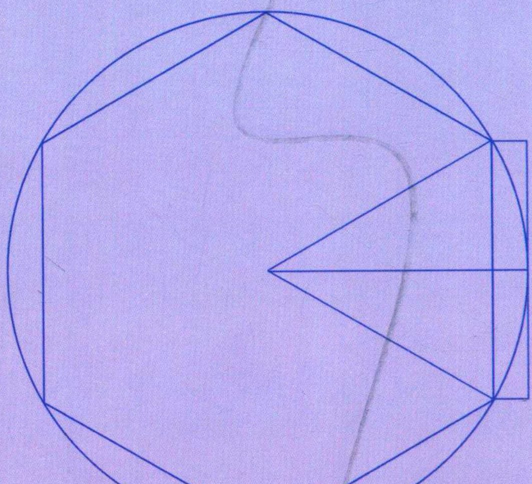
数学分析讲义

（第一册）

◎ 张福保 薛星美 潮小李 编



割圆术 · 刘徽
Liu Hui

科学出版社

数学分析讲义

(第一册)

张福保　薛星美　潮小李　编

中国科学技术大学
图书馆藏

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者在东南大学连续20多年讲授“数学分析”课程的基础上写成的，并已连续试用近10年. 本书取名为“讲义”，最大特点就是一切从读者的角度去讲解，既注重数学思想的阐述和严格的逻辑推导，又突出实际背景与几何直观的描述，并适当穿插了一些数学文化的介绍. 在编排上尽量体现先易后难和分步走的原则. 习题分类安排，即分为A、B、C三类. 其中，A类是基本题，B类是提高题，C类是讨论题. 本书对讨论题给予更多关注，目的在于帮助学生厘清概念，增强研学与创新能力.

本书分为三册，第一册包括极限、连续、导数及其逆运算(不定积分)，第二册包括实数理论续(含上极限、下极限、欧氏空间)、定积分及多元微积分，第三册包括级数与反常积分(含参变量积分)等.

本书可作为数学、统计学等专业的数学分析教材与参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 第一册/张福保，薛星美，潮小李编. —北京：科学出版社，2019. 6

ISBN 978-7-03-061608-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… ②薛… ③潮… Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2019) 第114490号

责任编辑：胡 凯 许 蕾 曾佳佳/责任校对：杨聪敏
责任印制：师艳茹/封面设计：许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019年6月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2019年6月第一次印刷 印张：14 1/4
字数：338 000

定价：69.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

致读者

数学, 始终伴随着人类文明的发祥与发展. 从远古到公元前 6 世纪, 由于计数和土地丈量的需要, 人类开始认识自然数和简单的几何图形. 建于约公元前 2600 年的埃及法老胡夫金字塔, 不仅是建筑史上的奇迹, 其数学方面的成就也很让人称奇. 例如, 它的正方形塔基每边长约 230m, 其正方程度与水平程度的平均误差不超过万分之一. 这个阶段只是数学的萌芽时期. 公元前 6 世纪 Pythagoras (毕达哥拉斯) 学派与"万物皆数论"的出现, 标志着初等数学时期, 或称常量数学时期的到来. 其间出现了 Euclid (欧几里得) 的《几何原本》、Archimedes (阿基米德) 求面积与体积的方法、Apollonius (阿波罗尼奥斯) 的《圆锥曲线论》、Ptolemaeus (托勒密) 的三角学以及 Diophantus (丢番图) 的不定方程等, 逐渐形成了初等数学的主要分支和现在中学数学的主要内容. 17~18 世纪, Newton (牛顿) 与 Leibniz (莱布尼茨) 等的微积分 (数学分析的主要内容) 的发明与发展, 标志着数学发展进入了近代变量数学时期. 而 19 世纪以来, 则可称为现代数学时期.

