杨浦区数学高地

杨浦区王国江数学名师工作室

基于核心素养背景下“创智课堂”教学实践研究

2018版

主　编　李秋明

副主编　王国江

高中数学

课堂有效教学方略

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

杨浦区数学高地
杨浦区王国江数学名师工作室
基于核心素养背景下"创智课堂"教学实践研究

高中数学
课堂有效教学方略

主　编
李秋明

副主编
王国江

编　委
浦静滢　方耀华　杨逸峰　张　谊　袁　青
张倬霖　张菁璐　徐正旺　王桂华　吴　颖　庞维成
（排名不分先后）

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书总结各层面高中学校的正高级教师、数学特级教师、学科带头人、骨干教师和一线优秀教师多年一线教学的经验，在“创智课堂”理念的引领下和关注数学核心素养的基础上，将新高考的基本要求做进一步深入研究，并梳理考点和精选习题，形成了一套高效的高中数学学科教学训练体系. 主要结构分为知识梳理、讲练平台、基础训练、能力提高和归纳小结五个部分. 本书为高中一线教师拓宽了教学视野，也为提高广大高中学生的学习效率提供了有力的支撑.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学课堂有效教学方略/李秋明主编. —上海：同济大学出版社，2018. 8

ISBN 978 - 7 - 5608 - 8013 - 6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①中学数学课—课堂教学—教学法—高中 Ⅳ. ①G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 156459 号

高中数学课堂有效教学方略

主　编　李秋明　副主编　王国江

策划编辑　谢惠云　**责任编辑**　谢惠云　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　陈益平

出版发行　同济大学出版社　www. tongjipress. com. cn
（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021 - 65985622）
经　销　全国各地新华书店
排　版　南京新翰博图文制作有限公司
印　刷　浙江广育爱多印务有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　16. 75
印　数　1—3 500
字　数　418 000
版　次　2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
书　号　ISBN 978 - 7 - 5608 - 8013 - 6

定　价　52. 00 元

前言

为了帮助高中数学教师明确高中数学学科教学的目标、理清教学内容的重点、提高学科复习的效率，杨浦区数学高地高中数学学科的各位成员，在深入研究新高考改革的要求、总结一线教学经验的前提下，将新课程标准的目标、内容、要求与教材内容、要求以及高考考纲文理不分的要求相结合，精心编撰了本书，献给广大师生.

基于上述想法，我们对本书的内容作了精心的设计.

本书供读者在高中数学全面复习时使用，为了便于读者阅读，本书根据高中数学各个章节教学内容的内在联系和知识点生成顺序，做了适当的调整，增加了矩阵行列式初步、简单的线性规划、参数方程、空间向量及其应用、投影与画图和统计初步等内容. 设有集合，不等式，函数，数列、极限、数学归纳法，三角，向量，直线，曲线和方程，立体几何，排列、组合、二项式定理、概率统计，复数等章节，各章中增加了2017年及2018年上海春、高考的考题.

每个章节均设有以下栏目：

“知识梳理”：回顾本章节的知识结构、重点、难点以及一些常用的规律，并对易错的内容逐条分析，使读者对学习过程中必须关注的问题有全面的回顾和整理.

“讲练平台”：对本章节知识内容中常见的考点进行整理和分析，并配套相应的例题进行说明，注重知识与实际运用之间的关联，使读者可以更好地掌握所学的知识及其运用技巧.

“基础训练”：针对本章节的知识内容，提供了精选的基础题和中档题练习，难度适中.

“能力提高”：围绕本章节的知识内容，提供了训练思维、锻炼综合能力的练习，难度相对较高.

“归纳小结”：对本章节知识作一回顾，针对重点、难点、易错点再度进行强调.

每个章节末均附有本章“基础训练”和“能力提高”的答案，供读者自检.

数学的教学要紧扣教学的基本要求，明确教学重点、难点，反对盲目提高教学难度；数学的教学要重视知识之间的相互联系，提高教学的效率，反对所谓“题海”的大量低效练习；数学的教学要帮助锻炼学生思维，关注知识产生的过程，学会举一反三，反对单纯地围着一道题目转. 本书对教师和学生的教与学有一定借鉴指导意义.

