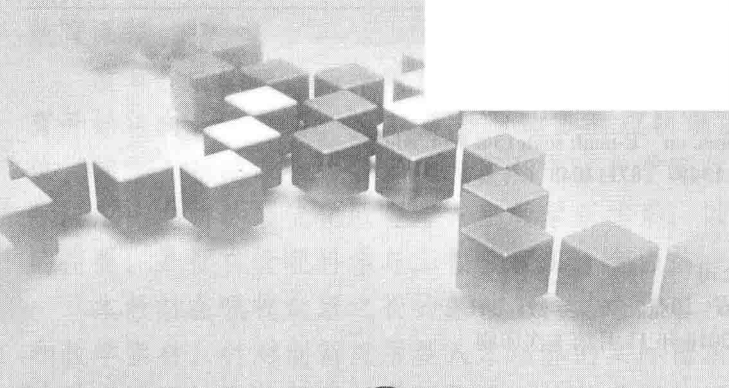
# 最优化原理与方法

李 军 编著

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

# 最优化原理与方法

李 军 编著



华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
·广州·

## 内容简介

本教材紧紧围绕数学模型的构建与求解，系统介绍了科学分析所需要的最优化原理与方法。以问题为导向，用大量示例和案例剖析最优化原理与方法在工程技术和经济管理等领域的广泛应用。着眼于培养读者运用最优化原理与方法解决工程、经济、管理等实际问题的能力，进而支撑创新应用型人才培养的目标。

本教材侧重实际应用，在保持知识体系相对完整的同时，内容选材注重契合普通高校创新应用型人才培养的办学定位对学生知识、能力和素质的要求；知识论述强调经济与工程的逻辑关系及内涵，以示例和案例分析为主线，避免为追求纯数学的严密给读者学习带来过大的困惑。

本教材可作为普通高校理、工、商科各专业本科生、研究生（含工程硕士或专业硕士）学习最优化原理与方法（或运筹学）的教材或参考书，亦可作为企业管理人员、工程技术人员和国家公务员培训的教材或自学参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

最优化原理与方法／李军编著. —广州：华南理工大学出版社，2018. 11
ISBN 978-7-5623-5748-3

Ⅰ. ①最… Ⅱ. ①李 Ⅲ. ①最佳化-数学理论 Ⅳ. ①O224

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 259076 号

ZUIYOUHUA YUANLI YU FANGFA
**最优化原理与方法**
李军 编著

---

**出 版 人：** 卢家明
**出版发行：** 华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼 邮编：510640）
http://www.scutpress.com.cn E-mail: scutc13@scut.edu.cn
营销部电话：020-87113487 87111048（传真）
**策划编辑：** 谢茉莉
**责任编辑：** 谢茉莉
**印 刷 者：** 广州市新怡印务有限公司
**开 本：** 787mm×1092mm 1/16 **印张：** 16 **字数：** 341 千
**版 次：** 2018 年 11 月第 1 版 2018 年 11 月第 1 次印刷
**定 价：** 35.00 元

---

# 前言

随着全球经济一体化，企业的市场环境变化越来越快，越来越复杂，竞争也越来越激烈，企业要想在充满无穷变数与风险的市场上求得生存与发展，就必须能够及时地对所面临的机遇与挑战做出科学的决策。这就要求企业管理者和工程技术人员能够驾驭科学决策技术，有效地解决生产经营中所出现的各种实际问题。最优化原理与方法在企业经营活动中应用的广度和深度令人吃惊，其地位越来越重要，科学规划、设计与决策的关键作用也越来越显著。最优化所提供的理论、技术和方法不仅可以帮助企业解决战术层面上的问题，以降低成本或提高利润；而且可以帮助企业解决战略层面上的问题，使企业建立并保持长久的竞争优势。最优化的基本理论和方法已是广大管理人员和工程技术人员所必须掌握的通用知识。