1. 数学代表了人类文明的理性精神

任何一种值得一提的文明——精神财富的集中体现, 都是要探究真理的, 而其中最基本也是最伟大的真理是有关宇宙与人类自身的真理. 地球、太阳系的谜团, 如太阳的升与落、月亮的圆与缺、奇妙的日蚀与月蚀等, 以及人类的起源、人生的目的与人类的归宿等, 这是我们的先祖们曾经迫切想搞清楚的问题. 在人类文化刚开始萌芽的时期, 人类刚从蒙昧中觉醒, 迷信和原始宗教还控制着人类的精神世界, 直到希腊文化的出现. 古希腊人敢于正视自然、摈弃传统观念. 他们之所以能如此, 是因为他们发现了人类最伟大的发现之一——推理, 知道了人类是有智慧、有思维、能发现真理的, 而不是只能听从"神"的旨意的. 而他们的思维与推理的成功, 数学可谓功不可没. 可以说在这个时期, 数学帮助人类从宗教和迷信的束缚下解放出来, 同时也发展了数学自身. 这个时期数学成就的顶峰就是 Pythagoras 学派的"万物皆数论"与 Euclid 的《几何原本》.

进入中世纪后，在人类探索宇宙奥秘的过程中形成了"地心说"和"日心说"这两种对立的观点. 为了捍卫"日心说", Kopernik (哥白尼)、Kepler (开普勒)、Galileo(伽利略) 等人前赴后继, 逐步形成了 Kepler 三大定律和 Galileo 惯性定律、自由落体运动等物理定律以及重事实、重逻辑的近代科学. Kepler 指出了行星的运动规律, 可是为什么行星会绕太阳转呢? 支持其运动的动力来自何方? 天上的运动与地上的 Galileo 所描述的运动是内在统一的吗? 当时的人们无法回答这些问题, 只能期待时代伟人的出现. "自然界和自然规律隐藏在黑暗中. 上帝说, 让 Newton 出生吧! 于是一切都是光明. " (英国文豪 Pope (蒲伯)). 其实, 在 Newton 发明微积分之前, 还有 Descartes (笛卡儿) 发明的坐标系与解析几何、业余数学家之王 Fermat (费马) 的一系列工作以及 Newton 的"死敌"Hooke (胡克) 等一大批伟人的贡献. Newton 自己在和 Hooke 的名利之争中也不得不承认, "如果说我能看得更远一些, 那是因为我站在巨人的肩膀上" (姑且不论他这里所指的巨人是谁). 而

发现哈雷彗星的回归与太阳系的第八颗行星海王星, 更是数学, 特别是微积分作为人类文明理性精神的代表的最经典的诠释. [参见《数学与文化》(齐民友, 2008)]

Engels (恩格斯) 在其《自然辩证法》中就曾经说过:"在一切理论成果中, 未必再有什么像 17 世纪后半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了." 这也足以看出微积分在人类理性文明中的至高无上的历史地位.

2. 一种科学只有在成功地运用数学时, 才算达到真正完善的地步

按照法国的国际工人运动活动家、工人党创始人之一的 Lafargue (拉法格) 在《忆马克思》一书中的记载, Marx (马克思) 在距今一百多年以前就论断, 一种科学只有在成功地运用数学时, 才算达到真正完善的地步. 现在, 人们已经普遍接受这样的观点:"哲学从一门学科中退出, 意味着这门学科的建立; 而数学进入一门学科, 就意味着这门学科的成熟."

不仅如此, 更进一步, 从 20 世纪 80 年代开始, 人们已经认识到, 高技术本质上是一种数学技术. 这一观点是美国前总统尼克松的科学顾问 David 于 1984 年 1 月 25 日在美国数学会 (American Mathematical Society, AMS) 和美国数学协会 (Mathematical Association of America, MAA) 联合年会上正式提出的. 其实著名数学家华罗庚在更早的一次学术会议上也提出过这样的观点. 从两弹一星到核武器试验, 再到太空技术, 都离不开数学的现代化. 陈省身与杨振宁的数理合作更是现代科学相互渗透、相互依赖的典范.

