唯一性定理中起到了最关键的作用；第 3 章是把实数空间中的长度概念推广到赋范线性空间，在这一章中，我们不但研究一般空间中元素的长度(我们改称为范数)，还会重点研究算子的范数，即把算子也看成是某些空间中的元素；第 4 章研究特殊的线性空间——内积空间，在此空间中，我们把实数之间的数量积进行了推广，从而使得赋范线性空间中的元素之间有了夹角，并重点研究了正交(垂直)这一个最直观的性质以及这些内容在最佳逼近论中的应用；第 6 章的核心内容是如何定义并理解索伯列夫空间中元素的导数，为此，本章首先定义了广义导数，同时从积分的角度又研究了弱导数及其与高等数学中函数的导数的区别与联系，并指出广义导数与弱导数的定义是等价的。在应用中，我们利用弱导数得到了线性椭圆方程弱解的存在性与唯一性，从而把我们定义的新空间与新方法投入到了方程解的存在性这一个广阔的领域中。我们用下面的图表把泛函分析中与实数空间中有关联的知识点进行简单的对比：

新的空间	实数空间中知识点名称	新的知识点名称	应用举例
距离空间	距离	距离(度量)	不动点理论
赋范空间	长度	范数(模)	泛函延拓等基本理论
内积空间	数量积	内积	最佳逼近论
索伯列夫空间	导数	广义导数(弱导数)	椭圆方程的弱解

“算子理论”：类似于高等数学研究的是定义在实数集上的函数，泛函分析的另一个研究重点是定义在上述空间中的线性算子的性质与应用。本书研究的算子主要包括：线性算子、连续算子、有界算子、无界算子、紧算子、投影算子、共轭算子等。作为算子理论的应用，我们研究了压缩映射定理、最佳逼近的问题、泛函延拓定理、共鸣定理、逆算子定理(后面这三个定理是第 5 章的研究内容)以及线性椭圆方程弱解的存在性等。当然，泛函分析的应用远不止如此，其他重要的理论比如傅里叶变换、算子的谱理论、变分理论等，因为篇幅有限或者内容过于复杂等原因本书并没有涉及。另外，需要指出的是，本书中的大部分内容虽然在复数集中都成立，但为了内容的简练与学习的方便，本书所有的知识点都是在实数集中进行讨论。

本书的一个特点是起点低。我们知道学习泛函分析的读者，既有经过专业训

练的数学系高年级的学生，也有只接触过高等数学、线性代数等基本数学课程的工科类专业的学生，尤其是后者或许都没有学过泛函分析的基础课：实变函数。为此，本书的假设读者为只是了解高等数学与线性代数的相关知识的非数学类的学生。本书定义与定理的陈述尽量地使用简单易懂的语言，并尽量与之前的知识点进行比较，以消除读者对新的知识点的突兀感，让读者更容易理解新的概念。举个例子，在第1章中，我们省略了区间套定理、有限覆盖定理、集合论、测度论等"隐晦难懂"的内容，只是用"有理数可数，其长度为零"这一个容易理解的知识点来学习"性质不好"的集合与"性质不好"的函数，并用狄利克雷函数来理解高等数学中的积分与我们新的勒贝格积分的异同。因此，本书的部分内容显得不是很严谨，好在我们给出了大量的参考文献，部分内容还给出了在参考文献中的具体页数，以便有兴趣的读者进行查阅。

本书的另一个特点是用大量的例子(包括反例)去理解新定义的空间与算子，这些例子几乎都给出了详细的证明与求解；每一章的后面还附有一定量的练习题，并在书末给出了详细解答，以便读者检验自己的学习水平与深度。另外，因为本书的目的之一是作为工科类高年级学生或者研究生的教材，所以书中列举了一些应用方面的例子，比如信号处理中的线性系统、分布参数控制系统中的人口演化问题、分布空间、信号的相似性、力学中的对偶性和能量等，这些例子将帮助读者能够把泛函分析的知识与自己的专业尽快地结合起来。

"实变函数学十遍，泛函分析心犯寒"，类似的顺口溜说明相关知识点确实有一定的难度，但我们坚信只要读者找对方法并坚持不懈，一定会从本书中得到很大的收获。

笔者水平有限，疏漏错误难免，敬请读者和专家们批评指正。

编著者
2019年5月

目　　录

第1章

预备知识

本章首先复习高等数学及线性代数中的一些知识，比如数列与函数的收敛、函数列的一致连续等；其次介绍更一般的积分——勒贝格积分及其性质；最后给出线性空间及线性算子的定义及性质。这些知识是本书的基础，其中一些比如极限的 ε-δ 定义是本书常用的证明工具，希望读者熟练掌握并应用。