为了迎接新工业革命尤其是中国制造2025对高等工程教育的挑战，人们更加关注教育投入的实际回报及其现实需要，成果导向教育（outcome based education，OBE）已经成为我国教育改革的主流理念，创新应用型人才培养也已成为普通高校十分广泛的培养目标。成果导向或目标导向、能力导向的宗旨，就是要使学生具有解决工程复杂问题的能力，而工程复杂问题就是要通过科学分析才能解决的问题。科学分析必须综合运用技术与经济理论，通过构建与求解数学模型才能得以实现。因此，以数学模型为基础的最优化原理与方法自然成了一门不可或缺的在理、工和商科中普遍开设的通识教育课程。

改革开放以来，高等教育从精英教育发展为大众教育，目前又从大众教育开始转向普及教育，尤其是普通地方高校明确的创新应用型人才培养定位，使作为基础课程的最优化原理与方法教学面临着巨大的挑战。如何从实际应用出发构建最优化原理与方法教学新体系，以适应创新应用型人才培养的需要，是摆在管理科学与工程教育工作者面前一个新的课题。

本教材在吸收众家之长的基础上，结合作者积累的教学经验、教研成果和教学素材，针对创新应用型人才培养的实际需求，构建了最优化原理与方法具有通识性质的课程教学新体系，该体系以知识对能力、素质的支撑为基础，并不过多追求内容体系的完整性。针对教学中学生普遍存在的难点问

题，利用示例和案例进行了全新的论述，充分体现创新应用型人才培养定位。最优化原理与方法需要以微积分、线性代数、概率论与数理统计等高等数学的知识为基础，本教材始终把数学的应用保持在中等水平，对知识的论述强调工程、经济的内涵与逻辑，避免为追求所谓的精密而陷入复杂的纯数学的论证，解决学生长期以来最优化原理与方法课程难学、教材难读的问题。

本教材共分9章，即绪论、线性规划、运输问题、整数规划、动态规划、决策论、博弈论、存贮论和图论。本教材在编著过程中参考了大量国内外的图书文献，吸收了参考文献中大量的营养成分，丰富的营养成分是本教材健康诞生所不可缺少的；此外，多方的关心和支持也是圆满完成本教材编著工作的重要保证。在此，对提供意见和建议的专家、学者，以及所有参考文献的作者表示衷心的感谢。

由于受作者知识水平和学术视野的局限，本教材中难免存在一些不足和错误，热诚欢迎广大读者批评指正。

作　者

2018 年 6 月

# 目　录

# 1 绪 论

## 1.1 最优化的产生与发展

任何一门科学都是为解决一些社会实际问题而出现并得以发展的，为了更好地理解和掌握今天的最优化原理与方法，有必要了解一下最优化产生和发展的历史。最优化是运筹学的理论基础和核心内容，它的产生与发展的过程就是运筹学的产生与发展的过程，运筹学就是伴随着它的诞生而诞生，并伴随着它的发展而发展起来的一门崭新的学科，最优化在学科划分上自然归属运筹学。

### 1.1.1 最优化的产生

最优化思想的出现可以追溯到较为久远的时期，比如中国古代的孙子兵法就是一个典型的例证。在西方最优化思想的出现也可以追溯到20世纪初，比如1914年英国工程师兰彻斯特提出了兰彻斯特战斗方程，1917年丹麦工程师爱尔朗提出了一些等候理论的公式，1920年美国工程师列温逊研究了商业广告和顾客心理问题，等等。虽然最优化的思想和方法在很久以前已留下了被应用的痕迹，历代先驱所做的一些工作今天看来也确实具有一定的最优化性质，但这些零散的活动还不足以标志作为系统知识体系的一门新学科的诞生。

