普通高等教育“十三五”规划教材

信号与线性系统分析

季　策　蒋定德　宋清阳　于　尧　编著

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

信号与线性系统分析

季　策　蒋定德　宋清阳　于　尧　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书全面、系统地介绍了信号与线性系统的基本理论和基本分析方法，从连续时间到离散时间，从时域到变换域，力求以统一的观点阐明基本概念和基本分析方法。全书共 6 章，主要内容包括信号与系统概述、连续时间信号与系统的时域分析、连续时间信号与系统的频域分析、连续时间信号与系统的复频域分析、离散时间信号与系统的时域分析和离散时间信号与系统的 z 域分析。在每章的最后给出基于 MATLAB 实现信号。本书概念清楚，理论分析透彻，深入浅出，取材注重结构的完整性及内容的典型性，并列举了大量例题及习题。

本书可作为高等院校通信工程、电子信息工程、电气工程及其自动化等专业的教材，也可供相关工程技术人员查阅使用。

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统分析/季策等编著. —北京：科学出版社，2018.11

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-059146-3

Ⅰ. ①信…　Ⅱ. ①季…　Ⅲ. ①信号系统–系统分析–高等学校–教材 ②线性系统–系统分析–高等学校–教材　Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 238045 号

责任编辑：潘斯斯　张丽花　赵微微/责任校对：郭瑞芝

责任印制：吴兆东/封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 11 月第 一 版　开本：787×1092　1/16

2019 年 3 月第二次印刷　印张：20

字数：462 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随着科学技术的发展以及学科之间的相互渗透，“信号与系统”课程不仅成为通信工程、电子信息工程、电气工程及其自动化等专业的重要基础课程，同时也成为自动控制、计算机、机电等专业的一门基础性课程，只是在深度和侧重点上有所不同。

“信号与系统”课程主要研究信号与系统分析的基本理论与方法，在教学过程中起着承上启下的作用，以工程数学和电路分析为基础，课程中所涉及的内容是学生学习后续专业课程的基础，是学生合理知识结构中的重要组成部分，也是从事信号处理工作所必备的基础理论知识。

本书的编写遵循由浅入深、循序渐进的思维过程，在教材体系结构上，按照由时域分析到变换域分析、由连续时间系统到离散时间系统的顺序安排教学内容，逐步引出一些基本概念和基本分析方法，使学生易于接受。全书共 6 章，内容包括信号与系统概述、连续时间信号与系统的时域分析、连续时间信号与系统的频域分析、连续时间信号与系统的复频域分析、离散时间信号与系统的时域分析、离散时间信号与系统的 z 域分析。

书中各章精选了足够数量的例题和习题，取材广泛且有一定的深度，每章习题最后的二维码中附有习题答案供参考。这主要是方便学生在学习每一章后，对该部分内容进行提炼和总结，并对由此引发的新问题进行思考，有助于提高学生独立思考的能力及分析问题、解决问题的能力。

为提高学生计算机编程能力，本书在每章的最后一节编写了应用 MATLAB 软件对信号与系统进行时域和变换域分析的内容，并配有相应的程序，以使学生对信号与系统中的许多重要概念和基本分析方法有较为直观的认识。

参加本书编写工作的有蒋定德（第 1、2 章）、季策（第 3、4 章）、宋清阳（第 5、6 章）。全书由季策、于尧统稿。本书在编写过程中得到东北大学沙毅老师及苑磊、周宇、田广伟、席暄、于倩茹、王嘉诚、衣起禹、余涛、王若诗、潘桦梓、欧阳材彦、何兴文、张琦涵等同学的大力协助，在此一并表示深深的谢意！

由于作者水平有限，书中难免有不当之处，恳请读者批评指正。

作　者

2018 年 6 月于东北大学

目录

第 1 章　信号与系统概述 ······ 1
1.1　信号的描述与分类 ······ 1
1.2　常用的连续时间信号及其特征 ······ 5
1.3　信号的基本运算与分解 ······ 16
1.4　系统的概念与分类 ······ 24
1.5　系统分析方法 ······ 30
1.6　信号变换与运算的 MATLAB 实现 ······ 31
习题 1 ······ 37
第 2 章　连续时间信号与系统的时域分析 ······ 41
2.1　经典时域分析方法 ······ 41
2.2　零输入响应与零状态响应 ······ 47
2.3　连续时间系统的冲激响应与阶跃响应 ······ 50
2.4　卷积积分及其基本性质 ······ 56
2.5　利用 MATLAB 实现连续时间系统的时域分析 ······ 63
习题 2 ······ 67
第 3 章　连续时间信号与系统的频域分析 ······ 73
3.1　信号的正交分解 ······ 73
3.2　周期信号的傅里叶级数分析 ······ 75
3.3　周期信号的频谱 ······ 80
3.4　非周期信号的频谱——傅里叶变换 ······ 88
3.5　常用非周期信号的傅里叶变换 ······ 92
3.6　傅里叶变换的基本性质 ······ 100
3.7　周期信号的傅里叶变换 ······ 116
3.8　抽样信号的傅里叶变换及抽样定理 ······ 121
3.9　连续时间系统的频域分析 ······ 128
3.10　无失真传输 ······ 135
3.11　理想低通滤波器 ······ 137
3.12　调制与多路复用 ······ 141
3.13　利用 MATLAB 实现连续时间信号与系统的频域分析 ······ 148
习题 3 ······ 158
第 4 章　连续时间信号与系统的复频域分析 ······ 170
4.1　拉普拉斯变换 ······ 170
4.2　拉普拉斯变换的性质 ······ 177