本书使用$\mathbb{R}$表示实数集，$\mathbb{Q}$表示有理数集，$\mathbb{Z}$表示整数集，$\mathbb{Z}^+$表示正整数集，即$\mathbb{Z}^+=\{1,2,\cdots\}$。

1.1 确界与最值

定义 1.1.1 设 X 是实数集$\mathbb{R}$中的非空子集，如果 $M\in\mathbb{R}$ 是 X 的最小上界，即

(1) $\forall a\in X$，有 $a\leqslant M$，

(2) $\forall a\in X$，若 $a\leqslant b$，则 $M\leqslant b$，

那么称 M 为 X 的**上确界**，记作 $M=\sup X=\sup\limits_{x\in X}\{x\}$。

定义 1.1.2 设 X 是实数集$\mathbb{R}$中的非空子集，如果 $m\in\mathbb{R}$ 是 X 的最大下界，即

(1) $\forall a\in X$，有 $a\geqslant m$，

(2) $\forall a\in X$，若 $a\geqslant d$，则 $m\geqslant d$，

那么称 m 为 X 的**下确界**，记作 $m=\inf X=\inf\limits_{x\in X}\{x\}$。

定义 1.1.3 若集合 X 的上确界 $M\in X$，则称 M 为 X 的**最大值**，记作

$$M=\max X=\max_{x\in X}\{x\};$$

若集合 X 的下确界 $m\in X$，则称 m 为 X 的**最小值**，记作

$$m=\min X=\min_{x\in X}\{x\}。$$

例 1.1.4

(1) $\sup[0,1]=1=\max[0,1]$, $\inf[0,1]=0=\min[0,1]$;

(2) $\sup(0,1)=1$, $\max(0,1)$不存在;

(3) $\inf(0,1)=0$, $\min(0,1)$不存在。

1.2 数列收敛与实数完备性

在这一节中,我们复习高等数学中数列的收敛及其性质,并利用柯西数列来理解实数空间的完备化。

1. 数列收敛

定义 1.2.1(ε-δ 定义) 设$\{x_n\}$为实数集$\mathbb{R}$中的数列,常数$a\in\mathbb{R}$,如果$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{Z}^+$,使得当$n>N$时,下式成立

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

那么称数列$\{x_n\}$为收敛数列且**收敛**于a(或者极限为a);记为$x_n\to a(n\to\infty)$,或者

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a。$$

定义 1.2.2 对于$\mathbb{R}$中的数列$\{x_n\}$,若存在常数$M>0$使得

$$|x_n|<M,\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+,$$

则称数列$\{x_n\}$**有界**。

注 收敛数列的极限必唯一;若数列收敛,则数列有界。这些性质的证明留为课后作业。

定义 1.2.3 设有$\mathbb{R}$中的数列$\{x_n\}$,若$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{Z}^+$,使得当$n,m>N$时有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

则称数列$\{x_n\}$为**柯西**(Cauchy)**数列**,也称为**柯西列**(**基本列**)。

例 1.2.4 证明$\mathbb{R}$中的收敛数列是柯西数列。

证 若在$\mathbb{R}$中$x_n\to x(n\to\infty)$,则$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{Z}^+$,使得当$n,m>N$时有

$$|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |x_m-x|<\frac{\varepsilon}{2};$$

根据绝对值的三角不等式,当$n,m>N$时有

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-x|+|x-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以$\{x_n\}$是柯西数列。 证毕

注 虽然收敛数列一定是柯西数列，但在一般的集合中柯西数列不一定收敛，这主要由数列所在的集合决定的。比如，数列

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

作为实数列是一个柯西数列，并且在实数集中收敛到 e。但在有理数集$\mathbb{Q}$范围内，虽然也是一个柯西数列，却没有极限，因为 $e\notin\mathbb{Q}$。

2. 实数集的完备性

虽然一般情况下柯西数列不一定收敛，但实数集中的柯西数列一定收敛。

定理 1.2.5（柯西收敛准则） 实数集中任一个柯西数列都收敛到一个实数。

注 此定理称为实数集的**完备性**。根据上面的例子，有理数集不具有完备性，为此我们定义了无理数并把研究范围扩展到实数。通俗地说，人们在研究有理数收敛的过程中，发现有些收敛点不是有理数，为了研究的方便与严谨，人们把那些不是有理数（无理数）的收敛点与有理数集合并，构成新的集合，新的集合称为实数集。这个过程就是集合或者空间的完备化。