系统最优化的产生可以说很难有一个明确的时间界定，目前国际上比较公认的观点是第二次世界大战前后。系统最优化最早出现在1938年，波德塞（Bawdsey）雷达站的负责人洛维（Rowe）提出了优化防空作战系统运行的问题，以便有效地预防德军飞机入侵。为有效开展研究工作，雷达站还成立了由各领域的科学家组成的跨学科研究小组，并用“Operational Research”命名这种研究活动，这就是直至今日人们仍然将运筹学称为“OR”的历史由来。1939年，从事此方面问题研究的科学家被召集到英国皇家空军指挥总部，成立了一个由物理学家布莱凯特（Blackett）博士带领的11人军事科技攻关小组，因其成员学科性质的多样性，这一最早成立的军事科技攻关小组被戏称为“布莱凯特马戏团”。由于“布莱凯特马戏团”的活动是人类第一次大规模、有组织的系统最优化活动，所以后人将该小组的成立作为最优化和运筹学产生的标志。

此后，军事科技攻关小组的活动范围不断扩大，从最初的仅限于空军，逐步扩展

到了海军和陆军，研究内容也从对军事战术性问题的研究，逐步扩展到对军事战略性问题的研究。由于科学家的天赋、战争的需要以及不同学科的交互作用，这一军事科技攻关小组在提高军事斗争能力方面取得了惊人的成功，使得最优化原理与方法在整个军事领域迅速传播。到 1941 年，英国皇家陆海空三军都成立了最优化科学小组。比较典型的论题包括雷达布置策略、反空袭系统控制、海军舰队的编制和对敌潜艇的探测等。军事最优化小组巨大成就所显示出的神奇力量，促使其他盟军也纷纷效仿，建立自己的最优化研究小组。

### 1.1.2 最优化的发展

第二次世界大战期间，最优化理论成功解决了许多重要作战问题，显示了科学的巨大威力，为最优化后来的发展铺平了道路。战后的 1945 年至 1950 年，美国只用了短短 5 年时间就完成了战争的恢复期，社会经济进入了繁荣发展期。由于社会需求的变化，许多从事军事最优化活动的科学家将其精力转向对战时仓促建立起来的最优化技术进行加工整理，并探索运用它们解决社会经济问题的可能性。由于经济问题与军事问题在优化方面的相似性，使最优化原理与方法很快走进社会经济领域，在 1950 年代以后得到了广泛的应用和发展，形成了规划论、存贮论、决策论、博弈论、排队论和图论等一整套比较完备的最优化理论体系。

1950 年代，系统最优化发展到了一个新的水平，系统最优化或称为运筹学开始成为一门独立的学科，其标志就是大量运筹学会的创建和相应期刊的问世。美国于 1952 年成立了运筹学会，并出版发行了学会期刊“运筹学”，世界许多其他国家也效仿美国先后创办了自己的运筹学会和期刊。在 1956 年至 1959 年短短的几年时间里，就有法国、印度、日本等十几个国家先后成立了运筹学会，并有 6 种运筹学期刊先后问世。1957 年在英国牛津大学召开了第一届运筹学国际会议，1959 年成立了国际运筹学会（International Federation of Operations Research Societies，IFORS）。此外，还有一些地区性组织，如 1976 年欧洲运筹研究会（EURO）成立，1985 年亚太运筹研究会（APORS）成立。

计算机的普及与发展是推动系统最优化迅速发展的巨大动力。没有现代计算机技术，求解复杂的系统最优化模型是不可想象的。系统最优化的实践反过来又促进了计算机技术的发展，它不断地对计算机提出内存更大、运行速度更快的要求。可以说系统最优化在过去的半个多世纪里，既得益于计算机技术的应用与发展，同时也极大地促进了计算机技术的发展。1960 年代以来，系统最优化得到了迅速的普及和发展。系统最优化可以细分为许多分支，许多高等院校把最优化的规划理论引入本科教学课程，把规划理论以外的内容引入硕士、博士研究生的教学课程。由于最优化具有广泛的应用领域，通常在理、工、商科中均可以看到它的存在。

