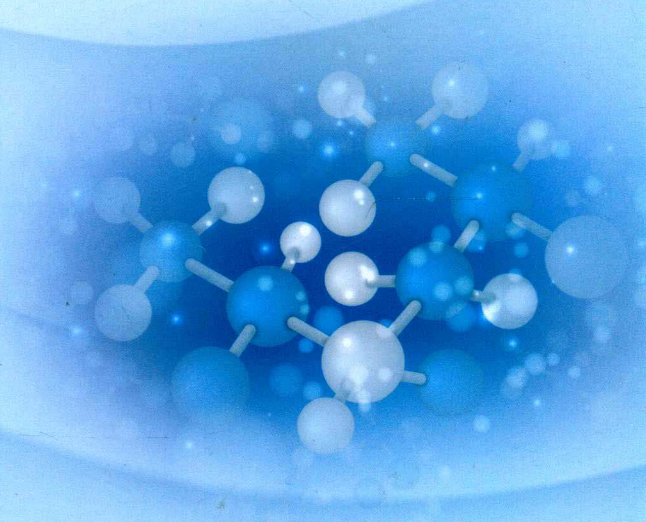
普通高等教育“十三五”重点规划教材
全国高等医药院校规划教材

Medical Physics Learning Guidance

医学物理学学习指导

万永刚　张楠　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十三五"重点规划教材
全国高等医药院校规划教材

医学物理学学习指导

主　编　万永刚　张　楠
副主编　张立平　王　洁
参　编　王晓东　耿　魁　段文博

机械工业出版社

《医学物理学学习指导》是根据医学物理学课程的基本要求，结合医学学生教学培养的特点，并针对医学学生学习医学物理学课程中存在的问题和遇到的困难，总结多年来的教学实践经验和成果编写的。

全书包括医用力学基础、流体的运动、液体的表面现象、振动与波动、静电场、电路、稳恒磁场与电磁感应、波动光学、几何光学、X射线、原子核物理与核磁共振成像等十一章。各章均包括本章知识要点、解题指导、课后训练及习题答案四个部分。

本书可作为高等医学院校各专业的参考书，适合不同层次的教学要求。

图书在版编目（CIP）数据

医学物理学学习指导 / 万永刚，张楠主编. —北京：机械工业出版社，2019.5

全国高等医药院校规划教材. 普通高等教育"十三五"重点规划教材

ISBN 978-7-111-62036-5

Ⅰ.①医… Ⅱ.①万…②张… Ⅲ.①医用物理学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①R312

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 030085 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：张金奎 责任编辑：张金奎 任正一
责任校对：樊钟英 封面设计：张 静
责任印制：孙 炜
北京中兴印刷有限公司印刷
2019 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm・12.25 印张・238 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-62036-5
定价：29.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-68326294	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

前言

医学物理学是全国高等医药院校中一门重要的基础理论课程。为了更好地贯彻少而精的原则，让学生在较少的时间内掌握较多的现代医学所需的物理知识，提高学生的自学能力和分析问题、解决问题的能力，我们根据医学物理学课程的基本要求和高等医药院校的实际，编写了这本学习指导。

本书分章编写，每章均由以下部分组成：本章知识要点、解题指导、课后训练及习题答案四个部分。

“本章知识要点”部分引导学生复习本章的基本内容，并对重点知识进行总结；“解题指导”部分则通过典型例题分析和计算，总结解题的方法，讨论解题技巧，但解题步骤未做统一要求，以便学生根据自己的实际选用；“课后训练”部分强化学生对知识的理解，为学生提供的部分习题只给出答案，未给出解算过程，供学生自我评估使用。

参加本书编写的有：万永刚（第一章、第四章、第八章），张楠（第三章、第五章），张立平（第九章、第十章），王洁（第二章），王晓东（第七章），耿魁（第十一章），段文博（第六章）。

在本书的编写过程中，参考了大量医学物理学教学工作者编著的教材和学习指导，在此向他们一并表示衷心的感谢！本书适合医学院校五年制本科临床医学、口腔、预防、药学、检验、影像、麻醉等专业使用。

