蒂图·安德雷斯库系列丛书(第一辑)

数学反思

(2008—2009)

Mathematical Reflections

the next two years (2008–2009)

[美]蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu) 著

郑元禄 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

蒂图·安德雷斯库系列丛书(第一辑)

数学反思

(2008—2009)

Mathematical Reflections

the next two years (2008-2009)

[美]蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu) 著

郑元禄 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2017－067 号

图书在版编目(CIP)数据

数学反思. 2008－2009/(美)蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)著；郑元禄译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.1

书名原文：Mathematical Reflections the next two years(2008－2009)

ISBN 978－7－5603－7620－2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①蒂…②郑… Ⅲ.①数学－竞赛题－题解 Ⅳ.①O1－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 195788 号

策划编辑　刘培杰　张永芹

责任编辑　曹　杨

封面设计　孙茵艾

出版发行　哈尔滨工业大学出版社

社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006

传　　真　0451－86414749

网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn

印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 23　字数 517 千字

版　　次　2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978－7－5603－7620－2

定　　价　68.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

纯粹数学按其方法来说是逻辑思维的诗篇.

——A. 爱因斯坦

◎ 序言

得到了忠实读者的赏识和他们具有建设性反馈意见的鼓舞，在此我们呈现《数学反思》一书：本书编撰了同名网上杂志2008和2009卷的修订本. 该杂志每年出版六期，从2006年1月开始，它吸引了世界各国的读者和投稿人. 为了实现使数学变得更优雅、更激动人心这一个共同的目标，该杂志成功地鼓舞了具有不同文化背景的人们对数学的热情.

本书的读者对象是高中学生、数学竞赛的参与者、大学生，以及任何对数学拥有热情的人. 许多问题的提出和解答，以及文章都来自于热情洋溢的读者，他们渴望创造性、经验，以及提高对数学思想的领悟. 在出版本书时，我们特别注意对许多问题的解答和文章的校正与改进，以使读者能够享受到更多的学习乐趣.

这里的文章主要集中于主流课堂以外的令人感兴趣的问题. 学生们通过学习正规的数学课堂教育范围之外的材料才能开阔视野. 对于指导老师来讲，这些文章为其提供了一个超越传统课程内容范畴的机会，激起其对问题讨论的动力，通过极为珍贵的发现时刻指导学生. 所有这些富有特色的问题都是原创的. 为了让读者更容易接受这些材料，本书由具有解题能力的专家精心编撰. 初级部分呈现的是入门问题（尽管未必容易）. 高级部分和奥林匹克部分是为国内和国际数学竞赛准备的，例如美国数学竞赛（USAMO）或者国际数学奥林匹克（IMO）竞赛. 大学部分为高等学校学生提供了解线性代数、微积分或图论等范围内非传统问题的独有的方法.

没有忠实的读者和网上杂志的合作，本书的出版是看不到希望的. 我们衷心感谢所有的读者，并对他们继续给予有力的支持表示感激之情. 我们真诚希望各位能沿着他们的足迹，接过他们的接力棒，使该杂志给热忱的数学爱好者提供更多的机会，以及在未来出版既有创新精神，又有趣的作品的这一使命得到实现.

我们也要对 Maxim Ignatiuc 先生为收集稿件提供的帮助表示感谢. 对 Gabriel Dospinescu，Cosmin Pohoata 和 Iven Borsenco 先生审阅本书表示十分感谢. 特别要感谢的是 Richard Stong 先生对手稿多处做了改进. 如果你有兴趣阅读该杂志，请登录：http://awesomemath.org/mathematical－reflections/. 读者也可以将撰写的文章、提出的问题或给出的解答发送到邮箱：reflections@ awesomemath.org.

出售本书的收入，我们将用于维持未来几年杂志的运营. 让我们共同分享本书中的问题和文章吧！

Titu Andreescu 博士

目录

1 问　　题

1.1 初级问题

J73 令

$$a_n=\begin{cases}n^2-n,若 4 整除 n^2-n\\ n-n^2,其他情形\end{cases}$$

求 $a_1+a_2+\cdots+a_{2\,008}$ 的值.