本书为上海市教育委员会教学研究室立项的重大科研项目“基于数学核心素养的创智课堂教学实践研究”(项目编号 JX09JC01201605)的研究成果.

编者

2018年6月

目录

1 集合

1.1 集合的概念与运算

【知识梳理】

1. 集合的概念

集合是能够确切指定的一些对象的全体,其中每个对象称为集合的元素.元素具有确定性、互异性、无序性.

2. 特殊集合

$\varnothing$, $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$, …

3. 集合的表示法

列举法、描述法、图示法.

4. 集合之间的关系

子集:如果 A 中任何一个元素都属于 B,那么 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$.

相等的集合:如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,那么 $A=B$.

真子集:$A\subseteq B$ 且 B 中至少有一个元素不属于 A,记作 $A\subsetneqq B$.

5. 集合的运算(设全集是 U)

交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

补集:$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

6. 交、并、补运算中的性质

(1) $A\cap B\subseteq A$; $A\cap B\subseteq B$;

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$; $A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(2) $A\subseteq A\cup B$; $B\subseteq A\cup B$;

$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$; $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$; $A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$.

(3) $\complement_U A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow B\subseteq A\Leftrightarrow \complement_U B\supseteq \complement_U A$.

(4) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$; $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

【讲练平台】

考点 1. 集合的描述法表示以及集合的运算

例 1 (1) 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2-2x,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\mid y=-x^2+2x+6,\ x\in\mathbf{R}\}$,求 $A\cap B$;

(2) 已知集合 $A=\{(x,\ y)\mid y=x^2-2x,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{(x,\ y)\mid y=-x^2+2x+6,\ x\in\mathbf{R}\}$,求 $A\cap B$.

解 (1) $\because y=x^2-2x=(x-1)^2-1$, $\therefore y\geqslant -1$, $\therefore A=[-1,+\infty)$,

$\because y=-x^2+2x+6=-(x-1)^2+7$, $\therefore y\leqslant 7$, $\therefore B=(-\infty,7]$,

$\therefore A\cap B=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 7\}$.

(2) $\because \begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=-x^2+2x+6, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=3, \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=3, \end{cases}$

$\therefore A\cap B=\{(3,3),(-1,3)\}$.

考点 2. 集合的运算以及集合的几何意义

例 2 设全集 $U=\{(x,y)\mid x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$, $A=\left\{(x,y)\,\middle|\, \dfrac{y-2}{x-1}=a+1, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\right\}$, $B=\{(x,y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=21, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$,

(1) 设 $C=\{(x,y)\mid y\neq x+1, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$,若 $a=0$ 时,求 $\complement_U(A\cup C)$;

(2) 若 $A\cap B=\varnothing$,求由所有实数 a 所组成的集合.

解 (1) 当 $a=0$ 时,$A=\left\{(x,y)\,\middle|\, \dfrac{y-2}{x-1}=1, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\right\}=\{(x,y)\mid y=x+1, x\neq 1\}$,

$\therefore A\cup C=\{(x,y)\mid x\neq 1, y\neq 2, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$,

$\therefore \complement_U(A\cup C)=\{(1,2)\}$.

(2) $\because A\cap B=\varnothing$,

$\therefore \begin{cases} \dfrac{y-2}{x-1}=a+1, \\ (a^2-1)x+(a-1)y=21 \end{cases}$ 无实数解.

解方程组,消去 y,得 $2(a^2-1)x=a^2-2a+22$.

当 $a=\pm 1$ 时,$a^2-2a+22\neq 0$,所以方程组无实数解,即 $A\cap B=\varnothing$;

当 $a\neq \pm 1$ 时,$x=\dfrac{a^2-2a+22}{2(a^2-1)}=1$ 为方程组的增根,

解 $\dfrac{a^2-2a+22}{2(a^2-1)}=1$,得 $a=-6$ 或 $a=4$,此时,方程组无实数解,即 $A\cap B=\varnothing$.