4.3 拉普拉斯逆变换 ……188
4.4 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系 ……192
4.5 线性系统的复频域分析 ……195
4.6 s 域的系统函数 ……202
4.7 系统函数的零、极点分布对系统时域特性的影响 ……206
4.8 系统函数的零、极点分布对系统频响特性的影响 ……211
4.9 系统稳定性 ……215
4.10 利用 MATLAB 实现连续时间信号与系统的复频域分析 ……220
习题 4 ……229
第 5 章 离散时间信号与系统的时域分析 ……239
5.1 离散时间信号及其运算 ……239
5.2 离散时间系统的数学模型 ……246
5.3 常系数线性差分方程的求解 ……248
5.4 离散时间系统的单位样值响应 ……253
5.5 离散时间系统的卷积和 ……255
5.6 利用 MATLAB 实现离散时间信号与系统的时域分析 ……260
习题 5 ……265
第 6 章 离散时间信号与系统的 z 域分析 ……271
6.1 离散时间信号的 z 变换 ……271
6.2 z 变换的基本性质 ……277
6.3 z 逆变换 ……283
6.4 z 变换和拉普拉斯变换的关系 ……287
6.5 利用 z 变换求解差分方程 ……289
6.6 离散时间系统的系统函数 $H(z)$ ……292
6.7 离散时间系统的频率响应特性 ……297
6.8 利用 MATLAB 实现离散时间信号与系统的 z 域分析 ……301
习题 6 ……306
参考文献 ……312

第 1 章　信号与系统概述

1.1　信号的描述与分类

1. 信息、消息与信号

信息在当前社会中具有重要的作用和地位，人们认识世界和改造世界的前提是获取自然界的内在信息。在日常生活中，人们需要利用语言、文字、图像、声音等信息来进行相互交流与协同工作。

所谓信息，是指存在于客观世界的一种事物形象，通常泛指消息、情报、指令、数据、信号等关于周围环境的知识。信息是一切事物运行状态和运行方式的表征，来源于物质的运动变化，如物质的形态、特性在时间、空间上的变化等。没有物质的运动就没有信息；信息不是物质本身，它仅仅反映物质的运行状态或运动方式。

所谓消息，是指用来表达信息的某种客观对象，如电报电文、电话声音、视频中的图像、雷达电子信号侦测中的目标距离和方位等都是消息。消息与信息密切相关，二者既有区别又有联系。消息是信息的载体，信息是抽象化的消息。通信的目的就是传输信息，每一个消息都包含一定的信息量。对消息的内容越不确定，消息所包含的信息量就越大；反之，若能够预测消息的内容，则所获得的信息量就小。

所谓信号，是指消息的表现形式，是带有信息的某种物理量，如电信号、光信号、声信号等。信号是消息的表现形式，消息则是信号的具体内容。信号处理是指对信号进行某种加工或变换，如削弱信号中的多余内容、滤除混杂的噪声和干扰、将信号变换成容易分析与识别的形式等。信号处理的理论基础是对信号基本性能的研究，包括信号的描述、分解、变换、特征提取以及为适应某种要求而进行的信号设计。高速数字计算机的运用，大大促进了信号处理学科的发展，其应用已遍及许多科学技术领域。

综上，信息、消息和信号三者的关系就是借助某种信号形式，传送各种消息，使受信者接收消息中的信息。

2. 信号的描述

描述信号的基本方法是写出它的数学表达式。信号可以用单变量或多变量的函数表示，自变量可以是时间、空间、频率或其他形式量纲的变量，因变量可以是各种物理量或数量，所以信号可以代表不同的物理形态或数值。“信号与系统”课程将信号从各种不同的具体物理形态中抽象出来，视为一般的数学函数，探讨其在数学意义上的变化理论和分析方法。描述信号的另一种方法是绘出信号的波形图。在本书中常常把“信号”与“函数”两名词通用，只有在接触到具体应用问题时，才将信号的物理形态和量纲考虑进去。

本书主要讨论在电路中进行传输和处理的电信号。电信号是指随时间而变化的电压或电流，也可以是电容的电荷、线圈的磁通和空间的电磁波等。电信号与非电信号可以相互转换，非电信号(如声音信号、光强度、机械运动的位移或速度等)可以通过各种传感器较容易地转换成电信号，而电信号又容易传送和控制，所以电信号成为应用最广的信号。本书主要研究信号的表示方法、分解方法、信号的特征描述，以及信号的处理、分析和计算方法等。