1950 年代中期，中国科学院从美国将最优化引入我国。最初曾根据其英文

“operations research（简称 OR）”直译为“运用学”，1957 年在全国第一次最优化工作会议上，专家学者们从“运筹帷幄之中，决胜千里之外”这句古语中摘取“运筹”二字，将 OR 正式命名为“运筹学”，比较恰当地反映了系统最优化这门学科的性质和内涵。中国第一个运筹学小组在钱学森、许国志先生的推动下，于 1956 年在中国科学院力学研究所成立，1958 年又在工作小组的基础上成立了运筹学研究室。可见，运筹学一开始就被理解为同工程有密切联系的学科。1959 年，第二个运筹学组织运筹学小组在中国科学院数学所成立，这是“大跃进”中数学家们投身于国家建设的一个产物。力学所的研究室与数学所的研究小组于 1960 年合并成为数学研究所的一个研究室，当时的主要研究方向有线性规划、运输问题、动态规划、投入产出分析、排队论、非线性规划和图论等。1960 年在山东济南召开了全国应用运筹学的经验交流和推广会议，1962 年又在北京召开了全国运筹学学术会议。1963 年是中国运筹学教育史上值得一提的年份，数学研究所的运筹学研究室为中国科技大学应用数学系的第一届毕业生（1958 届）开设了较为系统的运筹学课程，这是第一次在中国的大学里开设运筹学课程。今天，运筹学课程已变成所有高校商学院、工学院乃至数理学院和计算机学院的基础课程。

在“文化大革命”期间，华罗庚最早点燃了最优化在中国推广应用的火焰，身为中国数学学会理事长和中科院学部委员的他，亲自率领一个被大家称为“华罗庚小分队”的小组，到农村、工厂传授基本的优化技术和统筹方法，并指导将它们应用于日常的生产和生活中。自 1965 年起的 10 年中，他到过约 20 个省和无数个城市，受到各界人士的欢迎，他的工作得到了毛主席的肯定和表扬。华罗庚在这一时期的推广工作，播下了运筹学哲学思想的种子，极大地推动了运筹学在中国的普及和发展。直到今天，经历过那个时代的许多民众还记得“优选法”“黄金分割法”这些词汇。1950 年代后期，运筹学在中国的应用集中在运输问题上，其中一个广为流传的例子就是打麦场的选址问题；此外，中国邮路问题也是在那个时期由山东师范大学管梅谷教授提出的。从某种意义上来讲，当时我国已在目前非常热门的物流学领域有了一些雏形性的研究。

中国运筹学会于“文化大革命”后的 1980 年成立，当时作为中国数学学会的一个分会。第一届全国代表大会在山东济南召开，华罗庚被选为第一届理事长，副理事长有许国志、越民义。中国运筹学会在 1982 年成为国际运筹学联合会（IFORS）的成员。1992 年运筹学第四次全国代表大会在四川成都召开，在本次大会上，中国运筹学会从中国数学学会中独立出来，成为国家一级学会。这是运筹学发展史上的一个重要事件，寓意着人们对运筹学认识的加深。运筹学虽以数学为基础，但却同数学有着本质的区别。

运筹学的最优化理论固然重要，但应用才是它的灵魂。目前，我国运筹学无论是在理论上还是在实践上，与世界先进水平相比都还存在一定的差距，纵观运筹学的前沿领域还鲜见我国运筹学工作者的身影。尽管与国际先进水平相比存在较大的差距，

但近30年来，我国运筹学工作者在生物工程、计算机科学、管理科学，以及金融工程等方面也取得了一些可喜的成绩，甚至有一些已达到国际先进水平。如在生物工程方面，将最优化、图论、神经网络等最优化理论与方法应用于分子生物信息学中的DNA与蛋白质序列比较、生物进化分析、蛋白质结构预测等问题的研究；在计算机科学方面，运用动态规划、图论、神经网络、随机过程等进行芯片测试与排队网络的数量指标分析；在金融工程方面，将最优化及决策分析方法，应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析等；在供应链管理方面，利用随机动态规划模型，研究多重决策的最优策略等。

## 1.2 最优化的内涵

最优化是自20世纪三四十年代发展起来的一门具有多学科交叉特点的边缘学科，它主要研究人类对各种资源的运用及筹划活动，以期发挥有限资源的最大效用，从而实现系统最优化目标。对最优化的认识通常存在两个视角，即以经济管理决策支持为目标的应用型学科管理运筹学和以纯数学系统最优化方法为目标的理论型学科数学运筹学。本书所介绍的最优化是指前者，属管理运筹学范畴。运筹学至今还没有一个统一确切的定义，下面提出几种有代表性的定义，以说明运筹学的性质和特点。