(美国)T. Andreescu 提供

J74 三角形有高 h_a,h_b,h_c 与内径 r,证明

$$\frac{3}{5}\leqslant\frac{h_a-2r}{h_a+2r}+\frac{h_b-2r}{h_b+2r}+\frac{h_c-2r}{h_c+2r}<\frac{3}{2}$$

(德国)O. Faynshteyn 提供

J75 吉米有1盒火柴,其内装 n 根,它们不一定有相等的长度.他能用这些火柴摆成一些圆内接 n 边形.证明:这些 n 边形的面积相等.

(美国)I. Borsenco 提供

J76 令 $a,b,c\geqslant 1$ 是实数,且 $a+b+c=2abc$.证明

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^2}\geqslant\sqrt[3]{ab-1}+\sqrt[3]{bc-1}+\sqrt[3]{ca-1}$$

(巴西)Bruno 提供

J77 证明:在每个三角形中,$\frac{1}{r}\left(\frac{b^2}{r_b}+\frac{c^2}{r_c}\right)-\frac{a^2}{r_br_c}=4\left(\frac{R}{r_a}+1\right)$,其中 r_a,r_b,r_c 是旁切圆半径.

(罗马尼亚)D. Andrica,(美国)K. L. Nguyen 提供

J78 令 p 与 q 是奇素数.证明:对任一奇整数 $d>0$,有整数 r,使有理数

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{[n\equiv r(\bmod q)]}{n^d}$$

的分子可被 p 整除,其中$[Q]$是函数,使得当 Q 真实存在时$[Q]=1$,在相反情形下$[Q]=0$.

(意大利)R. Tauraso 提供

J79 对正整数 a,b,c,求出可以表示为 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的所有整数.

(美国)T. Andreescu 提供

J80 若一个三角形的三边长组成等差数列,它的三条中线长也组成等差数列,请指出这个三角形的特征.

(西班牙)D. Lasaosa 提供

J81 令 a,b,c 是正实数,且

$$\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{b^2+c^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}\geqslant 1$$

证明:$ab+bc+ca\leqslant 3$.

(美国)A. Anderson 提供

J82 令四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直. 以 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ 分别表示 $\triangle ABC$,$\triangle BCD$,$\triangle CDA$,$\triangle DAB$ 的九点圆圆心. 证明:四边形 $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ 的对角线相交于四边形 $ABCD$ 的形心.

(美国)I. Borsenco 提供

J83 求所有正整数 n,使得对于不大于$\sqrt{n}$ 的所有正奇数 a,a 整除 n.

(罗马尼亚)D. Andrica 提供

J84 Al 和 Bo 玩游戏:有 22 张卡片,标号从 1 到 22. Al 从中选出 1 张放在桌上,然后 Bo 从剩下的卡片中选出 1 张,放在 Al 放的那张卡片的右边,使这两张卡片上两个数之和是完全平方数. 然后 Al 放下剩下卡片中的 1 张,最后使两张卡片上的数之和是完全平方数,依次类推. 当所有卡片被用完或桌上的卡片不再是完全平方数时,游戏结束. 得胜者是拿到最后 1 张卡片的人. Al 有获胜的策略吗?

(美国)T. Andreescu 提供

J85 令 a 与 b 是正实数. 证明

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4}}\geqslant\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

(美国)A. Alt 提供

J86 如果一个三角形没有一个角大于 α 度,那么这个三角形叫作 α 角三角形. 求最小的 α,使没有 α 角的每个三角形可以剖分为一些 α 角三角形.

(美国)T. Andreescu,G. Galperin 提供

J87 证明:对任一锐角 $\triangle ABC$,以下不等式成立

$$\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2-b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\geqslant\frac{1}{2Rr}$$

(罗马尼亚)M. Becheanu 提供

J88 求 n 的最大值,使得在平面上有点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 上,并使三角形的顶点在 P_1,$P_2,\cdots,P_n$,每个三角形有一边小于 1,一边大于 1.

(美国)I. Borsenco 提供

J89　令 A,B 在圆心为 O 的 $\odot C$ 上，C 是劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点，使 OA 是 $\angle BOC$ 的外角平分线. M 表示 BC 的中点，N 为 AM 与 OC 的交点. 证明：$\angle BOC$ 的角平分线与以圆心为 O，半径为 ON 的圆的交点是与直线 OB，OC 相切的圆的圆心，且也与 $\odot C$ 相切.