现代物理学家 Hawking (霍金) 说过"有人告诉我说我载入书中的每个等式都会让销量减半. 然而, 我还是把一个等式写进书中——爱因斯坦最有名的那个: $E = mc^2$. 但愿这不会吓跑我一半的潜在读者. "这表明现代自然科学已经离不开数学. 而在社会科学方面, 以往是没有数学的地位的, 现在情况发生了根本变化. 经济、金融甚至政治, 都极大地数学化. 据统计, 近 10 年来, 诺贝尔经济学奖获得者有一半以上有数学学位或履历.

3. 数学分析课程的重要性

数学分析 (mathematical analysis), 又称高等微积分 (advanced calculus), 是变量数学的核心, 同时它也是现代数学的三大分支——分析、代数和几何中的分析学的基础. 数学分析的研究对象是一般的函数, 研究手段主要是极限. 最成功之处在于解决初等数学中无法解决的诸如一般曲线的切线问题和不规则图形 (如曲边梯形) 的面积问题等, 因此在天文、力学、几何以及经济、金融等方面有着广泛的应用.

从学科分类来看, 数学、统计学等都是一级学科, 在数学一级学科下分为五个二级学科: 基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹与控制论. 目前, 数学学科的研究生专业即按此分类. 而本科数学与统计学科则包含三个专业, 分别是数学与应用数学专业、信息与计算科学专业以及统计学专业.

数学分析是这三个专业的大类学科课程与核心课程, 它对应于非数学专业的高等数学课程 (广义的高等数学则是指除初等数学以外的所有现代数学), 被公认为是这三个专业最重要的基础课程, 位于传统的"三高"(高等微积分、高等代数、高等几何 (解析几何)) 之首, 学分数占大学本科四年总学分的十分之一. 它不仅是数学与统计学专业学生进校后首先面临的一门重要课程, 而且整个大学本科阶段的几乎所有的分析类课程在本质上都

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

可以看作是它的延伸和应用. 可以这样说, 其重要性无论怎么强调都不过分.

4. 如何学好数学分析

数学分析这门课程内容丰富、逻辑严密、思想方法灵活, 且应用领域又十分广泛, 所以要想学好它, 必须深刻理解其基本概念的思想内涵, 养成善于思考、认真钻研、灵活应用等学习习惯. 首先, 必须认真钻研教材, 并用心研读相当数量的参考书, 其目的是弄清楚主要概念和定理的背景、含义、本质及作用, 避免死记硬背. 常见的参考书有《数学分析》(华东师范大学数学系, 2001)、《数学分析》(陈纪修等, 2004)、《数学分析教程》(李忠和方丽萍, 2008), 起点更高的有《数学分析》(卓里奇, 2006)、*Principles of Mathematical Analysis* (Rudin, 1976) 等. 其次, 为了加深理解, 几何直观是很好的帮手. 但是不能以直观替代严密推导. 思考问题时应避免想当然, 避免以特殊代替一般. 每一步推理或判断都要合乎逻辑、有根有据. 再次, 要有相当强度的基础训练. 训练的目的不仅在于模仿和记忆, 更在于加深理解, 掌握方法. 当然光理解还不够, 要在理解的基础上做到熟练. 学习指导书或习题课教程也是值得大家认真读的, 例如,《数学分析学习指导书》(吴良森等, 2004)、《数学分析习题课讲义》(谢惠民等, 2003).

数学分析是数学学院学生最先学习的课程, 对尽快适应大学阶段的学习显得很重要. 只要大家按照上面的建议, 并根据自己的实际情况, 多思考、多讨论、多总结, 举一反三, 就一定能练就扎实的分析功底, 并为后继课程的学习打下坚实基础.

5. 关于本书

本书是根据我 20 多年连续讲授“数学分析”课程的实践, 结合泛函分析的教学与科研工作的体会写成的, 并且已经连续使用近 10 年. 本书取名为“讲义”, 其特点就是一切为读者所想, 特别适合初学者. 本书既注重数学思想和严格的逻辑推导, 又突出实际背景与几何直观; 写作语言既严谨又朴实, 并适当穿插数学文化, 提高学生学习兴趣; 尽量体现先易后难的原则, 例如，实数连续性理论的安排、可积性的讨论等都分步走, 便于学生接受; 习题的安排分类分层次，即分为 A、B、C 三类, 其中, A 类是基本题, B 类是提高题, C 类是讨论题. 本书对讨论题给予更多关注, 目的在于帮助学生厘清概念, 这往往是学生的软肋, 同时也能增强研学与创新能力.