另外，在一般的集合中对柯西数列附加一定条件后就可证明其收敛。

例 1.2.6 在任意集合中，证明有收敛子列的柯西数列一定收敛。

证 设数列$\{x_n\}$为集合 X 中的柯西数列，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbb{Z}^+$，使得 $m,n>N_1$ 时有

$$|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2};$$

设$\{x_n\}$的子列 $x_{n_k}\to a\in X(n_k\to\infty)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2\in\mathbb{Z}^+$，使得当 $n_k>N_2$ 时有

$$|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2};$$

因此当 $n,n_k>\max\{N_1,N_2\}$时，得到

$$|x_n-a|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以数列$\{x_n\}$收敛于 $a\in X$。 证毕

1.3 函数的连续与函数列的收敛

1. 函数的连续性

函数的收敛定义与数列的类似，大家可以当做练习，下面我们给出连续的定义。

定义 1.3.1(ε-δ 定义) 假设函数 f 的定义域为区间 $D\subset\mathbb{R}$，$x_0\in D$。如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，对于 $x\in D$ 满足

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

那么称函数 f 在 x_0 处**连续**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)。$$

若函数 f 在定义域 D 上的每个点处都连续，则称 f 在 D 上**连续**。

定义 1.3.2 假设函数 f 的定义域为区间 $D\subset\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall x,y\in D$ 满足

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

则称 f 在 D 上**一致连续**。

注 ① 在高等数学中我们知道，连续函数有很多好的性质，比如闭区间上的连续函数满足有界性定理、最值定理、零点定理、介值定理与中值定理，等等。

② 函数的连续性与一致连续性有什么区别呢？函数的连续性是一个局部概念，而一致连续性具有整体性质。比如，连续性描述的是 f 在 x_0 点的局部性态，其中的 δ 不仅与 ε 有关，还与 D 中的点 x_0 有关，但一致连续性中的 δ 仅与 ε 有关。下面我们用例子来理解两者的异同。

例 1.3.3 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上连续但不一致连续。

证 (1) 为了证明连续，$\forall x_0\in(0,1)$，$\forall 0<\varepsilon<1$，我们需要找到 $\delta>0$，使得

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon。$$

为此，分析如下：

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow\frac{x_0}{1+\varepsilon x_0}<x<\frac{x_0}{1-\varepsilon x_0}\\ &\Leftrightarrow-\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}<x-x_0<\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0},\end{aligned}$$

故取

$$\delta=\delta(\varepsilon,x_0)=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}>0,$$

则有

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon,\tag{1.3.1}$$

故 $f(x)=\frac{1}{x}$在(0,1)上连续。

(2) 要证明函数 f 不一致连续,即是证明 $\exists\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$,可以找到 $x_0,x_1\in(0,1)$满足

$$|x_0-x_1|<\delta\Rightarrow|f(x_0)-f(x_1)|\geqslant\varepsilon。$$

为此,我们取 $\varepsilon=1$, $x_0=\frac{1}{n}$, $x_1=\frac{1}{2n}$,并要求正整数 n 充分大使得 $\delta>\frac{1}{2n}$,则

$$|x_0-x_1|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2n}<\delta,$$

但是

$$|f(x_0)-f(x_1)|=|n-2n|=n\geqslant\varepsilon=1,$$

所以函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间(0,1)上不一致连续。 证毕

注 另外,根据

$$\lim_{x_0\to 0^+}\delta=\lim_{x_0\to 0^+}\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}=0,$$

也可以看出不存在与 x_0 无关的 $\delta>0$ 使得不等式(1.3.1)对所有的 $|x-x_0|<\delta$ 都成立。

由上例知道开区间上的连续函数不一定一致连续,但是闭区间上的连续函数就是一致连续的。下面的证明可参考文献[7]。

定理 1.3.4(一致连续定理) 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续。

2. 函数列的收敛性

定义 1.3.5 设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $D\subset\mathbb{R}$ 上的函数序列,f 是 D 上的一个函数。如果 $\forall x\in D$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon,x)\in\mathbb{Z}^+$,只要 $n>N$ 就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