本书的编写得到了齐齐哈尔医学院与齐齐哈尔市第六中学领导的关心和大力支持，同时得到了机械工业出版社的支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免有不当之处，恳请读者和同仁不吝指正。

编　者

2018 年 11 月

目　录

第一章 医用力学基础

一、本章知识要点

（一）刚体的定轴转动

1. 刚体（rigid body）：在任何力的作用下形状和大小都不发生改变的物体称为刚体。若物体在力的作用下形状和大小的改变可以忽略，就可以将其视为刚体。

2. 定轴转动（fixed-axis rotation）：转动物体各质量微元运动轨道的圆心都在一条固定不动的直线上，这条直线叫转轴，这样的运动叫定轴转动。转动是刚体的基本运动形式之一，刚体的一般运动都可分解为平动和转动。

3. 角位移（angular displacement）：刚体绕定轴转动时，刚体上某一垂直于转轴并与转轴相交的直线，在 Δt 时间内转过的角度 $\Delta\theta$ 称为角位移。

4. 角速度（angular velocity）：角速度是描述刚体转动快慢的物理量。刚体在单位时间内的角位移称为角速度，用 ω 表示。

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-1}$$

5. 角加速度（angular acceleration）：单位时间内的角速度的改变量称为角加速度。

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-2}$$

角位移、角速度、角加速度都是矢量，其方向用右手螺旋法则判定。

6. 角量：以角度为基础来衡量转动情况的物理量（如角位移、角速度、角加速度）统称为角量。

7. 线量：以线度为基础来衡量运动情况的物理量（如位移、速度、加速度）统称为线量。

8. 离转轴的距离为 r 的质点的角量与线量的关系为

位移： $\mathrm{d}s=r\mathrm{d}\theta$ （1-3）

速度： $v=r\omega$ （1-4）

加速度： $a_{\mathrm{t}}=r\alpha, a_{\mathrm{n}}=r\omega^2$ （1-5）

9. 刚体做匀变速转动时各个角量之间的关系（$t=0$，$\omega=\omega_0$，$\theta=\theta_0$）：

1）角加速度：$\alpha=\text{constant}$

2）角速度：
$$\omega=\omega_0+\alpha t \tag{1-6}$$

3）角位移：
$$\Delta\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{1-7}$$

4）角位置：
$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{1-8}$$

10. 转动惯量（moment of inertia）：转动物体的动能，其值等于组成物体的各个质点的动能的总和，即

$$E_k=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \tag{1-9}$$

式中，J 称为转动惯量。

11. 转动惯量的计算：转动惯量是刚体转动惯性的量度，如果刚体的质量是连续分布的，则刚体的转动惯量为

$$J=\int r^2\,\mathrm{d}m=\int r^2\rho\,\mathrm{d}V \tag{1-10}$$

决定转动惯量大小的因素：①质量的大小；②质量分布情况（即刚体的形状大小和各部分的密度）；③转轴的位置。

12. 转动定律（law of rotation）：转动物体的角加速度 α 与作用的力矩 M 成正比，与物体的转动惯量 J 成反比，即

$$M=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\alpha \tag{1-11}$$

13. 质点的角动量（angular momentum）：设质点绕定点 O 旋动，某瞬时的动量 $m\boldsymbol{v}$ 对于点 O 的动量矩，定义为质点对于点 O 的角动量，用 $\boldsymbol{L}$ 表示，即

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} \tag{1-12}$$

14. 质点系的角动量：质点系对某点 O 的角动量，等于各质点对同一点 O 的角动量的矢量和，即

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m\boldsymbol{v}_i \tag{1-13}$$

15. 绕定轴转动刚体对定轴的角动量：

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m\boldsymbol{v}_i=\left(\sum_{i=1}^{n}mr_i^2\right)\boldsymbol{\omega}=J\boldsymbol{\omega} \tag{1-14}$$

16. 角动量守恒定律（law of conservation of angular momentum）：封闭系统中的内力矩不改变系统的总角动量（或刚体所受的合外力矩等于零时，其角动量保持不变），即：$\sum\boldsymbol{L}_i=$ 恒矢量。

17. 旋进：高速旋转的物体自转轴以角速度 Ω 绕竖直轴转动的现象叫进动（precession），也称为旋进。在重力场中陀螺旋进的角速度为

$$\Omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{mgl}{L}=\frac{mgl}{J\omega} \tag{1-15}$$