综上所述,当 $a=\pm 1$ 或 $a=-6$ 或 $a=4$ 时,$A\cap B=\varnothing$.

$\therefore a\in \{1,-1,-6,4\}$.

考点 3. 集合的运算及其性质

例 3 已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x-24<0, x\in \mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid x^2-3ax+2a^2<0, x\in \mathbf{R}\}$,若 $A\cup B=A$,求实数 a 的取值范围.

解 $\because A\cup B=A$, $\therefore B\subseteq A$,

$\because x^2-5x-24<0$, $\therefore (x+3)(x-8)<0$, $\therefore -3<x<8$, $\therefore A=(-3,8)$,

$\because x^2-3ax+2a^2<0$, $\therefore (x-a)(x-2a)<0$,

当 $a>0$ 时, $B=(a,2a)$, $\because B\subseteq A$, $\therefore \begin{cases} a\geqslant -3, \\ 2a\leqslant 8, \end{cases}$ $\therefore 0<a\leqslant 4$;

当 $a<0$ 时, $B=(2a,a)$, $\because B\subseteq A$, $\therefore \begin{cases} 2a\geqslant -3, \\ a\leqslant 8, \end{cases}$ $\therefore -\dfrac{3}{2}\leqslant a<0$;

当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，显然满足.

综上所述，$a\in\left[-\dfrac{3}{2},\ 4\right]$.

【基础训练】

1. (2017 年上海市高考) 已知集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，集合 $B=\{3,\ 4,\ 5\}$，则 $A\cap B=$ ______.

2. (2018 年上海市春考) 设集合 $A=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{x\mid -1<x<1\}$，则 $A\cap B=$ ______.

3. 已知集合 $A=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,\ y)\mid y=x\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为(　　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

4. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+x-2\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 1<x+1\leqslant 4\}$，$C=\{x\mid x^2+mx+n>0\}$，并且满足 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，求实数 m，n 的值.

5. 设集合 $P=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{2x-1}=a+1\right\}$，$Q=\{(x,\ y)\mid y=ax^2\}$，若集合 $P\cap Q$ 有且只有两个子集，求实数 a 的值.

6. 集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，求当实数 a 取何值时，$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$ 同时成立.

【能力提高】

1. 设全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，$A$ 与 B 是 U 的子集，若 $A\cap B=\{1, 2, 3\}$，则称集对 (A, B) 为优集对，那么，所有优集对的个数是________.

2. 若 $M=\{x \mid x=1+3n, n\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{y \mid y=2+3n, n\in \mathbf{Z}\}$，且 $x_0\in M$，$y_0\in N$，则 x_0y_0 与集合 M，N 的关系(　　).

(A) $x_0y_0\in M$，$x_0y_0\notin N$

(B) $x_0y_0\notin M$，$x_0y_0\in N$

(C) $x_0y_0\in M$，$x_0y_0\in N$

(D) $x_0y_0\notin M$，$x_0y_0\notin N$

【归纳小结】

1. 在用描述法表示集合时，要注意弄清该集合中元素的一般形式.

2. 特殊集合的记忆和理解对于解题是非常重要的，特别是对于空集 $\varnothing$ 概念的理解.

3. 我们规定不含任何元素的集合是空集，对于一个集合是空集，或者是指方程等无解，或者是指图像没有交点. 对此的理解与转换可能就是解题的突破口.

4. 对于含参数的集合之间关系的讨论，特别要注意其端点处的讨论，避免出现漏情况或多情况的错误.

5. 在处理子集、真子集及集合运算有关问题时，经常可借助集合的图示或者数轴来直观理解.

1.2　命题及充要条件

【知识梳理】

1. 命题：判断真假的语句. 通常用陈述句表述. 一般形式："如果 α，那么 β."正确的命题叫真命题，错误的命题叫假命题.

2. 四种命题形式，如图 1-1 所示(用 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{\beta}$ 分别表示 α 和 β 的否定).

