21世纪考研数学辅导通用系列教材

考研

线性代数复习大全

30年教学积淀 10载潜心编著

主 编：王福海

副主编：杜美华 石金玮

★紧扣大纲 直击考点

★层次渐进 基础过关

★重点强化 预测点睛

★精选习题 举一反三

中国石油大学出版社

CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

考研线性代数

复习大全

◎主　编　王福海

◎副主编　杜美华　石金玮

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研线性代数复习大全 / 王福海主编. --青岛：中国石油大学出版社，2019.7
ISBN 978-7-5636-6483-2

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 140972 号

书　　名：考研线性代数复习大全
KAOYAN XIANXING DAISHU FUXI DAQUAN
主　　编：王福海

责任编辑：张　杰(电话 0532—86981539)
封面设计：乐道视觉

出 版 者：中国石油大学出版社
(地址：山东省青岛市黄岛区长江西路 66 号　邮编：266580)
网　　址：http://www.uppbook.com.cn
电子邮箱：zj123bm123@163.com
排 版 者：青岛天舒常青文化传媒有限公司
印 刷 者：青岛国彩印刷股份有限公司
发 行 者：中国石油大学出版社(电话 0532—86983437)
开　　本：185 mm×260 mm
印　　张：10
字　　数：255 千
版 印 次：2019 年 7 月第 1 版　2019 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5636-6483-2
定　　价：45.00 元

前言

Preface

线性代数是工科院校非常重要的一门基础课，也是在研究生入学考试中起着重要作用的一门课。任何一位有所作为的工程技术人员，无一不具备扎实的线性代数基础。为帮助广大学生学好线性代数，给他们备考研究生提供一份实用的复习资料，作者根据多年讲授线性代数课程和考研辅导的教学经验，编写了这本《考研线性代数复习大全》。本书有如下几个特点：

(1) 严格按照考研大纲编写，突出重点、热点、常考点，适用于数学一、二、三各类考生。只要求某类考生掌握的内容、习题均有注明，例如章节内容或题号右上角标注①的仅数学一要求，无标注的各类考生均需掌握。

(2) 本书各章节的编排与线性代数课程的教材和教学顺序完全一致，因此对大学低年级学习线性代数的初学者也是一本极好的线性代数同步辅导用书；对复习考研的学生则能做到循序渐进、由浅入深、夯实基础、逐渐提高，将大学数学与考研数学之间建立起有效的联结。

(3) 本书着重归纳了各种常见题型，总结了快速、简洁、实用的解题方法。试题是无限的，而题型是有限的，只有掌握了各种快速、简洁的解题方法才能在一定的答题时间内取得更好的成绩。内容新、题型全、方法好是这本书最突出的特点，在归纳和总结上条理清楚，层次分明，容易牢记。

(4) 中国有句古话叫“知己知彼，百战不殆”。对于励志考研的众多学子而言，“知己”，就是知道自己对重点题型和解题方法掌握的情况，为此本书在每章最后都配备了大量的习题并给出了详细解答，用于检验大家理解和掌握的情况。

“知彼”，就是要弄清考什么、怎么考，这在这本书的题型归纳与解题方法中非常清楚地告诉给了大家。本书习题约200道，与200道左右的例题共同形成了一个完整的知识体系，覆盖了考研线性代数的所有题型。为了使读者增强分析问题、解决问题的能力，习题有一定的难度，但尽量避免出现偏题、怪题。数学水平的提高是一个不断积累的过程，不论你有多么远大的理想，都要脚踏实地地从点滴做起，上好每一堂课，做好每一道题。

本书在编写过程中得到了靳渤文同志的很多帮助和建议，在此表示衷心的感谢！

本书在编写过程中参阅了有关书籍，引用了一些例子和习题，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。

尽管作者有着多年从事线性代数和考研辅导的教学实践，但由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有不足和错误之处，恳请读者不吝指正。

王福海

2019年6月

目录

Contents

第一章
行列式

§1. 行列式的概念及性质

一、二三阶行列式

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

注:(1)行列式是一个数.
(2)行列式中的每项是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积.

三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$.

二、行列式的基本性质

性质 1 转置行列式与原行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

性质 2 行列式的两行(或列)互换,行列式改变符号.

性质 3 一个数乘以行列式等于用这个数乘该行列式中的某一行(或列).

性质 4 将行列式某行(或列)的 K 倍加到另一行(或列),其值不变.