按照现在通行的讲授三个学期的现状, 教材分为三册. 但本书的结构体系进行了较大的调整：第一册的内容包括极限、连续、导数及其逆运算 (不定积分), 第二册的内容包括实数理论续 (含上极限与下极限、欧氏空间)、定积分及多元微积分, 第三册的内容包括级数与反常积分 (含参变量积分) 等.

为了尽快接触到微积分的主要内容, 体会到微积分的巨大成功, 同时又照顾到读者学习的便利, 第一册选择尽可能少的实数理论做基础即展开极限与连续以及微分学的讨论, 而把比较复杂的证明 (包括实数等价命题和上、下极限的讨论) 放到第二册开头, 并把欧氏空间理论也放到开头这一章, 作为实数连续性的自然推广. 这样的结构对于为学生打好坚实的数学基础也很有帮助, 也为接下去进行严格的可积性推导奠定基础. 注意到反常积分, 包括反常重积分, 和级数有较多的相似性, 例如都是有限情况取极限以及目标相同：重点研究收敛性, 判别法也类似等, 因此将这两者组合在同一册里也是恰当的, 也将给读

者的学习带来极大便利.

致谢: 本教材得到了东南大学数学学院与教务处的大力支持. 薛星美教授在多次使用本教材的基础上对微分学部分进行了完善与补充, 潮小李教授对级数与反常积分部分进行了完善与补充, 罗庆来教授、黄骏教授、徐君祥教授、孙志忠教授、江其保副教授、闫亮副教授等先后对教材提出过宝贵意见, 在此一并表示衷心的感谢!

尽管本书从编写到出版, 经历了 10 年, 其间一直在修改, 但囿于个人的学识与能力, 一定还有不少疏漏和不足, 恳请专家与读者提出宝贵意见, 以便今后修订.

张福保

2019 年 1 月于东南大学九龙湖校区

目　　录

第1章　基础知识

早在远古时代, 人们就用结绳等方法计数. 后来, 因为农业生产的需要, 人们开始计算一些图形的面积. 因此, 从数学的萌芽时期开始, 数学研究的对象就是“数”与“形”. 到了现代, 数学研究的对象扩大到广义的“数”(如代数、函数) 和“形”(如空间). 而当人们需要分类研究数学对象时, 集合的概念就被抽象出来. 而系统研究集合概念则始于德国数学家 Cantor (康托尔), 他于 19 世纪创立了集合论. 后来经过很多数学家的努力, 诞生了现代集合论, 并逐步确立了它在现代数学中的基础性地位. 有了集合的概念以后, 函数概念就自然地推广为一般映射的概念. 本章主要介绍本课程中用到的最基本的一些数学知识, 包括集合与映射、一元函数以及实数系.

§1.1　集合与映射

§1.1.1　集合

我们在中学已经学过集合的概念. 将具有某种特征或满足一定性质的所有对象或事物视为一个整体时, 这一整体就称为集合 (set), 而这些事物或对象就称为属于该集合的元素 (element). 本课程主要用到数集以及空间点集.

若一集合的元素个数是有限的, 则称之为有限集. 否则称之为无限集, 或称无穷集, 即集合中元素的个数是无穷多.

下面列举一些常见的无限集.

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 表示由自然数全体构成的集合.

$\mathbb{N}^+=\mathbb{N}\backslash\{0\}$ 表示所有正整数的集合.

$\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Z}^+$ 也表示正整数集 $\mathbb{N}^+$.

$\mathbb{Q}$ 表示有理数集.

$\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{R}^+$ 表示正实数集 $(0,+\infty)$.