3. 信号的分类

根据描述信号的时间函数的性质，可以从不同角度对信号进行分类。

1)确定性信号与随机信号

若信号被表示为一确定的时间函数，对于指定的某一时刻，可确定一相应的函数值，这种信号称为确定性信号，如我们熟知的指数信号、正弦和余弦信号等。然而，在信号传输过程中，不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响，这些干扰和噪声都具有随机特性，因此实际传输的信号往往具有不确定性，这种信号称为随机信号或不确定信号。对于随机信号，不能给出确切的时间函数，只可能知道它的统计特性。在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性，如音乐可以表现为某种周期性变化的波形等。理论上，应该首先研究确定性信号，在此基础上再根据随机信号的统计规律进一步研究随机信号的特性。

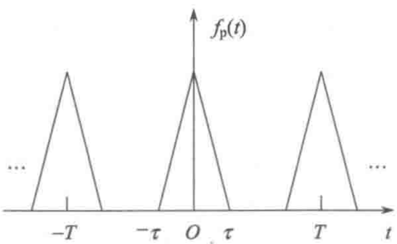


图 1.1　连续时间周期信号

2)周期信号与非周期信号

周期信号是指根据某种时间间隔，周而复始地出现，而且是无始无终的信号。连续时间周期信号 $f_p(t)$ (图 1.1 所示)可写成

$$f_p(t)=f_p(t+kT),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.1}$$

满足式(1.1)的最小 T 值称为该信号的重复周期，简称周期。只要给出周期信号在任一周期内的函数式或波形，便可确知它在任一时刻的函数值。

【例 1.1】　已知信号 $f_{p1}(t)=\cos(20t)$，$f_{p2}(t)=\cos(22t)$，试问 $f_{p1}(t)+f_{p2}(t)$ 是否是周期信号？若是，求其周期。

解　若 $f_{p1}(t)$，$f_{p2}(t)$ 周期分别为 T_1,T_2，设 n_1 和 n_2 为整数，当 $n_1T_1=n_2T_2$，即 T_1/T_2 是一个有理数时，则 $f_{p1}(t)+f_{p2}(t)$ 具有公共周期 $T=n_1T_1=n_2T_2$，且在 n_1 和 n_2 互为质数时，$T=n_1T_1=n_2T_2$ 为 $f_{p1}(t)+f_{p2}(t)$ 的最小公共周期。

由题可知，$\cos(20t)$ 对应的周期 $T_1=2\pi/20=\pi/10$，$\cos(22t)$ 对应的周期 $T_2=2\pi/22=\pi/11$。由于 $T_1/T_2=11/10$ 是有理数，所以 $\cos(20t)+\cos(22t)$ 仍然是周期信号，其公共周期 $T=10T_1=11T_2=\pi$。

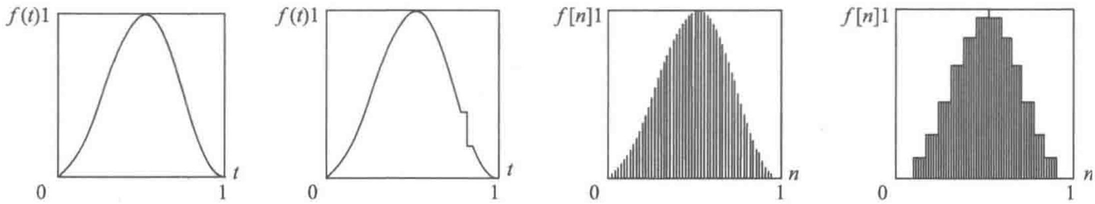
3)连续时间信号与离散时间信号

在任何情况下，信号值都与它的(瞬时)幅度相对应。按照信号在时间轴上取值是否连续，又可将信号分成连续时间信号与离散时间信号。连续时间信号是指在连续时间范

围内有定义的信号(在时间 t 的连续值上给出的信号)，简称连续信号，如图 1.2(a)和图 1.2(b)所示。

由于“连续”是相对时间而言的，故信号幅值可以是不连续的，如图 1.2(b)所示。对于幅值和时间都是连续的信号，又称为模拟信号，如图 1.2(a)所示。

离散时间信号是指时间(其定义域为一个整数集)是离散的信号(仅在时间 t 的离散值上给出的信号)，简称离散信号或序列，如图 1.2(c)和(d)所示。如果离散信号不仅在时间上是离散的，而且在幅度上是量化的，则称为数字信号，如图 1.2(d)所示。

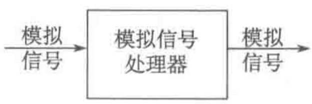


(a) 模拟信号　(b) 连续信号　(c) 离散信号　(d) 数字信号

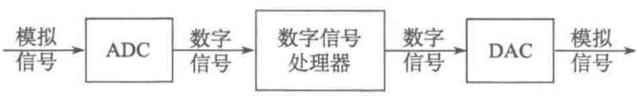
图 1.2　四种信号的波形图

关于离散信号的一些理论也适用于数字信号，所以这两个名词无须严格区分。同样，对连续信号与模拟信号也不进行严格区分。但在习惯上，连续信号与离散信号相对应，模拟信号与数字信号相对应。