### 1.2.1 英国运筹学会所给出的定义

运筹学是指应用科学方法处理工业、商业、政府、国防中因指挥和管理人、机器、原料和资本大系统而产生的复杂问题。这种独特的方法要构建这些系统的科学模型、衡量概率和风险等因素，用它们来预测和比较各种不同的决策、策略或控制的结果。其目的是帮助管理阶层科学地选择他们的策略和行动。①

### 1.2.2 美国运筹学会所给出的定义

运筹学是关于如何实现人机系统最佳设计与最佳运行的科学决策方法，这种决策通常是在要求对短缺资源进行分配的条件下进行的。②

①原文：Operational Research is the application of the methods of science to complex problems arising in the direction and management of large systems of men, machines, materials and money in industry, business, government, and defense. The distinctive approach is to develop a scientific model of the system, incorporating measurements of factors such as chance and risk, with which to predict and compare the outcomes of alternative decisions, strategies or controls. The purpose is to help management determine its policy and actions scientifically.

②原文：Operations Research is concerned with scientifically deciding how to best design and operate man-machine systems, usually under conditions requiring the allocation of scarce resources.

### 1.2.3 《中国企业管理百科全书》所给出的定义

应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人、财、物等有限资源统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。

### 1.2.4 综合性定义

综合以上种种定义，本教材将最优化定义为："通过构建、求解数学模型，规划、优化有限资源的合理利用，为科学决策提供量化依据的系统知识体系。"

最优化把有关的运行系统首先归结成数学模型，然后用数学方法进行定量分析和比较，求得合理运用人力、财力和物力的系统运行最优方案。因为资源合理利用问题是普遍存在的问题，所以最优化有广阔的应用领域，是系统工程学和现代管理科学中的一种基础理论和不可缺少的思想、方法、手段和工具。

## 1.3 最优化的步骤

最优化的定义已经告诉我们，它与其他学科的本质区别就在于其独特的研究方法，即数学模型的方法。系统最优化经过近一个世纪的发展，已经逐步形成了一套系统的解决和研究实际问题的方法，它可以概括为五个阶段：①构建问题的数学模型，将一个实际问题抽象为一个理论模型；②分析问题最优（满意）解的性质和求解问题的难易程度，寻求合适的求解方法；③设计求解算法并对算法的性能进行理论分析；④编程实现算法并分析模拟数值结果；⑤判断模型和解法的有效性，提出解决实际问题的方案。

这五个阶段并不是相互独立的，也绝非依次进行的。正如邦德（美国工程院院士，曾任美国军事运筹学会主席和美国运筹学会主席）在谈到他几十年建模和分析的体会时指出的那样："对于模型的开发应该是一种连续的研究、开发、分析、改进的循环过程，是一个原型化和呈螺旋状发展的过程，而不是一个单个事件。"邦德在回顾运筹学在美国军事力量的改造中所起的重要作用时还指出："对一个过程、一个系统，或者一个企业的建模是一种艺术。这项艺术在于确定哪些因素与活动需要包含在模型之中，哪些是变量、常数，哪些是确定的、随机的，有哪些约束，等等；在建立变量之间关系时，应做些什么假设；以及在逐步运作中，如何排除在建立初始模型时所引入的某些不切实际的假设。邦德还指出，构建模型是一种可以学习的艺术。

## 1.4 最优化的模型

最优化的实质在于建立和使用模型。尽管模型的具体结构和形式总是与其要解决的问题相联系，但这里我们抛弃模型在外表上的差别，从最广泛的角度抽象出它们的共性。

模型在某种意义上说是客观事物的简化与抽象，是研究者经过思维抽象后用文字、图表、符号、关系式以及实体模样对客观事物的描述。不加任何假设和抽象的系统称为现实系统，作为研究对象的系统来说，总是要求我们求解一定的未知量并给出相应的结论，求解过程如图 1 -1 所示。图中左侧的虚线表示了人们最直接的目标，右侧的实线表示了这一目标的具体实现路径。