式中，J 是陀螺的转动惯量。进动角速度 Ω 与 θ 无关，而与自旋角动量 L 成反比。

（二）物体的弹性

1. 形变（deformation）：物体在外力作用下所发生的形状和大小的改变称为形变。形变的种类包括长度改变、体积改变和形状改变。

2. 弹性形变（elastic deformation）：在一定形变限度内，去掉外力后物体能够完全恢复原状，这种形变称为弹性形变。

3. 范（塑）性形变（plastic deformation）：外力超过某一限度后，去掉外力后物体不再能完全恢复原状，这种形变称为范（塑）性形变。

4. 应变（strain）：物体受外力作用时，其长度、形状或体积发生的相对变化称为应变。

5. 正应变（positive strain）：物体受到外力作用时，发生的长度变化 Δl 和物体原来长度 l_0 的比值称为正应变，用 ε 表示。

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l_0} \tag{1-16}$$

6. 体应变（volume strain）：物体受到压力作用时体积发生变化而形状不变，则体积变化 ΔV 与原体积 V_0 之比称为体应变，用 θ 表示。

$$\theta=\frac{\Delta V}{V_0} \tag{1-17}$$

7. 切应变（shearing strain）：物体受剪切力作用，只发生形状变化而没有体积变化，若设两底面相对偏移距离为 Δx，垂直距离为 d，则剪切的程度以比值 $\Delta x/d$ 来衡量，这一比值称为切应变，用 γ 表示。

$$\gamma=\frac{\Delta x}{d}=\tan\varphi \tag{1-18}$$

说明：①液体无形状变化的弹性，只有体积变化的弹性。但固体两种弹性都有，这是区别液体和固体的标准之一；②应变是量纲为一（无单位）的物理量。它们只是相对地表示形变的程度，而与原来的长度、体积、形状无关。

8. 应变率（strain rate）：应变随时间的变化率，即单位时间内增加或减少的应变称为应变率，它描述的是变形速率。其单位为 s^{-1}。

9. 应力（stress）：应力是指作用在物体内单位截面上的弹性力（内力），它反映物体发生形变时的内力情况。应力的种类：张应力、体应力、切应力。

10. 张应力（tensile stress）：在拉伸应变的情况下，物体内部的任一横截面上单位面积上的力称为张应力，用 σ 表示。

$$\sigma=\frac{F}{S} \tag{1-19}$$

某一点的张应力为

$$\sigma=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta S}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} \tag{1-20}$$

如果物体两端受到的不是拉力而是压力，物体的长度缩短，张应力此时为负值，也可称为压应力（compressive stress）。

11. 体应力（volume stress）：当物体受到来自各个方向的均匀压力，且物体是各向同性时，可发生体积变化。此时物体内部各个方向的截面上都有同样大小的压应力，或者说具有同样的压强。因此体应力可以用压强 p 表示。

12. 切应力（shearing stress）：当发生切应变时，物体上下两个界面受到与界面平行但方向相反的剪切力的作用。剪切力 F 与截面 S 之比，称为切应力，用 τ 表示。

$$\tau=\frac{F}{S} \tag{1-21}$$

某一点的切应力为

$$\tau=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta S}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} \tag{1-22}$$

说明：①与截面正交的应力叫正应力，如张应力、压应力。②与截面平行的应力称为切应力。③如果应力的方向和截面成某一角度，则称其为全应力；全应力可分解为正应力和切应力。

13. 弹性（elastic）：在一定形变限度内，去掉外力后物体能够完全恢复变形的特性称为弹性。

14. 塑性（plasticity）：外力除去后变形不能恢复的特性称为塑性。

15. 应力-应变关系曲线：应力与应变之间的函数曲线，称为应力-应变关系曲线。

16. 比例极限（proportional limit）：在应力-应变关系曲线上，当应力达到该点之前应力与应变成正比，超过该点之后，应力与应变将不成正比，这一点称为比例极限。