那么称 $\{f_n\}$ **收敛**到 f,记为 $f_n\to f(n\to\infty)$。此时 f 称为函数列 $\{f_n\}$ 的极限函数。

定义 1.3.6 设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $D\subset\mathbb{R}$ 上的函数序列,f 是它的极限函数。若 $\forall x\in D$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{Z}^+$,只要 $n>N$ 就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称为 $\{f_n\}$ 在 D 上**一致收敛**于 f。

注 类似于函数的连续与一致连续,从定义来看,函数列的一致收敛就是把收敛中描述局部性态的 $N(\varepsilon,x)$ 换成描述整体性态的 $N(\varepsilon)$。下面我们还是用一个例子来帮助理解它们的异同。

例 1.3.7 函数列 $f_n(x)=x^n$ 在$[0,1]$上收敛到 f，但不是一致收敛，其中

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1。\end{cases}$$

证 (1) 固定 $x_0\in[0,1]$，根据函数 $f_n(x_0)=x_0^n$ 的性质，得到

$$f_n(x_0)\to f(x_0)(n\to\infty),$$

即函数列 $f_n(x)=x^n$ 在$[0,1]$上收敛到 f；

(2) 要证不一致收敛，即证明 $\forall N\in\mathbb{Z}^+$，$\exists x\in[0,1]$，$\exists \varepsilon>0$，以及存在 $n>N$ 使得

$$|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon。$$

为此，$\forall N\in\mathbb{Z}^+$，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{3}>0$ 及

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+1}}\in(0,1),$$

只要 $n=N+1>N$ 就有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_{N+1}(x)|=\frac{1}{2}\geqslant\varepsilon,$$

所以 $f_n(x)=x^n$ 在$[0,1]$上不一致收敛到 f。 证毕

注 上例也说明即使对于连续函数列，也不能保证它的极限函数是连续的。我们引入函数列一致连续性概念的原因之一就是它具有下面好的性质。

定理 1.3.8 设$\{f_n\}$是定义在区间 $D\subset\mathbb{R}$ 上的连续函数序列，若在 D 上$\{f_n\}$一致收敛于函数 f，则 f 在 D 上连续。

证 因为在 D 上$\{f_n\}$一致收敛于函数 f，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\forall x\in D$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，只要 $n>N$ 就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3};$$

$\forall x_0\in D$，由 f_{N+1} 在 x_0 处连续，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3};$$

此时，当$|x-x_0|<\delta$ 时我们得到

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|\leqslant{}&|f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)|+\\&|f_{N+1}(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

所以函数 f 在 x_0 处连续，再由 x_0 的任意性，知 f 在 D 上连续。 证毕

关于一致收敛，我们再列举两个好的性质。

定理 1.3.9 设$\{f_n\}$是$[a,b]$上的连续函数列,且在$[a,b]$上一致收敛于f,则f在$[a,b]$上可积,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x。$$

定理 1.3.10(魏尔斯特拉斯(Weierstrass)多项式逼近定理) 闭区间$[a,b]$上的任意一个连续函数都可以表示成系数为实数的多项式列的一致收敛极限。

1.4 勒贝格积分简介

1. 高等数学中的积分

我们在高等数学中学习的积分,是由黎曼(Riemann)于1854年创立的。

定义 1.4.1(黎曼积分) 设f在$[a,b]$上有界,对$[a,b]$作分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

记

$$E_1=[a,x_1],\quad E_k=(x_{k-1},x_k],\quad k=2,3,\cdots,n,$$

则$[a,b]=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$,令

$$M_k=\sup\{f(x):x\in E_k\},\quad m_k=\inf\{f(x):x\in E_k\},\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1},$$

作达布(Darboux)大和与达布小和

$$S_\Delta=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k,\quad s_\Delta=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k;$$

如果

$$\inf_\Delta\{S_\Delta\}=\sup_\Delta\{s_\Delta\}=I<+\infty,$$

那么称f在$[a,b]$上黎曼可积,记作$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

我们知道,一个函数黎曼可积,则这个函数一定有界。但是,许多函数有界但不是黎曼可积的。

例 1.4.2 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

在$[a,b]$上不是黎曼可积的。

证 对$[a,b]$的任意分割Δ,函数在每个小区间上的最大值为1,最小值为0,故其达布大和

$$S_\Delta=b-a,$$

达布小和

$$s_{\Delta}=0,$$

则$\inf\limits_{\Delta}\{S_{\Delta}\}\neq\sup\limits_{\Delta}\{s_{\Delta}\}$，故 $D(x)$在$[a,b]$上非黎曼可积。 证毕