（西班牙）F. J. G. Capitan 提供

J90　对正整数 n，令 $a_k=2^{2^{k-n}}+k$，$k=0,1,\cdots,n$. 证明

$$(a_1-a_0)\cdots(a_n-a_{n-1})=\frac{7}{a_1+a_0}$$

（美国）T. Andreescu 提供

J91　图 1.1 中各正方形标上数字 1 到 16，使每行与每列的数之和相等. 已知 1，5，13 的位置. 求被涂黑正方形中的数.

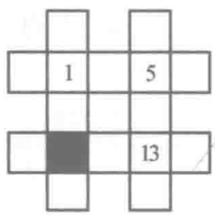

图 1.1

（美国）I. Borsenco 提供

J92　求所有素数 $q_1,q_2,\cdots,q_6$，使 $q_1^2=q_2^2+\cdots+q_6^2$.

（美国）T. Andreescu 提供

J93　令 a 与 b 是正实数. 证明

$$\frac{a^6+b^6}{a^4+b^4}\geqslant\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

（美国）A. Alt 提供

J94　证明：方程 $x^3+y^3+z^3+w^3=2\ 008$ 有无限多个整数解.

（美国）T. Andreescu 提供

J95　令 I_a,I_b,I_c 是 $\triangle ABC$ 的外心，O_a,O_b,O_c 是 $\triangle I_aBC$，$\triangle I_bAC$，$\triangle I_cAB$ 的外接圆圆心. 证明：$\triangle I_aI_bI_c$ 的面积是六边形 $O_aCO_bAO_cB$ 的面积的 2 倍.

（土耳其）M. Sahin，Ankara 提供

J96　令 n 是整数. 求所有整数 m，使得对所有正实数 $a,b,a+b=2$，有 $a^m+b^m\geqslant a^n+b^n$.

（保加利亚）O. Mushkarov 提供

J97　令 a,b,c,d 是使 $a+b+c+d=0$ 的整数. 证明：$30\mid a^5+b^5+c^5+d^5$.

（印度尼西亚）J. Gunardi 提供

J98 求所有素数 p,q,使 24 不可整除完全平方数 $q+1,p^2q+1$.

(美国)I. Borsenco 提供

J99 在 $\triangle ABC$ 中,令 ϕ_a,ϕ_b,ϕ_c 是从同一顶点作出的中线与高之间的角. 证明: $\tan\phi_a,\tan\phi_b,\tan\phi_c$ 之一是其他两数之和.

(德国)O. Faynshteyn 提供

J100 考虑平面上一个点集,使任意两点之间的距离是区间$[a,b]$中一个实数. 证明:这些点的个数是有限的.

(美国)I. Borsenco 提供

J101 考虑具有外心 O 与垂心 H 的 $\triangle ABC$. 令 A_1 是 A 在 BC 上的投影,D 是 AO 与 BC 的交点,点 A_2 为 AD 的中点. 类似地定义 B_1,B_2,C_1,C_2. 证明:A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 共点.

(意大利)A. Munaro,(美国)I. Borsenco 提供

J102 求下式的值

$$\binom{2\,008}{3}-2\binom{2\,008}{4}+3\binom{2\,008}{5}-4\binom{2\,008}{6}+\cdots-2\,004\binom{2\,008}{2\,006}+2\,005\binom{2\,008}{2\,007}$$

(美国)Z. Feng 提供

J103 $1,2,\cdots,9$ 随机地排列在圆上. 证明:有 3 个相邻数之和至少是 16.

(美国)I. Borsenco 提供

J104 令 a,b,c 是使 $abc=1$ 的正实数. 证明

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+1}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+1}\geqslant \frac{a+b}{a^2+b^2+1}+\frac{b+c}{b^2+c^2+1}+\frac{c+a}{c^2+a^2+1}$$

(中国)Han Jingjun 提供

J105 令 $A_1A_2\cdots A_n$ 是内接于 $\odot C(O,R)$ 的多边形,且外切于 $\odot w(I,r)$. 多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $\odot w$ 的切点组成另一个多边形 $B_1B_2\cdots B_n$. 证明

$$\frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(B_1B_2\cdots B_n)}\leqslant\frac{R}{r}$$

其中 $P(S)$ 表示图形 S 的周长.

(美国)I. Borsenco 提供

J106 证明:在任何 4 个正实数中,有两个数,例如 a,b,使 $ab+1\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\mid a-b\mid$.

(美国)T. Andreescu 提供

J107 求所有正整数四元组(a,b,c,d),使

$$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})(1+\frac{1}{d})=5$$

(加拿大)S. Asgarli 提供

J108 令 n 是正整数.证明:n 的互素正因子有序对(a,b) 的个数等于 n^2 的因子数.