图 1 -1　最优化的工作过程

模型有三种基本类型，即形象模型、模拟模型和数学模型。最优化模型主要是指数学模型。构建模型是一种创造性劳动，成功的模型是科学和艺术的综合体，其过程是一系列的简化、假设和抽象。在模型中现实系统的哪些方面可以忽略、哪些方面应该合并、可以做哪些假设以及模型应构建成什么形式等，都是该阶段需要回答的问题。在构建模型中常用的假设包括两个方面：一方面是离散变量的连续性假设，另一方面是非线性函数的线性假设。很显然，构建模型阶段具有一定的主观性，在某种意义上说，面对同样的现实系统，不同的人能构建出完全不同的模型，而它们之间可能并无优劣之别。当然这并非意味着根本不存在区分好坏模型的客观标准，也并非说明模型的效用与模型的构建过程无关。虽然对具体的模型可能会有许多特殊的标准，但是总的来说模型的好坏决定于其对实现系统目标的实用性。

既然最优化模型主要是指数学模型，那么什么是数学模型呢？数学模型可以简单地描述为：用字母、数字和运算符来精确反映变量之间相互关系的式子或式子组。数学模型由决策变量、约束条件和目标函数三个要素构成。决策变量即问题中所求的未知的量，约束条件是决策所面临的限制条件，目标函数则是衡量决策效益好坏的数量指标。数学模型的一般形式可用式（1 -1）表示。

$$\min Z = P(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = b \\ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-1}$$

式（1 -1）中：$x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$ 代表 $n$ 个决策变量，$\min Z = P$（$x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$）代表目标函数，$f$（$x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$）$=b$ 代表约束条件（它既可以是只有一个函数的式子，也可以是有 $m$ 个函数的式子组），而 $x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n \geqslant 0$ 则代表决策变量的非负约束。

# 2 线性规划

线性规划（linear programming，LP）是最优化的一个重要组成部分，是运筹学的一个重要分支。自 1947 年美国数学家丹捷格（G. B. Dantzig）提出了线性规划问题求解的一般方法单纯形法之后，线性规划在理论上日益趋向成熟，在实践应用上日益广泛和深入。特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更是迅速扩大。线性规划在工业、农业、商业、交通运输、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥重要的作用，它已成为现代科学管理的重要手段之一。

## 2.1 线性规划的数学模型

线性规划总是与有限资源的合理利用问题结合在一起，这里的有限资源是一个广义的概念，它可以是劳动力、原材料、设备、资本等有形的事物，也可以是时空、技术等无形的事物；这里的合理利用通常是指以费用为代表的负向指标的最小化或以利润指标为代表的正向指标的最大化。下面通过几个示例来反映线性规划数学模型。

**例 2-1** 某企业在某一计划期内规划生产甲、乙两种产品，生产需要消耗 $A$，$B$，$C$ 三种资源。生产每件甲、乙产品对 $A$，$B$，$C$ 三种资源的消耗量，企业对 $A$，$B$，$C$ 三种资源的拥有量，以及每件甲、乙产品所能为企业创造的利润如表 2-1 所示，试建立该问题的数学模型，以使计划期内的生产获利最大。

**表 2-1 企业生产数据表**

| 资源 | 单位产品资源消耗量（千克） | | 资源拥有量（千克） |
| --- | --- | --- | --- |
| | 甲 | 乙 | |
| $A$ | 1 | 2 | 8 |
| $B$ | 4 | 0 | 16 |
| $C$ | 0 | 4 | 12 |
| 单位产品利润（万元） | 2 | 3 | |