连续信号与离散信号可以互相转换。图 1.3 给出了信号处理的两个概念性图示。图 1.3(a)为模拟信号处理器。模拟信号的数字处理要求在处理之前使用模数转换器(ADC)采样模拟信号，还要求利用数模转换器(DAC)将处理过的数字信号再转换回模拟信号形式，如图 1.3(b)所示。



(a) 模拟信号处理器



(b) 模拟信号的数字处理

图 1.3　模拟信号与数字信号处理

常见的连续信号有以下几种情况。

连续信号的连续时间可以是有限的，也可以是无限的。有限连续时间的连续信号称为时限信号，如图 1.4(a)所示；当 $t<t_1$ (t_1 为有限值)时，$f(t)$ 为零的半无限范围的信号称为右边信号，如图 1.4(b)所示；当 $t>t_2$ (t_2 为有限值)时，$f(t)$ 为零的半无限范围的信

号称为左边信号，如图 1.4(c)所示；当 $t<0$ 时，$f(t)$ 为零的信号称为因果信号，如图 1.4(d)所示；反之，当 $t\geqslant 0$ 时，$f(t)$ 为零的信号称为非因果信号，如图 1.4(e)所示。

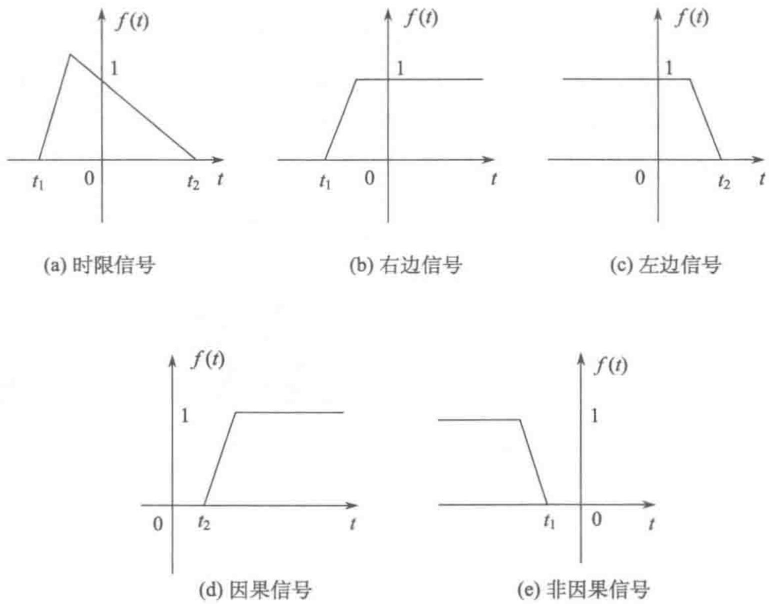


图 1.4　连续时间信号的几种情况

4) 功率信号和能量信号

为了研究信号能量或功率的特性，常常需要研究信号(电流或电压)在单位电阻上所消耗的能量或功率，也称为归一化的能量或功率。在区间 $-T<t<T$ 内，信号 $f(t)$ 在单位电阻上的能量为

$$\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

在单位电阻上所消耗的平均功率为

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

通常将信号的能量定义为在时间区间 $(-\infty,\infty)$ 内信号 $f(t)$ 的能量，记为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

信号的功率定义为在时间区间 $(-\infty,\infty)$ 内信号 $f(t)$ 的平均功率，记为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

若信号 $f(t)$ 的能量为有限值，即

$$0<E<\infty,\quad (\text{此时}P=0) \tag{1.6}$$

则称 $f(t)$ 为能量有限信号，简称为能量信号，如非周期脉冲信号 $G_\tau(t)$。

若信号 $f(t)$ 的功率为有限值，即

$$0 < P < \infty, \quad (\text{此时 } E \to \infty) \tag{1.7}$$

则称 $f(t)$ 为功率有限信号，简称为功率信号。所有周期信号都是功率信号，在 $|t| \to \infty$ 时仍有数值的一类非周期信号也是功率信号，如 $u(t)$，$\mathrm{sgn}(t)$ 等。