(孟加拉国)S. Riasat 提供

J109 令 a,b,c 是正实数.证明

$$\frac{(a+b)^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 4b$$

(美国)T. Andreescu 提供

J110 令 $\tau(n)$ 与 $\phi(n)$ 分别为 n 的因子数与符合以下条件的正整数个数:这些正整数小于或等于 n,且与 n 互素.求所有的 n,使 $\tau(n)=6$,$3\phi(n)=7!$.

(美国)I. Borsenco 提供

J111 证明:没有这样的 n,使以下乘积是完全平方数

$$\prod_{k=1}^{n}(k^4+k^2+1)$$

(美国)T. Andreescu 提供

J112 令 a,b,c 是整数,且 $\gcd(a,b,c)=1$,$ab+bc+ca=0$.证明:$|a+b+c|$ 可以写成 x^2+xy+y^2,其中 x,y 是整数.

(孟加拉国)S. Riasat 提供

J113 称相继正整数数列为五数列,使其中每个正整数可以写成 5 个非零完全平方数之和.证明:有无限多个长度为 7 的五数列.

(美国)I. Borsenco 提供

J114 令 p 是素数.求方程 $a+b-c-d=p$ 的所有解,其中 a,b,c,d 是正整数,$ab=cd$.

(美国)I. Boreico 提供

J115 求所有整数 n,使下式是整数

$$\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{n+2\ 009}}$$

(美国)T. Andreescu,(罗马尼亚)D. Andrica 提供

J116 一只虫每天从立方体的一个顶点向另一个顶点爬行.求需要多少个 6 天能回到开始爬行的顶点上结束爬行?

(美国)I. Borsenco 提供

J117 令 a,b,c 是正实数.证明

$$\frac{a}{2a^2+b^2+3}+\frac{b}{2b^2+c^2+3}+\frac{c}{2c^2+a^2+3}\leqslant\frac{1}{2}$$

(中国)Ping An Zhen 提供

J118 证明:对每个整数 $n\geqslant 3$,有 n 个不同正整数,使其中每个数整除剩余的 $n-1$ 个数之和.

(伊朗)H. A. S. Ali 提供

J119 令 α,β,γ 是三角形的角.证明

$$\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos^3\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}+\cos^3\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

(德国)O. Faynstein 提供

J120 令 a,b,c 是正实数.证明

$$\frac{ab}{3a+4b+2c}+\frac{bc}{3b+4c+2a}+\frac{ca}{3c+4a+2b}\leqslant\frac{a+b+c}{9}$$

(罗马尼亚)B. A. Razvan 提供

J121 对偶整数 n,考虑正整数 N,它恰有 n^2 个大于 1 的因子.证明:N 是整数的 4 次幂.

(美国)T. Andreescu 提供

J122 四边形 $ABCD$ 内切于一个圆.令 A_1,B_1,C_1,D_1 是切点.证明:$A_1C_1\perp B_1D_1$.

(美国)I. Borsenco 提供

J123 求方程 $x^y+y^x=z$ 的素数解.

(罗马尼亚)L. Petrescu 提供

J124 令 a 与 b 是使 $|b-a|$ 是奇素数的整数.证明:对任何素数 p,$p(x)=(x-a)\cdot(x-b)-p$ 在 $\mathbf{Z}[X]$ 中是不可约的.

(美国)I. Borsenco 提供

J125 令 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,$\angle A=100^\circ$.以 BL 表示 $\angle ABC$ 的角平分线.证明:$AL+BL=BC$.

(罗马尼亚)A. R. Baleanu 提供

J126 令 a,b,c 是正实数.证明

$$3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a^2+b^2+c^2)\geqslant$$
$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$$

(美国)I. Borsenco 提供

J127 令 $a_1,\cdots,a_n>0$,使 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+1}=n-1$.证明

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\leqslant\frac{n}{2}$$

(美国)T. Le 提供

J128　以下数列前 2 009 项中有多少项相等?