由 Cantor 在 19 世纪 70 年代创立的集合概念是现代数学的基本概念, 但有关这一概念的深入讨论却不是一件简单的事情, 也超出了本课程的范围. 本教材中不展开有关集合论的深入讨论, 只在中学已知的有关集合的基本性质及运算的基础上, 讨论一下任意多个集合的交、并运算以及 Descartes 乘积的概念.

为了下面叙述方便起见, 首先引入几个记号.

“$\forall$”表示“任给”, 或“对任意的”;

“$\exists$”表示“存在”;

“$A\Rightarrow B$”表示“条件 A 蕴含结论 B”;

“$A\Leftrightarrow B$”表示“A 成立当且仅当 B 成立”;

“$A\doteq B$”表示“用 B 定义 A”.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1. 集合的并与交

给定集合 A, B, 称集合

$$A\cup B\doteq\{x: x\in A, \text{或} x\in B\}$$

为集合 A 和 B 的并, 而称集合

$$A\cap B\doteq\{x: x\in A, \text{且} x\in B\}$$

为集合 A 和 B 的交.

一般地, 设 $\{A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 为一族集合, 其中指标集 Λ 为一有限或无限集合, 则集合

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\doteq\{x: \exists\lambda\in\Lambda, \text{使} x\in A_\lambda\}$$

称为该集族的并, 而集合

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\doteq\{x: \forall\lambda\in\Lambda, \text{都有} x\in A_\lambda\}$$

称为该集族的交.

按照定义可以验证: 集合的并与交运算满足下面的交换律、结合律和分配律.

性质 1.1.1 (1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律 $A\cap\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap A_\lambda)$, $A\cup\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cup A_\lambda)$.

例 1.1.1 记 $A_\lambda=(0,\lambda)$, $B_\lambda=[0,\lambda]$, $\lambda\in\Lambda=\mathbb{R}^+$, 分别表示两族开区间与闭区间, 则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\mathbb{R}^+=(0,+\infty),\quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\varnothing;$$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda=[0,+\infty),\quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda=\{0\}.$$

2. 差集与余集

给定集合 A, B, 集合

$$\{x\in A: x\notin B\}$$

称为 A 关于 B 的差集, 记为 $A\backslash B$.

在我们讨论某些集合时, 这些集合往往都是一个给定集合的子集, 这个最大的集合称为全集. 设 I 为全集, $A\subset I$, A 的余集是指由属于 I 但不属于 A 的那些元素构成的集合, 记为 $C_I(A)$, 简记为 $C(A)$, 或 A^C.

关于余集成立下面的 De Morgan 公式 (证明留给读者).

性质 1.1.2 对 I 的任意一族子集合 $\{A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 成立

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^C,\quad \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^C.$$

3. 集合的 Descartes 乘积

给定集合 A, B, 称集合

$$A \times B \doteq \{(x, y) : x \in A, \text{且} \, y \in B\}$$

为集合 A 和 B 的 Descartes 乘积, 其中 (x, y) 表示有序组, 规定两个有序组 (x, y) 和 (x', y') 相等, 当且仅当 $x = x'$, 且 $y = y'$.

例如, $\mathbb{R}^2 \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是两直线的 Descartes 乘积, 恰好表示平面, 而集合 $[0,1] \times [0,1]$ 是两个区间的 Descartes 乘积, 表示平面上的正方形 $[0,1] \times [0,1] = \{(x, y) : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$.

类似地, 给定 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 可定义它们的 Descartes 乘积:

$$A_1 \times A_2 \cdots \times A_n \doteq \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

例如, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是 3 条直线的 Descartes 乘积, 恰好表示通常的三维空间. 由此可见, Descartes 乘积是我们表示和构造集合的重要工具.

§1.1.2 映射

1. 映射的概念

我们先罗列一下映射的基本概念.

定义 1.1.1 (1) 设 X, Y 是两个给定的集合, 若按照某种规则 f, 使得对集合 X 中的每个元素 x, 都可以找到集合 Y 中的唯一确定的元素 y 与之对应, 则称这个对应规则 f 是集合 X 到 Y 的一个映射 (mapping), 记为

$$f : X \to Y, x \mapsto y = f(x),$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 之下的像 (image), x 称为 y 关于映射 f 的一个原像 (inverse image). X 称为 f 的定义域 (domain), 记为 $D_f = X$, 像的全体称为映射 f 的值域 (range), 记为 R_f.