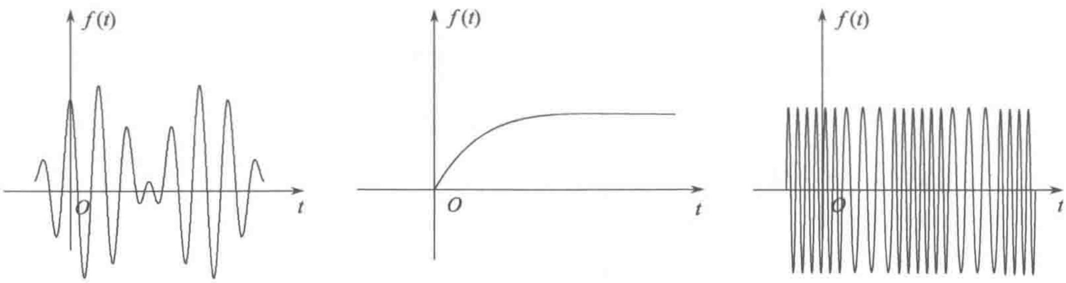
此外，还有一些非功率非能量的信号，如单位斜变信号 $tu(t)$。

5) 一维信号与多维信号

从数学表达式来看，信号可以表示为一个或多个变量的函数。语音信号可表示为声压随时间变化的函数，这是一维信号；一张黑白图像中每个像素点是二维平面坐标中两个变量的函数，因此是二维信号；电磁波在三维空间传播，若同时考虑时间变量就会构成四维信号。在以后的讨论中，一般情况下只研究一维信号，且自变量为时间。

6) 实信号与复信号

用物理方法可实现的信号都是关于时间的实函数，它在各时刻的函数值均为实数，统称为实信号。图 1.5 表示在实际系统中产生的几个实信号的例子。



(a) 通信系统中的调幅信号　(b) RC低通滤波器的阶跃响应　(c) 频移键控的二进制位流

图 1.5　在实际系统中产生的实信号

复信号由实部和虚部组成，虽然在实际系统中不能产生复信号，但是为了便于理论分析，往往采用复信号来代表某些物理量。在连续信号中最常用的复信号是复指数信号，1.2 节将详细介绍。

7) 奇异信号与普通信号

信号本身包含不连续点，或其导数与积分存在不连续点，而且不能以普通函数的概念来定义，而只能以“分配函数”或“广义函数”的概念来定义的信号称为奇异信号。最常用的奇异信号是单位斜变信号 $f(t)$、单位阶跃信号 $u(t)$、单位冲激信号 $\delta(t)$ 以及它们的各阶导数。

1.2　常用的连续时间信号及其特征

下面给出一些常用连续时间信号的表达式和波形，并分析其特征。

1. 指数信号

指数信号的表示式为

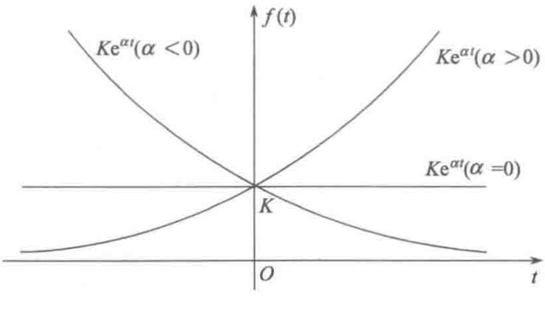


图 1.6　指数信号

$$f(t) = K\mathrm{e}^{\alpha t} \tag{1.8}$$

式中，α 是实数。若 $\alpha > 0$，信号则随时间增长；若 $\alpha < 0$，信号则随时间衰减；在 $\alpha = 0$ 的特殊情况下，信号不随时间变化，称为直流信号。常数 K 表示指数信号在 $t = 0$ 点的初始值。指数信号的波形如图 1.6 所示。

指数 α 的绝对值大小反映了信号增长或衰减的速率。$|\alpha|$ 的倒数称为指数信号的时间常数，记作 τ，即 $\tau = 1/|\alpha|$，τ 越大，指数信号增长或衰减的速率越小。

指数信号的一个重要特性是它对时间的微分和积分仍然是指数形式。

2. 正弦信号

正弦信号和余弦信号两者仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$，经常统称为正弦信号，写作

$$f(t) = K\sin(\omega t + \theta) \tag{1.9}$$

式中，K 为振幅，ω 为频率，θ 为初相位。其波形如图 1.7 所示。

在信号与系统分析中，有时会遇到衰减的正弦信号，其波形如图 1.8 所示。

此正弦振荡的幅度按指数规律衰减，其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ K\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t), & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

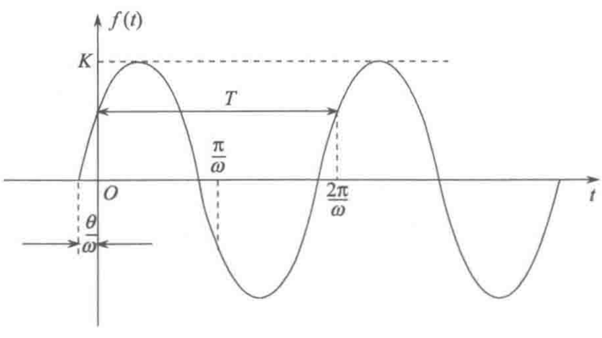


图 1.7　正弦信号

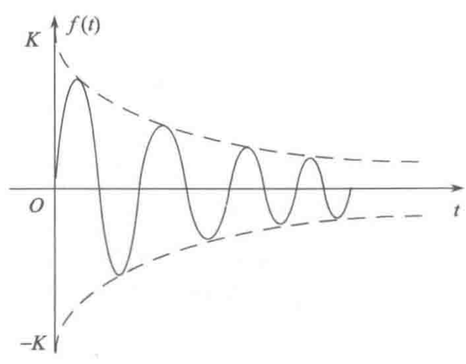


图 1.8　指数衰减的正弦信号

借助下面的欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t)$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} = \cos(\omega t) - \mathrm{j}\sin(\omega t)$$