17. 弹性极限（elastic limit）：当应变达到一定值时除去外力后，材料刚好能恢复原状，这一点称为弹性极限。

18. 断裂点（fracture point）：当应力达到某点时，材料断裂，这一点称为断裂点。断裂点的应力称为材料的抗拉强度（tensile strength）。压缩时，断裂点的应力称为抗压强度（compressive strength）。

19. 弹性模量（modulus of elasticity）：应力与应变之比值称为该物体的弹性模量。

20. 杨氏模量（ Young's modulus）：材料在受到拉应力或压应力作用时，

在比例极限范围内，应力与应变之比称为杨氏模量，用 E 表示。

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{F/S}{\Delta l/l_0}=\frac{l_0 F}{S\Delta l} \tag{1-23}$$

21. 体积模量（bulk modulus）：在体积形变中，压强与体应变的比值称为体积模量，以符号 K 表示。

$$K=\frac{-p}{\theta}=-\frac{p}{\Delta V/V_0}=-V_0\frac{p}{\Delta V} \tag{1-24}$$

式中，负号表示体积缩小时压强是增加的。体积模量的倒数，称为压缩率（compressibility），记为 k。

$$k=\frac{1}{K}=-\frac{\Delta V}{pV_0} \tag{1-25}$$

22. 切变模量（shear modulus）：在剪切情况下，在一定弹性范围内，切应力与切应变成正比。切应力与切应变之比值称为切变模量，用 G 表示。

$$G=\frac{\tau}{\gamma}=\frac{F/S}{\varphi}=\frac{Fd}{S\Delta x} \tag{1-26}$$

弹性模量表示物体变形的难易程度，弹性模量越大，物体越不容易变形。当物体受力较小时，应力与应变成正比，比例系数——弹性模量为常量；当物体受力较大时，应力与应变表现为非线性关系，弹性模量与变形有关（不为常量），而这样的物体称为非线性弹性体。

（三）骨骼和肌肉的力学性质

1. 骨骼的力学性质：骨骼是典型的非线性弹性体。与一般的金属材料不同，骨骼具有各向异性的力学性质，即在不同方向载荷作用下表现出不同的力学性能。骨骼的变形、破坏与其受力方式有关。人体的骨骼受不同方式的力或力矩作用时会有不同的力学变化。根据外力和外力矩的方向，将骨骼的受力分为拉伸、压缩、剪切、弯曲、扭转。作用于人体骨骼上的载荷往往是上述几种载荷的复合作用。

2. 肌肉的力学特性：与一般材料特性不同，肌肉收缩时产生的内部拉力（一般称张力）变化主要依赖于肌节内结构的变化，在肌节处于休息长度时（2μm 左右）张力最大，但当肌节长度达到 3.6μm 后，主动张力却变为零。肌纤维具有主动收缩性，整块肌肉伸缩时的张力应为主动张力与被动张力之和。肌肉生理横截面的增加会导致肌肉收缩力的增加，但不会影响肌肉收缩速度。

二、解题指导——典型例题

【例 1-1】 一汽车沿 x 轴运动，其速度为 $v=10+4t^2(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$，当 $t=0$ 时，汽车在原点右 20m 处；求：(1) $t=4\mathrm{s}$ 时汽车的加速度；(2) 在上述时刻汽车的位置。

已知：$v=10+4t^2(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$，当 $t=0$ 时，$x=20\mathrm{m}$；**求**：(1) $t=4\mathrm{s}$ 时，$a=?$ (2) $t=4\mathrm{s}$ 时，$x=?$

解：(1) 加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(10+4t^2)}{\mathrm{d}t}=8t(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时 $a=(8\times4)\mathrm{m\cdot s^{-2}}=32\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

(2) 因为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，所以

$$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=(10+4t^2)\mathrm{d}t$$

积分可得 $x=\int(10+4t^2)\mathrm{d}t=10t+\dfrac{4}{3}t^3+C$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时，$x=20\mathrm{m}$，代入上式得：$C=20$。所以

$$x=10t+\frac{4}{3}t^3+20$$

因此当 $t=4\mathrm{s}$ 时，$x=145.3\mathrm{m}$。

答：$t=4\mathrm{s}$ 时汽车的加速度为 $32\mathrm{m\cdot s^{-2}}$；此时刻汽车距原点 145.3m。

【例 1-2】 质点沿 x 轴运动，加速度和速度的关系是：$a=-kv$，式中 k 为常量；$t=0$ 时，$x=x_0$，$v=v_0$；求质点的运动方程。

已知：$a=-kv$，当 $t=0$ 时，$x=x_0$，$v=v_0$；**求**：运动方程 $x=?$

解：由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，分离变量积分有

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t-k\mathrm{d}t$$

积分得 $v=v_0\mathrm{e}^{-kt}$

又由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，有 $\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$