(2) 对每个 $y \in Y$, 记 $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$, 表示 y 关于映射 f 的原像的全体, 如果对每个 $y \in R_f$, $f^{-1}(y)$ 是单点集, 即存在唯一的 $x \in X$, 使 $f(x) = y$, 则称 f 是单射 (injective mapping).

如果 $R_f = Y$, 即每个 $y \in Y$ 都有原像, 则称 f 是满射 (surjective mapping).

如果映射 f 既是单射又是满射, 则称之为双射 (bijective), 或一一对应.

(3) 设 $f : X \to Y$ 是单射, 则 $f : X \to R_f \subset Y$ 是一一对应, 因此, 对每个 $y \in R_f$, 存在唯一的原像 $x \in X$. 由此我们得到新的映射, 记为 $f^{-1} : R_f \to X, f^{-1}(y) = x$, 并称该映射为 f 的逆映射 (inverse mapping).

(4) 又设 $g : X \to U_1, u = g(x)$, $f : U_2 \to Y, y = f(u)$, 如果 $R_g \subset U_2 = D_f$, 则可得新映射, 即复合映射 (composite mapping) $f \circ g : x \to y = f(g(x))$. 其中, g 称为内映射, f 称为外映射.

注 1.1.1　为方便起见, 在不致误解的情况下, 集 Y 可以不写出来; 而若定义域 X 没写出来, 则 X 理解为使映射表达式 $y=f(x)$ 有意义的 x 的最大范围, 或称为映射的存在域. 例如, $y=\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

注 1.1.2　(1) 若 $f:X\to R_f$ 可逆, 则

$$f^{-1}\circ f(x)=x,\forall x\in X;\quad f\circ f^{-1}(y)=y,\forall y\in R_f.$$

或写成

$$f^{-1}\circ f=I_X,\quad f\circ f^{-1}=I_{R_f}.$$

(2) 由上面的定义 1.1.1 (2) 知道, 即使 f 不可逆, 记号 $f^{-1}(y)$ 也是有意义的. 并且我们还有记号 $f^{-1}(A)$, 它表示像在集合 $A\subset Y$ 中的那些原像的全体所成的集合, 即

$$f^{-1}(A)=\{x\in X:f(x)\in A\}.$$

注 1.1.3　(1) 要得到复合映射 $f\circ g$, 当且仅当 $R_g\subset U_2=D_f$, 否则就要适当缩小内函数 g 的定义域. 这就是通常遇到的求复合函数的定义域的问题, 见例 1.1.2.

(2) 一般来说, $f\circ g\neq g\circ f$. 例如, $f(x)=2x+1,g(x)=x-1$, $x\in\mathbb{R}$, 则易知 $f\circ g\neq g\circ f$.

例 1.1.2　设 $g(x)=1-x^2,x\in\mathbb{R}$, $f(u)=\lg u,u\in(0,+\infty)$, 为了使 f,g 复合得 $f\circ g$, 必须要求 $g(x)$ 的值域含于 $(0,+\infty)$, 因此, 限定 g 的定义域为 $D=(-1,1)$. 事实上, 我们已经考虑了另一函数 $g^*:(-1,1)\to(0,+\infty),g^*(x)=1-x^2$, 从而得复合函数

$$f\circ g^*:(-1,1)\to\mathbb{R},\quad f(g(x))=\lg(1-x^2).$$

2. 集合的势

1) 自然数集及良序

自然数起源于计数, 是人类最早认识的数, 也是我们最为熟悉的数. 自然数集 $\mathbb{N}$ 不是一个有限集, 而是一个无限集, 但这个无限集有一个很基本而重要的性质, 称为“良序”, 即 $\mathbb{N}$ 中的任意两个元素都可以比较大小, 且它的每个子集 S 都有最小元, 亦即对每个 $S\subset\mathbb{N}$, 必存在 $n_0\in S$, 使 $\forall m\in S$, 有 $n_0\leqslant m$.