$a_n, n \in \mathbf{N}^*$:1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,⋯,1,2,3,⋯,$p-1$,p,⋯

$b_n, n \in \mathbf{N}^*$:1,2,1,3,2,1,4,3,2,1,⋯,p,$p-1$,$p-2$,⋯,2,1,⋯

(罗马尼亚)M. Teler,M. Ionescu 提供

J129　已知非退化 $\triangle ABC$,BC,CA,AB 分别为 $\odot\Gamma_a$,$\odot\Gamma_b$,$\odot\Gamma_c$ 的直径. 求 $\triangle ABC$ 在什么情况下,这三圆共点.

(西班牙)D. Lasaosa 提供

J130　考虑 $\triangle ABC$. 令 D 是 A 在 BC 上的正投影,E 与 F 分别为 AB 与 AC 上的点,使 $\angle ADE=\angle ADF$. 证明:直线 AD,BF,CE 共点.

(西班牙)F. J. G. Capitan 提供

J131　令 P 是 $\triangle ABC$ 内的点,d_a,d_b,d_c 是点 P 到三角形各边的距离. 证明

$$d_a h_a^2 + d_b h_b^2 + d_c h_c^2 \geqslant (d_a + d_b + d_c)^3$$

其中 h_a,h_b,h_c 是三角形的高.

(希腊)M. Athanasios 提供

J132　点 O 是正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的中心. 如果有 n 种颜色可用来给区域 A_iOA_{i+1} 涂色,但是有的颜色不一定需要利用,假定旋转是不明显的,则可以用多少种方法给区域 A_iOA_{i+1}(对 mod 6 取 i) 涂上 1 种颜色.

(美国)I. Borsenco 提供

J133　对所有 $n>2$,大于 1 的实数数列 a_n,$n\geqslant 2$ 满足关系式

$$a_n=\sqrt{1+\frac{(n+1)!}{2\left(a_2-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(a_{n-1}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)}}$$

证明:若 $k\geqslant 2$,$a_k=k$,则对所有 n,$a_n=n$.

(美国)T. Andreescu 提供

J134　有多少个小于 2 009 的正整数可被$[\sqrt[3]{n}]$ 整除?

(罗马尼亚)D. Andrica 提供

J135　求所有的 n,使凸 n 边形对角线数是完全平方数.

(美国)T. Andreescu 提供

J136　令 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边,m_a,m_b,m_c 是中线,h_a,h_b,h_c 是高,l_a,l_b,l_c 是角平分线,证明:$\triangle ABC$ 的外接圆直径等于$\dfrac{l_a^2}{h_a}\sqrt{\dfrac{m_a^2-h_a^2}{l_a^2-h_a^2}}$.

(意大利)P. Ligouras 提供

J137　在 $\triangle ABC$ 中,令外接圆在点 A,B,C 上的切线分别交 BC,AC,AB 于点 A_1,B_1,C_1. 证明

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}=2\max\left(\frac{1}{AA_1},\frac{1}{BB_1},\frac{1}{CC_1}\right)$$

(美国)I. Borsenco 提供

J138 令 a,b,c 是正实数. 证明

$$\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{a^2+c^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$$

(罗马尼亚)M. Becheanu 提供

J139 令 $a_0=a_1=1, n\geqslant 1$,有

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+a_{n-1}}$$

求闭形式中的 a_n.

(美国)T. Andreescu 提供

J140 令 n 是正整数. 求所有实数 x,使

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\cdots+\lfloor nx\rfloor=\frac{n(n+1)}{2}$$

(罗马尼亚)M. Piticari 提供

J141 令 a,b,c 是三角形的边长. 证明

$$0\leqslant\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+b}<1$$

(美国)T. Andreescu,(罗马尼亚)D. Andrica 提供

J142 对每个正整数 m,定义 $\binom{x}{m}=\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$. 令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n^2$. 证明

$$\frac{n-1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\binom{x_i}{3}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\geqslant\frac{n-2}{3}\left[\sum_{i=1}^{n}\binom{x_i}{2}\right]^2$$

(美国)I. Borsenco 提供

J143 令 $x_1=-2, x_2=-1$,对 $n\geqslant 2$,有 $x_{n+1}=\sqrt[3]{n(x_n^2+1)+2x_{n-1}}$. 求 $x_{2\,009}$.

(美国)T. Andreescu 提供

J144 令 $\triangle ABC$ 的边 $a>b>c$,点 O 与点 H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心与垂心. 证明

$$\sin\angle AHO+\sin\angle BHO+\sin\angle CHO\leqslant\frac{(a-c)(a+c)^3}{4abc\cdot OH}$$

(美国)I. Borsenco 提供