完成积分即得运动方程 $x=x_0+\dfrac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})$

答：质点的运动方程为 $x=x_0+\dfrac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})$。

【例 1-3】 如图 1-1 所示，物体 1 和物体 2 的质量分别为 m_1 与 m_2，滑轮的转动惯量为 J，半径为 r。

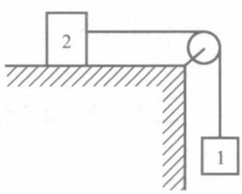


图 1-1

(1) 如物体 2 与桌面间的摩擦因数为 μ，求系统的加速度 a 及绳中的张力 F_{T1} 和 F_{T2}（设绳子与滑轮间无相对滑动，滑轮与转轴无摩擦）；

(2) 如物体 2 与桌面间为光滑接触，求系统的加速度 a 及绳中的张力 F_{T1} 和 F_{T2}。

已知：m_1，m_2，J，r；**求**：（1）物体 2 与桌面间的摩擦因数为 μ 时，$a=?$ $F_{T1}=?$ $F_{T2}=?$（2）当 $\mu=0$ 时，$a=?$ $F_{T1}=?$ $F_{T2}=?$

解：（1）用隔离法，分别画出三个物体的受力图，如图 1-2-a、b、c 所示。对物体 1，在竖直方向应用牛顿运动定律：

$$F_{T1}-mg=m_1(-a)$$

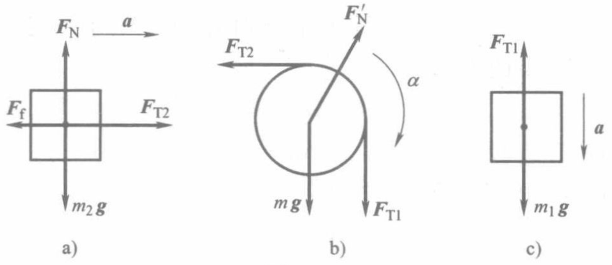


图 1-2

对物体 2，在水平方向和竖直方向分别应用牛顿运动定律：

$$F_{T2}-\mu F_N=m_2 a$$

$$F_N-m_2 g=0$$

对滑轮，应用转动定律：　　$F_{T2}r-F_{T1}r=J(-\alpha)$

并利用关系：$a=r\alpha$，由以上各式，解得

$$a=\frac{m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}g$$

$$F_{T1}=\frac{m_2+\mu m_2+\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}m_1 g$$

$$F_{T2}=\frac{m_1+\mu m_1+\mu\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}m_2 g$$

（2）$\mu=0$ 时：　$$a=\frac{m_1}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}g=\frac{m_1 r^2 g}{m_1 r^2+m_2 r^2+J}$$

$$F_{T1}=\frac{m_2+\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}m_1 g=\frac{(m_2 r^2+J)m_1 g}{m_1 r^2+m_2 r^2+J}$$

$$F_{T2}=\frac{m_1}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}m_2 g=\frac{m_1 m_2 r^2 g}{m_1 r^2+m_2 r^2+J}$$

答：略。

【例 1-4】 电风扇开启电源时，经 t_1 时间达到额定转速 ω_0，关闭电源后经时间 t_2 停止。设电风扇的转动惯量为 J，且电动机的电磁力矩与摩擦力矩为恒量。求电动机的电磁力矩。