显然 (正) 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不具备这样的“良序”性质. 这条“良序”性质是下面要讲到的数学归纳法的基础.

2) 集合的势与可列集

“无限”概念的引入, 标志由初等数学进入了高等数学. 无限与有限有完全不同的性质, 即一个无限集可以与它的真子集具有相同“多”的元素. 为了确切比较无限集的“大小”, 或“元素个数的多少”, 我们通过一一对应引入“势”的概念.

定义 1.1.2　如果集合 A 和 B 之间存在双射, 则称集合 A 和 B 有相同的“势”, 或“基数”(cardinal number).

自然数集 $\mathbb{N}$ 与正整数集 $\mathbb{N}^+$ 具有相同的势, 因为我们可以建立 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}^+$ 之间的一一对应如下:

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^+,i\to i+1,i\in\mathbb{N}.$$

定义 1.1.3 与正整数集一一对应, 即与 $\mathbb{N}^+$ 同势的集合称为可数集, 或可列集 (countable set), 有限集或可数集称为至多可数集 (at most countable set).

易见, 偶数集、奇数集都是可数集. 进一步, 可以证明, 自然数集的每一个无穷子集都是可数集.

设 A 是可列集, 则正整数集 $\mathbb{N}^+$ 与 A 之间存在一一对应 f, 即 A 中每个元素都是唯一的某个 n 的像 $f(n)$, 或改用下标记法, 记为 x_n. 因此可列集总可以记为 $\{x_n, n=1,2,\cdots\}$. 反之, 若集合 A 可以写成 $A=\{x_n, n=1,2,\cdots\}$, 则 A 必是可列集.

由此易证, 可数集的无限子集都是可数集.

定理 1.1.1 $[0,1]$ 内的有理数集 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 是可列集.

证明 按照下列方式排列 $[0,1]$ 内的有理数:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots.$$

即先排 0,1, 再对 $(0,1)$ 内既约分数 $\dfrac{p}{q}$, 先按照 q 由小到大排列, 而 q 相同时, 再按照 p 由小到大排列. 由此可知 $[0,1]$ 内的有理数集 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 是可列集. □

例 1.1.3 $(0,1)$ 与 $[0,1]$ 有相同的势. 只要定义映射

$$f:[0,1]\to(0,1),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=0,\\ \dfrac{1}{n+2}, & x=\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^+,\\ x, & \text{其他}x\in(0,1).\end{cases}$$

注 1.1.4 $[0,1]$, $(0,1)$ 以及 $\mathbb{R}$ 都是不可列的数集. 该问题的讨论我们将延后到第 7 章.

定理 1.1.2 可列个可列集之并是可列集.

证明 设

$$A_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in},\cdots\}, i=1,2,3,\cdots,$$

是一列可列集, 且不妨设它们彼此互不相交, 则可按下列"对角线"顺序排列它们的并集:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{11} & & x_{12} & & x_{13} & & x_{14} & & \cdots\\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_{21} & & x_{22} & & x_{23} & & x_{24} & & \cdots\\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_{31} & & x_{32} & & x_{33} & & x_{34} & & \cdots\\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

可知, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列集. □

注 1.1.5　也可以按“正方形”顺序排列

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_{11} & & x_{12} & & x_{13} & & x_{14} & & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
x_{21} & \leftarrow & x_{22} & & x_{23} & & x_{24} & & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
x_{31} & \leftarrow & x_{32} & \leftarrow & x_{33} & & x_{34} & & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
x_{41} & \leftarrow & x_{42} & \leftarrow & x_{43} & \leftarrow & x_{44} & & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

命题 1.1.1　*若 A, B 都是可列的, 则 $A \times B$ 也可列.*

证法与上面定理 1.1.2 类似, 请自证.

由定理 1.1.1、定理 1.1.2 及命题 1.1.1 立得下面的推论.