**解** 构建数学模型

第一，明确问题的决策变量。设 $x_1$ 和 $x_2$ 分别代表计划期内甲、乙两种产品的产量。

第二，构建问题的约束条件。此问题的约束条件为三种资源对生产的限制，即在确定甲、乙两种产品产量时，要考虑对三种资源的消耗不能超过其拥有量。

资源 $A$ 的拥有量是 8 千克，生产一件甲、乙产品需要资源 $A$ 分别为 1 千克和 2 千克，那么生产 $x_1$ 件甲产品和 $x_2$ 件乙产品消耗资源 $A$ 的总量即为（$x_1+2x_2$）千克，因此资源 $A$ 的约束可表达为 $x_1+2x_2\leqslant 8$。同理，资源 $B$ 和资源 $C$ 的约束可表达为 $4x_1\leqslant 16$ 和 $4x_2\leqslant 12$。

第三，构建问题的目标函数。该企业的目标是获得最大的利润，因此，此问题的目标函数可表示为 $\max Z=2x_1+3x_2$。

综合数学模型的三要素，该问题的数学模型可表示为式（2－1）的形式。

$$\max Z=2x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 8 & ① \\ 4x_1\leqslant 16 & ② \\ 4x_2\leqslant 12 & ③ \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{2-1}$$

**例 2－2** 某公司每小时至少有 400 个工件需要进行质量检验，应聘质量检验岗位的人员总数为 30 人，其中具有一级质检资格的有 10 人，二级资格的有 20 人。一级检验人员每小时可检验工件 25 个，检验的准确率为 98%，每小时的工资为 50 元；二级检验人员每小时可检验工件 15 个，检验的准确率为 95%，每小时的工资为 30 元。假设检验人员每出现一次错检会给公司造成 20 元的经济损失，试问公司应选拔多少名一级、二级检验人员从事质检工作，才能使花费在质量控制方面的成本最小。

**解** 构建数学模型

第一，明确问题的决策变量。设 $x_1$ 和 $x_2$ 分别代表应选拔的一级、二级检验人员数量。

第二，构建问题的约束条件。此问题的约束条件为一级、二级检验人员总数的限制和每小时需要检验工件总量的限制。一级、二级检验人员总数的限制可用 $x_1\leqslant 10$ 和 $x_2\leqslant 20$ 来加以表示，而每小时需要检验工件总量的限制可表示为 $25x_1+15x_2\geqslant 400$，约分简化处理可得 $5x_1+3x_2\geqslant 80$。

第三，构建问题的目标函数。该公司的目标是使质量控制方面的花费最小，而质量控制方面的费用包括检验人员的工资和错检所造成的损失两部分。一级检验人员每小时的工资为 50 元，每小时错检造成的损失为 10 元（$25\times(1-98\%)\times 20$），即公司每小时在每名一级检验人员身上所花费的质检成本为 60 元；二级检验人员每小时的工资为 30 元，每小时错检造成的损失为 15 元（$15\times(1-95\%)\times 20$），即公司每小时在

每名二级检验人员身上所花费的质检成本为 45 元。因此，问题的目标函数可表示为 $\min Z=60x_1+45x_2$。

综合数学模型的三要素，该问题的数学模型可表示为式（2－2）的形式。

$$\min Z=60x_1+45x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1 \leqslant 10\\ x_2\leqslant 20\\ 5x_1+3x_2\geqslant 80\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{2-2}$$

**例 2－3** 某餐厅 24 小时全天候营业，为简化问题将每天 24 小时等分为 6 个时间段，每段 4 小时。由于各时间段顾客数量不同，所以需要服务员数也就不同。经测算 2:00～6:00 需要 3 人，6:00～10:00 需要 9 人，10:00～14:00 需要 12 人，14:00～18:00 需要 5 人，18:00～22:00 需要 18 人，22:00～2:00 需要 4 人。设服务员在各时间段的开始时点上班并连续工作 8 小时，问该餐厅在满足服务需要的前提下至少应雇佣多少服务员。

**解** 构建数学模型

第一，明确问题的决策变量。设 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$ 和 $x_6$ 分别代表各时间段开始时点上班的服务员数量。