可将正弦信号和余弦信号表示为复指数信号的形式

$$\sin(\omega t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) \tag{1.11}$$

$$\cos(\omega t)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) \tag{1.12}$$

这是今后经常要用到的两对关系式。

与指数信号的性质类似，正弦信号对时间的微分与积分仍为同频率的正弦信号。

3. 复指数信号

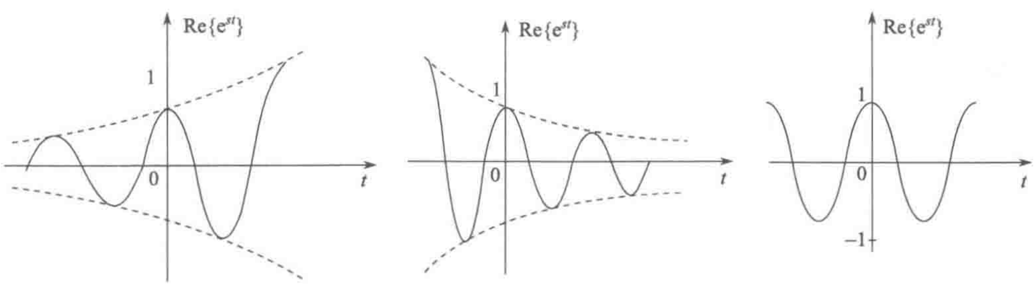
复指数信号定义为

$$f(t)=\mathrm{e}^{st},\quad -\infty<t<\infty \tag{1.13}$$

式中，复数 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，$\sigma$ 是 s 的实部，常记作 $\mathrm{Re}\{s\}$；ω 是 s 的虚部，常记作 $\mathrm{Im}\{s\}$。根据欧拉公式，式(1.13)可展开为

$$f(t)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+\mathrm{j}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t=f_1(t)+\mathrm{j}f_2(t) \tag{1.14}$$

可见，一个复指数信号可分解为实、虚两部分，它们分别是增长(或衰减)的余弦、正弦信号。指数因子的实部 σ 表征余弦信号和正弦信号的振幅随时间变化的情况。若 $\sigma>0$，则信号呈增幅振荡；若 $\sigma<0$，则信号呈衰减振荡；若 $\sigma=0$，则信号呈等幅振荡，三种情况如图 1.9 所示。指数因子的虚部 ω 表示余弦和正弦函数的角频率。当 $\omega=0$ 时，复指数信号就成为实指数信号。当 $\sigma=\omega=0$ 时，则 $f(t)=1$，复指数信号就成为直流信号。可见，一个复指数信号在 σ,ω 取不同值时，可以表示许多常用的信号。利用复指数信号，可以简化许多分析和运算，它是一种非常重要的基本信号。



(a) 增幅振荡($\sigma>0$)　(b) 衰减振荡($\sigma<0$)　(c) 等幅振荡($\sigma=0$)

图 1.9　复指数信号 e^{st} 在 σ 取不同值时的波形

4. 抽样信号

抽样信号也称为抽样函数 $\mathrm{Sa}(t)$，其表示式为

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t} \tag{1.15}$$

其波形如图 1.10 所示。它是一个偶函数，在时间轴的正、负方向上振幅是逐渐衰减的，且当 $t=\pm\pi,\pm2\pi,\cdots,\pm n\pi$ 时，函数值等于零。此外，$\mathrm{Sa}(t)$ 函数还具有以下性质

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\pi \tag{1.16}$$

$\mathrm{Sa}(t)$ 函数的另一种形式称为辛格函数 $\sin c(t)$，其表示式为

$$\sin c(t)=\frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)} \tag{1.17}$$

图 1.11 给出了 $\sin c(t)$ 函数和 $\sin c^2(t)$ 函数的波形图。容易看出，当 $t=\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$\sin c(t)=0$ 。$\sin c(t)$ 或 $\sin c^2(t)$ 都等于内接主瓣的三角形 ABC 的面积。