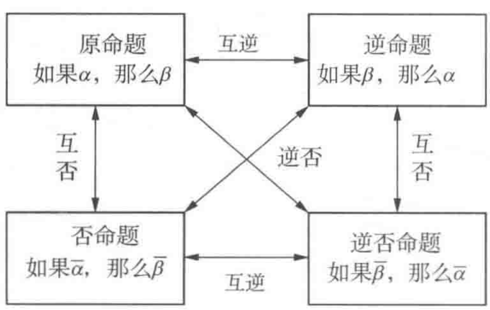

图 1-1

原命题与逆否命题同真(假)；逆命题与否命题同真(假).

3. 如果 $\alpha \Rightarrow \beta$, 那么, α 是 β 的充分条件, β 是 α 的必要条件.

如果 $\alpha \Leftrightarrow \beta$, 那么, α 是 β 的充要条件, β 是 α 的充要条件,也就是说,命题 α 与命题 β 是等价命题.

4. 设 $A=\{a \mid a$ 具有性质 $\alpha\}$, $B=\{b \mid b$ 具有性质 $\beta\}$,则 $A \subseteq B$ 与 $\alpha \Rightarrow \beta$ 等价.

【讲练平台】

考点 1. 命题的四种形式与否定形式的准确把握

例 1 写出下列命题的否命题,并且判断它的真假:

(1) 设 $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$,若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$;

(2) 设 $a,\ b \in \mathbf{R}$,若 $a+b \neq 0$ 且 $ab \geqslant 0$,则 $a>0$ 且 $b>0$.

解 (1) 否命题:设 $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$,若 $a \leqslant b$,则 $ac^2 \leqslant bc^2$, 真命题;

(2) 否命题:设 $a,\ b \in \mathbf{R}$,若 $a+b=0$ 或 $ab<0$,则 $a \leqslant 0$ 或 $b \leqslant 0$, 真命题.

考点 2. 几种条件关系的判断

例 2 判断命题 α:“$x+y>10$ 且 $xy>25$”是命题 β:“$x>5$ 且 $y>5$”的什么条件.

解 α 是 β 的必要非充分条件.

充分性: α 不是 β 的充分条件,有反例: $x=2,\ y=13$;

必要性: $\because\ x>5$ 且 $y>5$,由不等式的加法性质,得: $x+y>10$ 且 $xy>25$,

$\therefore\ \alpha$ 是 β 的必要条件.

综上所述, α 是 β 的必要非充分条件.

考点 3. 集合的包含关系与命题的推出关系之间的等价性

例 3 已知 p: $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right| \leqslant 1$, q: $x^2-4x+4-m^2 \leqslant 0(m>0)$,若 $\overline{p}$ 是 $\overline{q}$ 的充分非必要条件,求实数 m 的取值范围.

解 由题可知:命题“$\overline{p}$ 是 $\overline{q}$ 的充分非必要条件”的等价命题(即它的逆否命题)是:“q 是 p 的充分非必要条件”,

p: $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \dfrac{x-1}{3}-1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x-1}{3} \leqslant 2 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 7$,

q: $x^2-4x+4-m^2 \leqslant 0\ (m>0) \Rightarrow [x-(2-m)][x-(2+m)] \leqslant 0$,

$\because\ q$ 是 p 的充分非必要条件,

$\therefore$ 不等式 $x^2-4x+4-m^2 \leqslant 0(m>0)$ 的解集是不等式 $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right| \leqslant 1$ 解集的真子集.

又 $\because\ m>0$, $\therefore$ 不等式 $x^2-4x+4-m^2 \leqslant 0(m>0)$ 的解集是 $[2-m,\ 2+m]$,

$$\therefore \begin{cases} m>0 \\ 2-m \geqslant 1 \\ 2+m \leqslant 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ m \leqslant 1 \\ m \leqslant 5 \end{cases} \Rightarrow 0<m \leqslant 1,\ \therefore \text{实数 } m \text{ 的取值范围是}(0,\ 1].$$

【基础训练】

1. 已知一个命题的逆命题:“已知 $x,\ y,\ z \in \mathbf{Z}$,如果 $x,\ y,\ z$ 中至少有一个偶数,那么, xyz 能被 2 整除.”则这个命题的等价命题是____________________.