第二，构建问题的约束条件。此问题的约束条件为在各个时间段实际工作的人数不能少于需要的人数。首先分析 2:00～6:00 这一时间段，在此时间段里，工作的人数既有 22:00 上班的服务员 $x_6$ 人（他们要到 6:00 才能下班），还有 2:00 刚刚上班的服务员 $x_1$ 人（他们要到 10:00 才能下班），于是应有约束 $x_6+x_1\geqslant 3$。同理可得其他各时间段的约束，于是例 2－3 的约束条件为

$$x_6+x_1\geqslant 3;\quad x_1+x_2\geqslant 9$$
$$x_2+x_3\geqslant 12;\quad x_3+x_4\geqslant 5$$
$$x_4+x_5\geqslant 18;\quad x_5+x_6\geqslant 4$$

第三，构建问题的目标函数。雇佣的服务员总数就是在各个时点上班的人数的总和，于是目标函数应为 $\min Z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$。

综合数学模型的三要素，该问题的数学模型可表示为式（2－3）的形式。

$$\min Z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_6+x_1\geqslant 3,\ x_1+x_2\geqslant 9,\ x_2+x_3\geqslant 12\\ x_3+x_4\geqslant 5,\ x_4+x_5\geqslant 18,\ x_5+x_6\geqslant 4\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\geqslant 0\end{cases}\tag{2-3}$$

**例 2－4** 某企业生产需要 2.9 米、2.1 米和 1.5 米三种长度的圆钢各 100 根，而企业作为原材料采购的圆钢长度为 7.4 米。问应如何裁剪才能使所消耗的原材料最少。

**解** 构建数学模型

第一，分析各种可能的裁剪方案，见表2-2。此表的裁剪方案直接排除了一些明显可以由拟选方案替代的方案。如，由方案4（2:2:0）即可排除（2:1:0），由方案3（3:0:1）即可排除（2:0:1），由方案5（1:1:1）和方案8（0:2:1）即可排除（0:1:1），由方案6（1:0:2）即可排除（0:0:2）。

**表2-2　各种剪裁方案数据表**

| 裁剪方案 | 1.5米 | 2.1米 | 2.9米 | 余料 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0 | 0 | 1.4 |
| 2 | 3 | 1 | 0 | 0.8 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 0.0 |
| 4 | 2 | 2 | 0 | 0.2 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0.9 |
| 6 | 1 | 0 | 2 | 0.1 |
| 7 | 0 | 3 | 0 | 1.1 |
| 8 | 0 | 2 | 1 | 0.3 |

第二，明确问题的决策变量。设 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$，$x_6$，$x_7$ 和 $x_8$ 分别代表表2-2中各方案被使用的次数。

第三，构建问题的约束条件。此问题的约束条件为最终所得各种长度的备料均不能少于100根，即 $4x_1+3x_2+3x_3+2x_4+x_5+x_6\geqslant 100$，$x_2+2x_4+x_5+3x_7+2x_8\geqslant 100$ 和 $x_3+x_5+2x_6+x_8\geqslant 100$。

第四，构建问题的目标函数。所消耗的原材料总数最少，而所消耗的原材料总数就是各方案被使用次数之和，即 $\min Z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$。

综合数学模型的三要素，该问题的数学模型可表示为式（2-4）的形式。

$$\min Z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}4x_1+3x_2+3x_3+2x_4+x_5+x_6\geqslant 100\\ x_2+2x_4+x_5+3x_7+2x_8\geqslant 100\\ x_3+x_5+2x_6+x_8\geqslant 100\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\geqslant 0\end{cases}\tag{2-4}$$

上述四个示例，虽然表面上有的目标函数求极大值、有的求极小值，决策变量的个数和约束条件的个数，以及约束条件不等号方向也各不相同；但它们却具有三个共同特征：第一，决策变量是一组（$n$ 个）非负的连续变量；第二，约束条件可以用关于决策变量的一组（$m$ 个）线性等式或线性不等式来加以表示；第三，目标函数是关于决策变量的一个线性函数。

正是由于上述模型的约束条件和目标函数都是关于决策变量的线性函数，因此，