另外，黎曼积分与极限交换次序要在很强的条件下才能做到。比如，要使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$$

成立，函数列$\{f_n\}$需要在$[a,b]$上一致收敛。这一条件非常苛刻并且检验起来也不方便，因此大大降低了黎曼积分的使用效果。

为了弥补黎曼积分的缺陷，1902 年法国数学家勒贝格(Lebesgue)完成了对黎曼积分的改造。明显地，我们要推广积分，需要考虑积分中的两个部分：被积区域和被积函数，因此下面会研究一般集合的性质及一般函数的性质。因为我们假设读者只具有高等数学与线性代数的相关知识，所以下面的勒贝格积分的准备工作与定义略去了许多的技术细节与证明，有时甚至不够严谨。如果读者想了解完备且严谨的勒贝格积分的相关知识，可以参考后面的文献[2,9]等。

2. 可数集

我们首先来研究集合中元素的“多少”。当一个集合只含有有限个元素时，我们称其为有限集，否则称为无限集。有限集之间可以很容易地比较元素的多少。但在元素无限多的集合中，如何定义元素的个数，如何比较元素的“多少”呢？我们用最简单的正整数集合作为“标尺”。

定义 1.4.3 如果集合 X 的元素与正整数集合$\mathbb{Z}^{+}=\{1,2,\cdots\}$之间存在一一对应，那么称集合 X 为**可数集**。

具体地，集合 X 为可数集当且仅当集合 X 的元素可以用正整数编号并排成一个无穷序列的形式：

$$X=\{a_1,a_2,\cdots\}。$$

我们常用到的元素个数无限的可数集是奇数集、偶数集、整数集与有理数集。

例 1.4.4 有理数集$\mathbb{Q}$是可数集。

证 因为每个有理数都可唯一地写成分母为正整数的分数 $a=\dfrac{p}{q}$，其中 p,q 互质，有理数集可按照$|p|+q=n$ 的方式由小到大排列，比如 $n=3$ 时的分数为 $2/1,-2/1,1/2$ 及$-1/2$，所以我们可以将有理数集排列如下：

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{-1}{1},\frac{2}{1},\frac{-2}{1},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{3}{1},\cdots\right\},$$

即有理数集与正整数集建立了一一对应，故有理数集$\mathbb{Q}$是可数集。 证毕

例 1.4.5 有理系数的多项式的全体是可数集。

另外，开区间(a,b)、闭区间$[a,b]$、无理数集及实数集$\mathbb{R}$都不是可数集(具体证明可参考文献[2],p. 24)。

3. 可测集

我们再来研究实数集的“长度”。我们想把实数集中区间长度的概念推广到任意的实数集，即将所考虑的实数集中所有线段的长度求和，但某个实数集中可能不包含任何的线段(例如可数集)，因此简单的线段长度求和的想法不可行。下面考虑用线段的长度之和取上下确界的思想来实现。

定义 1.4.6 设集合$E\subset\mathbb{R}$为有界集，我们称

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i):E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right\}$$

为E的**外测度**。

定义 1.4.7 设集合$E\subset\mathbb{R}$为有界集，$m^*(E)$为E的外测度。如果外测度满足可加性：

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B),\quad \forall A\subset E,\quad \forall B\subset\mathbb{R}\backslash E,$$

那么称E为**可测集**，并称$m(E)=m^*(E)$为E的**勒贝格测度**，简称为**测度**。

定义 1.4.8 设集合$E\subset\mathbb{R}$为无界集，如果$\forall a>0$，$E\cap(-a,a)$都可测，那么称E为**可测集**，并定义测度为

$$m(E)=\lim_{a\to+\infty}m(E\cap(-a,a))。$$

定理 1.4.9 可测集有下面的性质：

(1) $\mathbb{R}$中的开集与闭集都是可测集；

(2) 可数个可测集的交集与并集都是可测集；

(3) 可测集的余集是可测集。

注 明显地，我们有

$$m([0,1])=m((0,1])=m([0,1))=m((0,1))=1。$$

定义 1.4.10 设集合$E\subset\mathbb{R}$，如果$\forall\varepsilon>0$，存在开区间(a_i,b_i)，使得

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i),$$

并且

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\varepsilon,$$

那么称集合E是**零测集**，记为$m(E)=0$。

明显地，元素个数有限的集合是个零测集。

例 1.4.11 可数集是零测集。

证 不妨设可数集$E=\{a_1,a_2,\cdots\}$，则$\forall\varepsilon>0$，我们有