推论 1.1.1　*有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集; 平面上整点的集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 有理点集 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 都是可列集.*

3. **数学归纳法** (mathematical induction)

逻辑推理的常用方法包括演绎推理 (又称演绎法) 和归纳推理 (又称归纳法). 由一般到特殊的推理, 称之演绎推理; 反之, 由特殊到一般的推理, 称之归纳推理.

归纳推理有两种常见的形式: 完全归纳法和不完全归纳法. 把研究对象一一都考查到了而推出结论的归纳推理称为完全归纳法, 从一个或几个 (但不是全部) 特殊情况作出一般性结论的归纳推理称为不完全归纳法. 应用不完全归纳法得出的一般性结论, 未必正确. 不完全归纳法的可靠性虽不是很大, 但它在科学研究中有着重要作用, 许多数学猜想, 如 Goldbach(哥德巴赫) 猜想, 都来源于不完全归纳法. “归纳—猜想—证明”, 这是人们发现新的结论的重要途径.

数学中有许多与自然数有关的命题, 用不完全归纳法证明是不可靠的, 但我们又不可能对所有的自然数都一一加以验证, 为此数学归纳法应运而生, 它是人们通过有限认识无限的重要方法, 是数学证明的重要工具.

一般说来, 对于一些可以递推的与自然数有关的命题 $P(n), n \in \mathbb{N}^+$, 可以用数学归纳法来证明. 用数学归纳法证明一个命题包括两步:

(1) 证明 $P(n)$ 当 $n = 1$ 时成立;

(2) 假设 $P(k)(k \geqslant 1)$ 成立, 证明 $P(k+1)$ 成立.

完成这两步, 就可以断言, $P(n)$ 对任意自然数 n 都成立.

数学归纳法的原理是基于自然数很基本的 Peano (佩亚诺) 性质:

正自然数集 $\mathbb{N}^+$ 的一个子集, 如果包含数 1, 并且由假设包含数 k 能导出也一定包含 k 的后继数 $k+1$, 那么这个子集就是 $\mathbb{N}^+$.

因此, 数学归纳法是一种完全归纳法.

运用数学归纳法证题时, 以上两个步骤缺一不可. 事实上, 有 (1) 而无 (2), 那就是不完全归纳法, 故而论断的普遍性是不可靠的; 反之, 有 (2) 无 (1), 则归纳假设就失去了初

始依据, 从而使归纳步骤的证明成了“无本之木, 无源之水”.

数学归纳法有着广泛的应用, 这里仅举例说明.

例 1.1.4 应用数学归纳法容易证明: 对一切正整数 n, 以下结论成立:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$
$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$
$$1+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

以上形式的归纳法称为第一归纳法. 与之等价的还有第二归纳法, 有时第二归纳法显得更方便. 其形式是: 设 $P(n)$ 是一个关于正整数 n 的命题,

(1) 证明 $P(n)$ 当 $n=1$ 时成立;

(2) 假设对一切 $1\leqslant k\leqslant n$, 命题 $P(k)$ 成立, 则可证明 $P(n+1)$ 成立.

那么, $P(n)$ 对任意正整数 n 都成立.

注意, 有些命题可能只对从某个自然数 $n=n_0$ 开始的自然数成立, 因此第一归纳法与第二归纳法的第一步也只要从某个自然数 $n=n_0$ 开始验证.

例 1.1.5 设 $\{a_n\}$ 是 Fibonacci 数列, 即

$$a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, \cdots, a_{n+1}=a_n+a_{n-1},\ n=2,3,\cdots,$$

证明通项公式:

$$a_n=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

证明 易见, $n=1,2$ 时成立. 归纳假设对一切 $1\leqslant k\leqslant n$, 命题 $P(k)$ 成立, 则代入可得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_n+a_{n-1}\\&=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}-(-1)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}},\end{aligned}$$

经过整理, 上式右端恰为

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-(-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}},$$

因此命题获证. □

显然, 该命题若用第一归纳法则有些困难, 因为它不仅用到 $k=n$ 的归纳假设, 而且还用到 $k=n-1$ 的归纳假设.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com