已知： t_1，ω_0，t_2，J；**求：** $M=?$

解： 设电动机的电磁力矩、摩擦力矩分别为 M、M_f 且恒定，电风扇开启时受电磁力矩与摩擦力矩的作用，即

$$M-M_f=J\alpha_1$$

当电风扇达到额定转速时 $$\omega_0=\alpha_1 t_1$$

电风扇关闭过程中，只受到摩擦力矩的作用，即

$$-M_f=J\alpha_2$$

停止时 $$\omega_0+\alpha_2 t_2=0$$

解此联立方程组得 $$M=J\omega_0\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$$

答： 电动机的电磁力矩为 $J\omega_0\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$。

【例 1-5】 一质量为 m、半径为 R 的均匀质量圆盘绕通过盘心且垂直于盘面的光滑轴以 ω_0 的角速度转动。现将盘置于粗糙的水平桌面上，圆盘与桌面间的摩擦因数为 μ。求圆盘经过多少时间、转几圈后停下来？

已知： m，R，ω_0，μ；**求：** $t=?$ $N=?$

解： 摩擦力是分布在整个盘面上的，如图 1-3 所示，计算摩擦力的力矩时，应将圆盘分为无限多个半径为 r、宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环积分。故摩擦力矩为

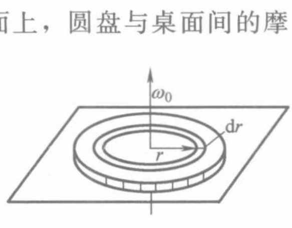


图 1-3

$$M=\int_0^R -\mu g r\,\frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\mu m g R$$

设 ω_0 的方向为正方向，由 $J=\frac{1}{2}mR^2$ 得

$$\alpha=\frac{M}{J}=-\frac{4\mu g}{3R}$$

由 $\omega=\omega_0+\alpha t=0$ 得

$$t=-\frac{\omega_0}{\alpha}=\frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

又由 $\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\Delta\theta$，停下来时 $\omega=0$，所以停下来前转过的圈数为

$$N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=-\frac{\omega_0^2}{4\pi\alpha}=\frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$$

答： 圆盘经$\dfrac{3R\omega_0}{4\mu g}$(s)、转$\dfrac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$圈后停下来。

【例 1-6】 如图 1-4 所示，线密度为 ρ，质量为 m 的均匀细杆与转轴（y 轴）的夹角为 α，求其转动惯量。

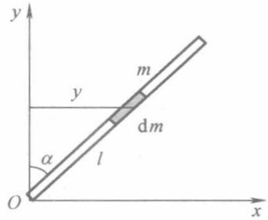


图　1-4

已知： ρ，m，α；**求：** $J=?$

解： 在杆上 l 处任取微元 $\mathrm{d}m$，显然，$\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}l$。

而细杆的总长度：$l_0=\dfrac{m}{\rho}$，于是由 $J=\int_V r^2\mathrm{d}m$ 得

$$J=\int_V r^2\mathrm{d}m=\int_0^{l_0}(l\sin\alpha)^2\rho\mathrm{d}l=\frac{1}{3}\rho l_0^3\sin^2\alpha=\frac{1}{3}ml_0^2\sin^2\alpha$$

答： 其转动惯量为$\dfrac{1}{3}ml_0^2\sin^2\alpha$。

【例 1-7】 如图 1-5 所示，质量为 M、长为 l 的均匀直棒，可绕垂直于棒的一端的水平轴 O 无摩擦地转动。它原来静止在平衡位置上，现有一质量为 m 的弹性小球飞来，正好在棒的下端与棒垂直地相撞。相撞后，使棒从平衡位置处摆动到最大角度 $\theta=30°$处。(1) 设碰撞为弹性碰撞，试计算小球初速 v_0 的值。(2) 相撞时，小球受到多大的冲量？

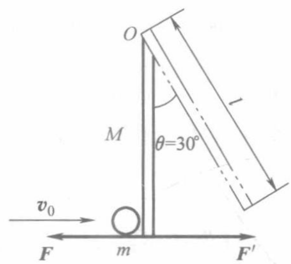


图　1-5

已知： M，l，m，$\theta=30°$；**求：** $v_0=?$ $I=?$

解： 设碰后小球速度为 v，棒转速为 ω，因为弹性碰撞，所以

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2 \tag{1}$$

又因为系统合外力矩为 0，所以角动量守恒，有

$$mv_0l=mvl+J\omega \tag{2}$$

碰撞后机械能守恒，所以　$$\frac{1}{2}J\omega^2=Mg(1-\cos 30°) \tag{3}$$

又　$$J=\frac{1}{3}Ml^2 \tag{4}$$

由式 (3)、式 (4) 得　$$\omega=\sqrt{\frac{3g\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{l}}$$