性质 5 如果行列式的某一行(或列)的元素是两项之和,则该行列式等于两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

三、重要公式与结论

1. 行列式展开定理

(1) 代数余子式的定义：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，去掉 D 中 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列后形成的行列式 M_{ij} 叫作元素 a_{ij} 的余子式；$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫作元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 展开定理：行列式中任一行(或列)的元素与其代数余子式的乘积之和等于行列式的值；任一行(或列)的元素与另一行(或列)的元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{K1}+a_{i2}A_{K2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D, & i=k, \\ 0, & i\neq k \end{cases}$$

即按行展开定理；

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases} D, & j=k, \\ 0, & j\neq k \end{cases}$$

即按列展开定理.

2. 上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 次对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4. 分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} A_{n\times n} & B_{n\times m} \\ 0 & C_{m\times m} \end{vmatrix}=|A||C|,\quad \begin{vmatrix} 0 & A_{n\times n} \\ C_{m\times m} & B_{m\times n} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||C|.$$

5. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

§2. 行列式的计算方法

一、二三阶行列式的计算

二阶行列式直接用十字相乘法即可;

简单的三阶行列式可用十字相乘法,复杂的三阶行列式应先用行列式的性质化简.

例 1 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&1\\3&0&2\end{vmatrix}=$________.

解 由三阶行列式的十字相乘法可知 $D=-8$.

例 2 求方程 $\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=0$ 的根.

解 由行列式的性质及三阶行列式的十字相乘法可知:

$$\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\\lambda-1&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+5).$$

所以由 $(\lambda-1)^2(\lambda+5)=0$ 可得:$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5$.

二、利用行列式的性质化为三角形行列式

例 3 求行列式 $D=\begin{vmatrix}b&a&a&\cdots&a\\a&b&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&b\end{vmatrix}$.

解 将各行加到第一行,则

$$D=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&b&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&b\end{vmatrix}=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&b-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&b-a\end{vmatrix}$$

$$=[b+(n-1)a](b-a)^{n-1}.$$

例 4 求 $D=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}$.

解 将各列加到第一列提取公因式 $b+\sum_{i=1}^{n}a_i$，则

$$D=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & b & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}$$

$$=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}.$$

三、利用行列式展开法计算行列式

例 5 求 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解 先将各列减去第二列，再由行列式的展开定理可知：

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=(-1)\cdot 2\cdot(n-2)!=-2(n-2)!.$$

四、利用递推法计算行列式

例 6 (2015 年)行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2 & 0 & \cdots & 0 & 2\\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}=$ ________.

解 将 D_n 按第一行展开得：$D_n=2D_{n-1}+2(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$，
再由此递推公式得：

$$\begin{aligned}D_n&=2D_{n-1}+2=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2\\&=2^2(2D_{n-3}+2)+2^2+2=2^3D_{n-3}+2^3+2^2+2\\&=2^{n-2}D_2+2^{n-2}+\cdots+2^3+2^2+2,\end{aligned}$$

由于 $D_2=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2^2+2$，故

$$D_n=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^3+2^2+2=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2.$$

例 7 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 将 $2,3,\cdots,n$ 各列加到第一列，再按第一列展开得：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = D_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = D_{n-1} + 1,$$

因此 $D_n = D_{n-1}+1 = D_{n-2}+2 = \cdots = D_2+(n-2)$，而 $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$，故 $D_n = n+1$.

五、利用已知结论计算行列式

例 8 设 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$，求：(1) D_4 的值；(2) $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$.

解 (1) 由范德蒙行列式的结论可得：

$$D_4 = (5-4)(5-3)(5-2)(4-3)(4-2)(3-2) = 12.$$

(2) 因为 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$ 是第一行元素与第三行元素的代数余子式乘积之和，由行列式的展开定理可知：$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=0$.

例 9 求 $D = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

解 由分块行列式的结果可知：$D = (-1)^{2\times 3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -12.$

六、利用加边法计算行列式

例 10 设 $a_i \neq 0$，求 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

解 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

$$= D_n \xlongequal[\text{加到其他行}]{\text{第一行乘}(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{K=1}^{n}\frac{1}{a_K} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{a_K}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

例 11 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$.

解 因 $D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$，将行列式中第一行乘 $(-x_i)$ 加到第 $i+1$ 行得：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{K=1}^{n}x_K^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. = 1+\sum_{K=1}^{n}x_K^2.$$

例 12 求 $D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$ 的值.

解 令 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&x\\a^2&b^2&c^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&x^3\end{vmatrix}$，则 D_3 为 x^2 的余子式 M_{34}，而由范德蒙行列式及展开定理可知：

$D_4=(x-a)(x-b)(x-c)(c-b)(c-a)(b-a)=A_{14}+xA_{24}+x^2A_{34}+x^3A_{44}$，

由于 $M_{34}=-A_{34}$，故 D_3 为 D_4 中按第四列展开后 x^2 的系数的相反数，即

$$D_3=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a).$$

类似地可证：

$$D=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-2}&x_n^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

注: 这一结果在计算题中经常用到，应记住结论.