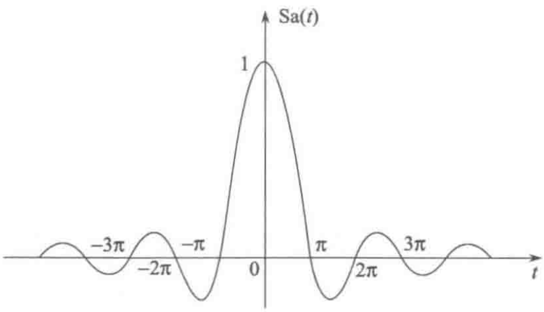


图 1.10　抽样信号 $\mathrm{Sa}(t)$

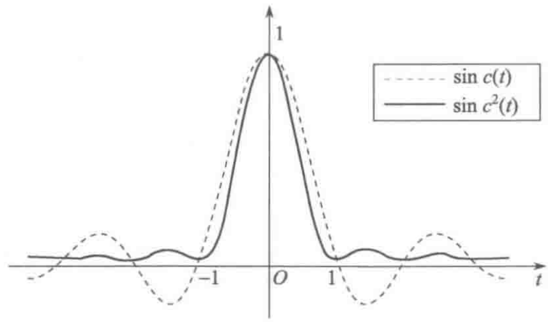


图 1.11　$\sin c(t)$ 函数和 $\sin c^2(t)$ 函数

因为 $\mathrm{Sa}(t)$ 函数和 $\sin c(t)$ 函数的因子 $1/t$ 随时间增加而减小，而其中正弦项又是振荡的，所以 $\mathrm{Sa}(t)$ 函数和 $\sin c(t)$ 函数均为衰减振荡，其波形的主瓣位于原点两侧的第一个零点之间，旁瓣向正、负两个方向逐渐衰减。此外，两个函数均具有偶对称性，且在原点处具有单位高度。

5. 钟形信号

钟形信号(或称高斯信号)的定义为

$$f(t)=E\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \tag{1.18}$$

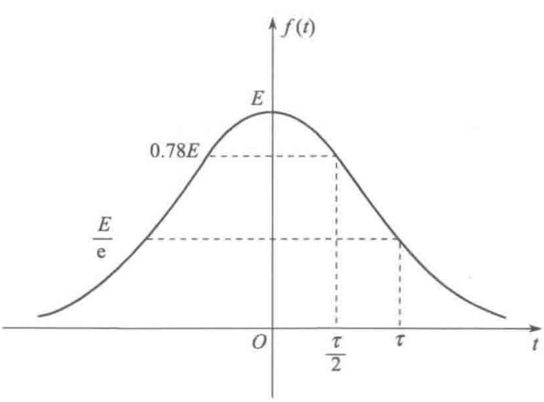


图 1.12　钟形信号

其波形如图 1.12 所示。令 $t=\frac{\tau}{2}$ 代入函数式求得

$$f\left(\frac{\tau}{2}\right)=E\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\approx 0.78E$$

这表明，函数式中的参数 τ 是当 $f(t)$ 由最大值 E 下降为 $0.78E$ 时所占据的时间宽度。

钟形信号在随机信号分析中占有重要地位，在本书中也将涉及。

6. 单位斜变信号

通常，我们研究的典型信号都是一些数学模型，这些信号与实际信号可能有差距。然而，只要把实际信号按某种条件理想化，即可运用理想模型进行分析。以下将要介绍的奇异信号包括斜变、阶跃、冲激和冲激偶四种信号。其中，阶跃信号与冲激信号是两种最重要的理想信号模型。

斜变信号也称为斜坡信号或斜升信号，是指从某一时刻开始随时间呈正比例增长的信号。如果增长的变化率是 1，就称为单位斜变信号，其波形如图 1.13 所示，表示式为

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geqslant 0\end{cases}\tag{1.19}$$

如果将起始点移至 t_0，则应写作

$$f(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ t-t_0, & t\geqslant t_0\end{cases}\tag{1.20}$$

其波形如图 1.14 所示。

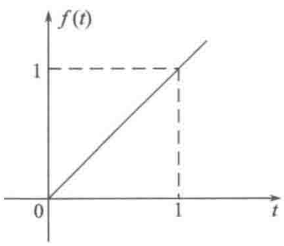


图 1.13　单位斜变信号

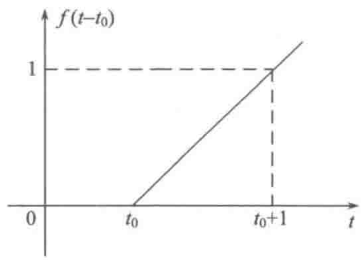


图 1.14　延迟的斜变信号

7. 单位阶跃信号

单位阶跃信号通常以符号 $u(t)$ 表示，其波形如图 1.15 所示。

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}\tag{1.21}$$

在跳变点 $t=0$ 处，函数值未定义，或在 $t=0$ 处规定函数值 $u(0)=0.5$。

容易证明，单位斜变信号的导数等于单位阶跃信号。

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)$$

延时的单位阶跃信号表示为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ 1, & t>t_0\end{cases} \tag{1.22}$$