代入式 (1)、式 (2) 得　$$v_0=\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{12}\frac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$$

方法一：$$v=v_0-\frac{J\omega}{ml}=\frac{6m-2M}{12m}\sqrt{3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}$$

故 $$I=\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=mv-mv_0=-M\frac{\sqrt{3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}}{3}$$

方法二：利用牛顿第三定律

$$\int_{t_1}^{t_2}M\mathrm{d}t=J\omega\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}F'l\,\mathrm{d}t=l\int_{t_1}^{t_2}F'\mathrm{d}t=J\omega\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}F'\mathrm{d}t=\frac{J\omega}{l}$$

因为 $F=-F'$，所以

$$I=\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}F'\mathrm{d}t=-\frac{J\omega}{l}=-M\frac{\sqrt{3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}}{3}$$

答：小球初速 v_0 的值为 $\frac{\sqrt{6\ (2-\sqrt{3})}}{12}\frac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$；相撞时，小球受到的冲量大小为 $M\frac{\sqrt{3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}}{3}$。

【例 1-8】 已知铅的密度为 $11.3\times10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，其极限强度为 $2\times10^7\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$，问应悬多长一根铅丝，其本身的重量就足以使它拉断？

已知：$\rho=11.3\times10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，$\sigma=2\times10^7\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$；**求**：$L=?$

解：设铅丝的长度为 L，横截面面积为 S，则铅丝所受的最大拉力等于该段铅丝的重力，即

$$F=mg=LS\rho g$$

因为 $$\sigma=\frac{F}{S}=\frac{LS\rho g}{S}=L\rho g$$

所以 $$L=\frac{\sigma}{\rho g}=180\text{m}$$

答：所悬铅丝的长度为 180m 时其本身的重量就足以将它拉断。

【例 1-9】 如图 1-6 所示，用夹剪剪断直径为 3mm 的铅丝。若铅丝的剪切极限应力为 $100\times10^6\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$，试问需要多大的力 F？若销钉的直径为 8mm，试求销钉内的切应力。

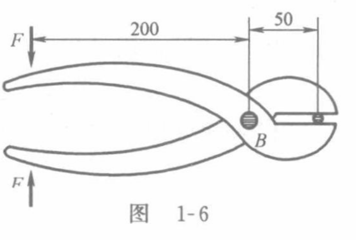


图 1-6

已知：$d_{铅丝}=3\times10^{-3}\text{ m}$，$d_{销钉}=8\times10^{-3}\text{ m}$，

$\tau_{极限}=100\times10^6\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$；**求**：$F=?$ $\tau_{销钉}=?$

解：(1) 铅丝和销钉的横截面面积各为

$$S_{铅丝}=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{1}{4}\times3.14\times(3\times10^{-3})^2\mathrm{m}^2=7.1\times10^{-6}\mathrm{m}^2$$

$$S_{销钉}=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{1}{4}\times3.14\times(8\times10^{-3})^2\mathrm{m}^2=50.2\times10^{-6}\mathrm{m}^2$$

剪断铅丝的剪切力为

$$F_{铅丝}\geqslant\tau_{极限}S=(100\times10^6\times7.1\times10^{-6})\mathrm{N}=710\mathrm{N}$$

剪断铅丝需要的力：

$$F\times200=F_{铅丝}\times50,\ F=\frac{50}{200}\times710\mathrm{N}=177.5\mathrm{N}$$

(2) 销钉所受的剪切力为　$F_{销钉}=F+F_{铅丝}=(177.5+710)\mathrm{N}=887.5\mathrm{N}$

销钉内的切应力为　$\tau_{销钉}=\dfrac{F_{销钉}}{S_{销钉}}=\dfrac{887.5}{50.2\times10^{-6}}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}=1.77\times10^7\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$

答：至少需要 177.5N 的力，销钉内的切应力为 $1.77\times10^7\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$。