2. 设 $\theta \in \mathbf{R}$,则“$\left|\theta-\frac{\pi}{12}\right|<\frac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\frac{1}{2}$”的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

3. (2018 年上海市高考) 已知 $a \in \mathbf{R}$,则“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

4. 能够说明“设 a, b, c 是任意实数,若 $a>b>c$,则 $a+b>c$”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为__________.

5. 已知函数 $f(x)=(a^2-1)x^2+(a-1)x+2$,分别写出 $f(x)>0(x\in\mathbf{R})$ 的一个充要条件、一个充分非必要条件和一个必要非充分条件.

6. 设 $a>0$, $a\neq 1$,命题 α:“函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增”,命题 β:“曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于不同的两点”,若命题 α 与 β 有且只有一个正确,求实数 a 的取值范围.

【能力提高】

1. 若实数 a, b 满足 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$,且 $ab=0$,则称 a 与 b 互补. 记 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b$,那么,“$\varphi(a,b)=0$”是“$a$ 与 b 互补”的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

2. 设 S 为复数集 C 的非空子集. 若对任意 x, $y\in S$,都有 $x+y$, $x-y$, $xy\in S$,则称 S 为封闭集. 下列命题:

① 集合 $S=\{a+bi \mid a, b\in\mathbf{Z}\}$ 为封闭集(其中 i 为虚数单位);

② 若 S 为封闭集,则一定有 $0\in S$;

③ 封闭集一定是无限集;

④ 若 S 为封闭集,则满足 $S\subseteq T\subseteq C$ 的任意集合 T 也是封闭集.

其中,真命题是________(写出所有真命题的序号).

【归纳小结】

1. 要判断命题的真假，必须要牢记已经学过的定理、命题和性质.

2. 判断几种条件关系（“充分非必要条件”“必要非充分条件”“充要条件”“既非充分又非必要条件”）的方法：

(1) 用定义判断；(2) 用集合的包含关系；(3) 用命题的等价性.

3. 真、假命题的证明：真命题是正确的命题，可以通过已有的公理、定理等进行严格证明；假命题是错误的命题，可以通过举反例进行说明.

4. 证明 α 是 β 的充要条件：(1) 充分性的证明：$\alpha \Rightarrow \beta$; (2) 必要性的证明：$\beta \Rightarrow \alpha$.

证明 α 是 β 的充分非必要条件：(1) 充分性的证明：$\alpha \Rightarrow \beta$; (2) 举反例说明 β 推不出 α.

2 不等式

2.1 不等式的性质

【知识梳理】

1. 两个实数 a, b

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$; $a-b=0\Leftrightarrow a=b$; $a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

2. 不等式基本性质

(1) 如果 $a>b$, $b>c$,那么,$a>c$.

(2) 如果 $a>b$,那么,$a+c>b+c$.

(3) 如果 $a>b$, $c>0$,那么,$ac>bc$;如果 $a>b$, $c<0$,那么,$ac<bc$.

(4) 如果 $a>b$, $c>d$,那么,$a+c>b+d$.

(5) 如果 $a>b>0$, $c>d>0$,那么,$ac>bd$.

(6) 如果 $a>b$, $ab>0$,那么,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(7) 如果 $a>b>0$,那么,$a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(8) 如果 $a>b>0$,那么,$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n>1, n\in\mathbf{N}^*)$.

3. 比较两数大小的一般方法

比较法之一(作差法)步骤:作差⟶变形⟶判断与 0 的关系⟶结论;

比较法之二(作商法)步骤:作商⟶变形⟶判断与 1 的关系⟶结论.

【讲练平台】

考点 1. 不等式的性质

例 1 $\begin{cases}2<x+y<4,\\0<xy<3\end{cases}$ 是 $\begin{cases}0<x<1,\\2<y<3\end{cases}$ 的(   ).