其波形如图 1.16 所示

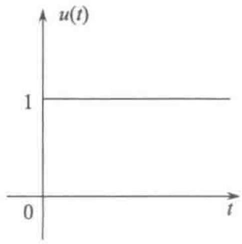


图 1.15　单位阶跃信号

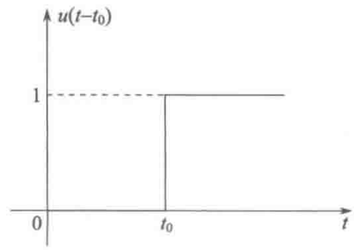


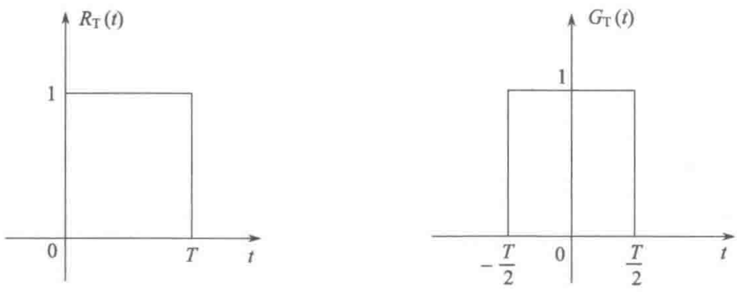
图 1.16　延时的单位阶跃信号

为书写方便，常利用阶跃及其延时信号之差来表示矩形脉冲，其波形如图 1.17(a)或(b)所示。对于图 1.17(a)，信号 $R_T(t)$ 可以表示为

$$R_T(t)=u(t)-u(t-T)$$

式中，下标 T 表示矩形脉冲出现在 0～T 时刻。如果矩形脉冲对于纵轴左右对称，这类信号常称为门信号或窗信号。对于图 1.17(b)，门信号 $G_T(t)$ 可以表示为

$$G_T(t)=u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right) \tag{1.23}$$



(a)　(b)

图 1.17　矩形脉冲信号

式中，下标 T 表示矩形脉冲的宽度。

利用阶跃信号可以较方便地以数学表示式来描述各种信号的接入时间，例如，将图 1.18 的波形写作

$$f_1(t)=\sin(t)\cdot u(t) \tag{1.24}$$

而图 1.19 的波形则表示为

$$f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}[u(t)-u(t-t_0)] \tag{1.25}$$

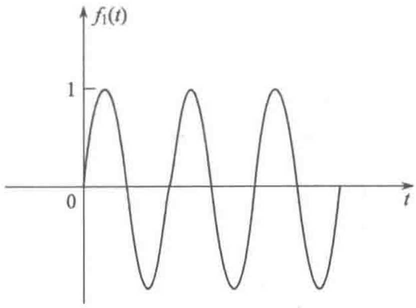


图 1.18　信号 $\sin(t)\cdot u(t)$ 的波形

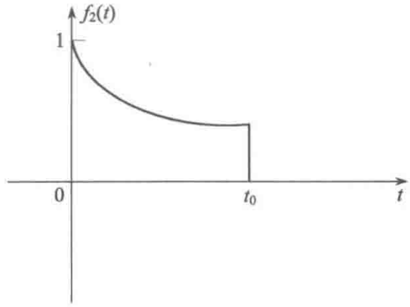


图 1.19　信号 $f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}[u(t)-u(t-t_0)]$ 的波形

利用阶跃信号还可以表示符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$，其定义如下

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases} \tag{1.26}$$

其波形如图 1.20 所示。显然，利用阶跃信号可将符号函数表示为

$$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1 \tag{1.27}$$

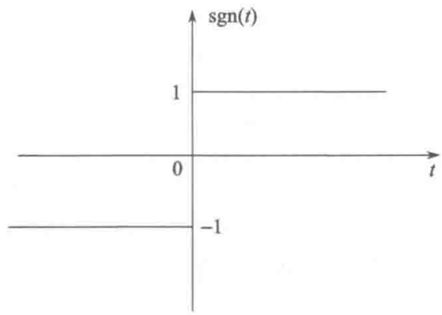


图 1.20　信号 $\mathrm{sgn}(t)$ 的波形

与阶跃函数类似，对于符号函数在跳变点也可不予定义，或规定 $\mathrm{sgn}(0)=0$。

8. 单位冲激信号

单位冲激信号 $\delta(t)$ 如图 1.21(a) 所示，其定义为

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ +\infty, & t=0\end{cases} \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{1.28}$$

它是狄拉克(Dirac)最初提出并定义的，所以又称狄拉克-δ 函数(Dirac Delta Function)。式(1.28)表示集中在 $t=0$ 处的面积为 1(也称为强度为 1)、幅度为无穷的冲激，其脉宽 τ=0。这是工程上的定义，只是为了应用，使运算方便，并不强调其数学上的严谨性。

冲激信号的一个重要标志是它的积分值，而关于它的形状的精确细节则是无关紧要的。为了对 $\delta(t)$ 有一个直观的认识，可将 $\delta(t)$ 看成某些普通函数的极限。

观察图 1.21(b) 中面积为 1 的矩形脉冲簇。当 $\tau\to 0$ 时，对于阴影部分，其脉冲的幅值 $1/\tau\to\infty$。这种极限状态下的函数即为冲激函数 $\delta(t)$，即

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}(1/\tau)[u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)] \tag{1.29}$$

除了采用矩形脉冲簇取极限定义冲激函数外，也可以用三角形脉冲簇、双边指数脉冲簇或抽样函数簇取极限的方法来定义冲激函数，详细过程这里不再赘述，请读者查阅相关资料。

由于 $t\neq 0$ 时，$\delta(t)=0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$，故有