【例 1-10】 质量为 20kg 的重物系于原长为 0.5m、半径为 0.08m 的钢丝一端，使重物在竖直平面内做圆周运动，当重物转到圆周最低点时角速度为 2 rad · s^{-1}；求：重物经最低点时钢丝的伸长量（钢丝的杨氏模量为 $2\times10^{11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$）。

已知：$m=20\mathrm{kg}$，$l_0=0.5\mathrm{m}$，$r=0.08\mathrm{m}$，$\omega=2\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，$E=2\times10^{11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$；**求**：$\Delta l=?$

解：因为：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}=\dfrac{F/S}{\varepsilon}$，所以：$\varepsilon=\dfrac{F}{E\cdot S}$。

重物在最低点时对钢丝的拉力为

$$F=mg+m\omega^2l_0=m(g+\omega^2l_0)\quad 即\quad \varepsilon=\frac{m(g+\omega^2l_0)}{E\cdot S}$$

所以　$\Delta l=\varepsilon l_0=\dfrac{ml_0(g+\omega^2l_0)}{E\cdot S}=\dfrac{ml_0(g+\omega^2l_0)}{E\cdot\pi r^2}=2.94\times10^{-4}\mathrm{m}$

答：即重物经最低点时钢丝的伸长量为 $2.94\times10^{-4}\mathrm{m}$。

【例 1-11】 如图 1-7 所示，试求自由悬挂的直杆由自重引起的应力和变形。设杆长 l、截面面积 S、密度 ρ 及杨氏模量 E 均已知。

解：在杆上 x 处取一横截面，此截面的内力为

$$F_x=\rho Sx$$

该截面的应力为

$$\sigma_x=\frac{F_x}{S}=\rho x$$

由上式可知 $\sigma_{max}=\rho l$，故悬挂端的内力最大。

先计算 dx 微元段的伸长量 $\Delta(dx)$：

$$\Delta(dx)=\frac{Fl}{ES}=\frac{F(x)dx}{ES}$$

积分可得整个杆件的总伸长

$$\Delta l=\int_0^l\frac{F(x)dx}{ES}=\int_0^l\frac{\rho Sx}{ES}dx=\frac{\rho}{E}\int_0^l x dx=\frac{\rho l^2}{2E}$$

或

$$\Delta l=\frac{(\rho lS)l}{2SE}=\frac{Gl}{2SE}$$

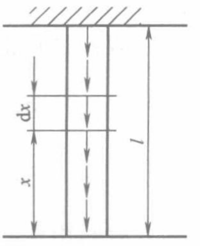


图 1-7

式中，G 为整个杆的重量。

答： 直杆由自重引起的应力和变形分别为 ρl 和 $\frac{Gl}{2SE}$。

【例 1-12】 弹跳蛋白是一种存在于跳蚤的弹跳机构中和昆虫的飞翔机构中的弹性蛋白，其杨氏模量接近于橡皮。今有一截面面积为 $30cm^2$ 的弹跳蛋白，在 270N 力的拉伸下，长度变为原长的 1.5 倍，求其杨氏模量。

解： 假设这条弹跳蛋白的长度为 l_0，由题意给出的条件，拉长后的长度为

$$l_0+\Delta l=1.5l_0$$

故得正应变

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l_0}=0.5$$

再根据张应力的定义

$$\sigma=\frac{F}{S}$$

得这条弹跳蛋白的张应力

$$\sigma=\frac{F}{S}=\frac{270}{0.003}N\cdot m^2=9\times10^4N\cdot m^{-2}$$

所以，其杨氏模量为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{9\times10^4}{0.5}N\cdot m^2=1.8\times10^5N\cdot m^{-2}$$

答： 其杨氏模量为 $1.8\times10^5N\cdot m^{-2}$。

三、课后训练

（一）填空题

1. 应用牛顿运动定律研究物体的机械运动时，所选用的参考系必须是________。

2. 某质点的运动方程 $x=3t-5t^3+6$(SI)，则该质点做________直线运动，加速度沿 x 轴________方向。

3. 一运动质点的速率 v 与路程 s 的关系为 $v=1+s^2$，则其切向加速度以路程 s 来表示的表达式为 $a_\tau=$________。