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

解 $\because 0<x<1$, $2<y<3$, $\therefore 2<x+y<4$, $0<xy<3$,但是若 $2<x+y<4$, $0<xy<3$,不一定有 $0<x<1$, $2<y<3$,如 $x=2.5$, $y=0.5$,故选(B).

考点 2. 不等式的证明

例 2 若 a, $b\in\mathbf{R}$, $ab>0$,求证:$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\geqslant 4$.

证明 $\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\geqslant\frac{4a^2b^2+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$,前一个等号成立条件

是 $a^2=2b^2$，后一个等号成立的条件是 $ab=\frac{1}{2}$，两个等号可以同时取得，则当且仅当 $a^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时取等号.

考点 3. 含参数的不等式

例 3 已知 $0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

解法 1 $\because |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\frac{|\lg(1-x)|}{|\lg a|}-\frac{|\lg(1+x)|}{|\lg a|}=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]=-\frac{1}{|\lg a|}\lg(1-x^2)>0$，

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法 2 $\because \frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}=\log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$，

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

【基础训练】

1. 下列六个命题：

(1) 若 $0>a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(2) 若 $\frac{1}{a}>1$，则 $1>a$；

(3) 若 $1<a<2$，$0<b<3$，则 $-2<a-b<2$；

(4) 若 $12<a<60$，$15<b<36$，则 $\frac{4}{5}<\frac{a}{b}<\frac{5}{3}$；

(5) 若 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$，$c>0$，则 $a>b$；

(6) 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

其中是真命题的序号是________.

2. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，则“$ab>0$”是“$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$”的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

3. 若 $a>b>0$，则 $ab=1$，则下列不等式成立的是(　　).

(A) $a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$　　(B) $\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

(C) $a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$　　(D) $\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}$

4. 比较下列两数的大小：

(1) x^2+3 与 $3x$；　　(2) x^2+y^2+1 与 $x+y+xy$；

(3) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$ 与 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}(a, b\in\mathbf{R}^+)$；　　(4) $\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$ 与 $\sqrt{c}-\sqrt{c-1}(c>1)$.

【能力提高】

我们用记号"|"表示两个正整数间的整除关系，如 3|12 表示 3 整除 12. 试类比课本中不等关系的基本性质，写出整除关系的两个性质：①________；②________.

【归纳小结】

1. 主要方法

(1) 比较两数大小的一般方法——作差法；(2)利用函数的单调性；(3)作商法(较少用).

2. 易错、易漏点

(1) 不等式的基本性质是解不等式的理论依据，特别要注意同向不等式可相加，也可相乘，但相乘时，两个不等式都需大于零；

(2) 作差法是很重要的方法，要引起重视.

2.2　不等式的解法

【知识梳理】

1. 同解不等式

若 $\varphi(x)$ 是整式或常数，则不等式 $f(x)>F(x)$ 与 $f(x)+\varphi(x)>F(x)+\varphi(x)$ 同解；

若 $m>0$，则不等式 $f(x)>F(x)$ 与 $m\cdot f(x)>m\cdot F(x)$ 同解；

若 $m<0$，则不等式 $f(x)>F(x)$ 与 $m\cdot f(x)<m\cdot F(x)$ 同解.

2. 解不等式

(1) 一元一次不等式

$ax>b\ (a\in\mathbf{R})$，当 $a>0$ 时，则 $x>\frac{b}{a}$；当 $a<0$ 时，则 $x<\frac{b}{a}$；

当 $a=0, b<0$，则 $x\in\mathbf{R}$；当 $a=0, b\geqslant 0$，则 $x\in\varnothing$.

(2) 一元二次不等式

$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$，设相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0,\ \Delta\geqslant 0)$ 的两根为 x_1，x_2，且 $x_1\leqslant x_2$，$\Delta=b^2-4ac$：

① 当 $\Delta>0$ 时，$ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$，

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x\mid x_1<x<x_2\}$；

② 当 $\Delta=0$ 时，$ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$，

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\varnothing$；