七、因子分析法

例 13 计算 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\end{vmatrix}$.

解 因为 $x=\pm 1$，$x=\pm 2$ 时，$D_4=0$，

所以 D_4 中有因子 $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$. 而由行列式概念可知：D_4 中关于 x 的最高次项为 x^4，因此令 $D_4=A(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$，取 $x=0$，则由 $\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9\end{vmatrix}=4A$ 得 $A=-3$，即

$$D_4=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

§ 3. 克拉默法则及应用

定理：

克拉默法则：如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 的系数行列式不等于零，

即 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组有唯一解：$x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$.

其中：D_j 是将 D 中第 j 列元素换成方程组右端常数项后得到的行列式.

推论：齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 方程组有无穷解 $\Leftrightarrow D=0$.

例 1 $\lambda\neq$ ________ 时，方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\lambda^2x_3=1, \\ x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-1)^2x_3=1, \\ x_1+(\lambda^2+\lambda-2)x_2+(\lambda^2+\lambda-2)^2x_3=1 \end{cases}$ 有唯一解，其解为________.

解 因为

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda-1 & (\lambda-1)^2 \\ 1 & \lambda^2+\lambda-2 & (\lambda^2+\lambda-2)^2 \end{vmatrix} \\ &=[(\lambda^2+\lambda-2)-(\lambda-1)](\lambda^2+\lambda-2-\lambda)(\lambda-1-\lambda) \\ &=-(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2-2), \end{aligned}$$

所以当 $\lambda\neq\pm1,\pm\sqrt{2}$ 时有唯一解，其解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{D}{D}=1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=0$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=0$.

例 2 $a=$ ________ 时，$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_2+2x_3=0, \\ -x_1+ax_2+(4-a)x_3=0 \end{cases}$ 有无穷解.

解 由 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & a & 4-a \end{vmatrix}=-3a+3=0$ 可知：当 $a=1$ 时，方程组有无穷解.

例 3 方程 $\begin{cases} x_1+ax_2+a^3x_3=0, \\ x_1+bx_2+b^3x_3=0, \\ x_1+cx_2+c^3x_3=0 \end{cases}$ 只有零解，写出 a,b,c 满足的条件.

解　因为当 $D=\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\1 & b & b^3\\1 & c & c^3\end{vmatrix}=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)\neq 0$ 时，方程有且只有零解，所以 a,b,c 应满足 $a+b+c\neq 0,a\neq b,a\neq c,b\neq c$.

第一章习题

一、填空题

1. $f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 0 & 2\\3 & x & 1 & 1\\2 & 1 & x & 0\\5 & 4 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________.

2. 已知 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a$，则 $\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1\\a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2\\a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}=$________.

3. $\begin{vmatrix}1 & 101 & 1\\-2 & 198 & 2\\3 & 203 & 3\end{vmatrix}=$________.

4. 已知 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -2 & 4 & -8\\1 & 0 & 4 & 15\\1 & x & x^2 & x^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -2 & 4 & -8\\0 & 3 & 5 & 12\\1 & x & x^2 & x^3\end{vmatrix}=0$，则 $x=$________.

5. 已知 $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x\\1 & -1 & x+2 & -1\\1 & x & 1 & -1\\x+2 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$，则 $x=$________.

6. 设 $D=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\b & a & c & d\\d & b & c & a\\b & d & c & a\end{vmatrix}$，则第一列元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=$________.

7. 设 $D=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\-a & a & -a & a\\2 & 3 & 4 & 5\\1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$，则 D 中第四行元素的余子式之和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$________.

8. 已知 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=$________.

9. 已知 $\begin{cases} x_1+x_2+Kx_3=1, \\ -x_1+Kx_2+x_3=-1, \\ x_1-x_2+2x_3=1 \end{cases}$ 有唯一解，则 K 满足________，其解为________.

二、解答题

1. 已知 a,b,c 为方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，求 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

2. 求方程 $\begin{vmatrix} x & b & c & d \\ b & x & c & d \\ b & c & x & d \\ b & c & d & x \end{vmatrix}=0$ 的根.

3. 求行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$ 的值.

4. 求 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

5. 已知 $x_i \neq a_i$，求 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

第一章习题参考答案

一、填空题

1. -3.

分析：将第一行减去第二行得：$f(x)=\begin{vmatrix} x-3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 5 & 4 & 2 & x \end{vmatrix}$，由行列式定义可知：一个行