考研必备

2020年 李正元·范培华

考研数学

数学

数学一

历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

20年经典传承 百万考生推荐

名师全程亲自答疑 扫描二维码互动交流

数学复习指导

双色印刷 重点突出

中国政法大学出版社

考研必备

2020年李正元·范培华考研数学

数学

数学一

历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

2019·北京

图书在版编目（CIP）数据

2020年李正元·范培华考研数学数学历年试题解析. 数学一/李正元，尤承业，范培华主编. —北京：中国政法大学出版社，2019.1
ISBN 978-7-5620-8794-6

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李… ②尤… ③范… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第013096号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印　三河市燕山印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　25
字　数　585千字
版　次　2019年1月第1版
印　次　2019年1月第1次印刷
定　价　69.80元

前　　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了2005年~2019年全国硕士研究生招生统考数学一试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学一试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学一的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学二、三以及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了2001年（含）以前数学一相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学一的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后部归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的《**考研数学复习全书（数学一）**》，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2～3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2019年1月

目　录

第一篇　2019 年考研数学一试题及答案与解析

第二篇　2005 ~ 2018 年考研数学一试题

第三篇　2005 ~ 2018 年考研数学一试题分类解析

第一篇　2019 年考研数学一试题及答案与解析

2019 年考研数学一试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若 $x \to 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　【　】

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0 \\ x\ln x, & x > 0 \end{cases}$,则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的

(A) 可导点,极值点.　　(B) 不可导点,极值点.

(C) 可导点,非极值点.　　(D) 不可导点,非极值点.　　【　】

(3) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.　　【　】

(4) 设函数 $Q(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$,如果对上半平面($y > 0$)内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

那么函数 $P(x,y)$ 可取为

(A) $y - \dfrac{x^2}{y^3}$.　　(B) $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^3}$.

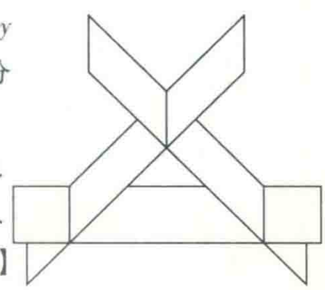
(C) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$.　　(D) $x - \dfrac{1}{y}$.　　【　】

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}| = 4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.　　(B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.　　(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.　　【　】

(6) 如图所示,有 3 张平面两两相交,交线相互平行,它们的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1,2,3)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}, \overline{\boldsymbol{A}}$,则



(A) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2, \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.　　(B) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2, \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$.

(C) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1, \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$.　　(D) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1, \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1$.

【　】

(7) 设 A,B 为随机事件,则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.　　(D) $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.　　【　】

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 $P\{|X-Y|<1\}$

(A) 与 μ 无关,而与 σ^2 有关.　　(B) 与 μ 有关,而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ,σ^2 都有关.　　(D) 与 μ,σ^2 都无关.　　【　】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(u)$ 可导,$z=f(\sin y-\sin x)+xy$,则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(10) 微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$ ________.

(11) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $s(x)=$ ________.

(12) 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

(13) 设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为________.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$,$F(x)$ 为 X 的分布函数,EX 为 X 的数学期望,则 $P\{F(X)>EX-1\}=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(**本题满分** 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(Ⅰ) 求 $y(x)$;

(Ⅱ) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(16)(**本题满分** 10 分)

设 a,b 为实数,函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中,沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大,最大值为 10.

(Ⅰ) 求 a,b;

(Ⅱ) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geqslant 0)$ 的面积.

(17)(**本题满分** 10 分)

求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(18)(**本题满分** 10 分)

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$

(Ⅰ) 证明:数列 $\{a_n\}$ 单调递减,且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

(19)(**本题满分 10 分**)

设 Ω 是由锥面：$x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

(20)(**本题满分 11 分**)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^T$ 为 R^3 的一组基，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$.

（Ⅰ）求 a,b,c 的值；

（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 R^3 的一组基，并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

(21)(**本题满分 11 分**)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似.

（Ⅰ）求 x,y 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(22)(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为

$$\boldsymbol{P}\{Y=-1\}=p,$$
$$\boldsymbol{P}\{Y=1\}=1-p(0<p<1).$$

令 $Z=XY$.

（Ⅰ）求 Z 的概率密度；

（Ⅱ）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（Ⅲ）X 与 Z 是否相互独立？

(23)(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求 A 的值；

（Ⅱ）求 σ^2 的最大似然估计量.

2019 年考研数学一试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析一】 即求常数 $k>0$ 使得极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^k}$ 存在且不为零.

由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^k} \xlongequal{k>0} \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{kx^{k-1}\cos^2 x}$$

$$=\begin{cases}\infty & (k>3)\\ -\dfrac{1}{3} & (k=3)\\ 0 & (0<k<3)\end{cases}$$

因此 $k=3$. 选(C).

【分析二】 若熟知泰勒公式

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\,(x\to 0)$$

则得 $$x-\tan x = -\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\,(x\to 0)$$

因此 $x\to 0$ 时 $x-\tan x$ 是 x 的 3 阶无穷小,即 $k=3$.

选(C).

---

(2)【分析】 $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0 = f(0)\\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} x|x| = 0 = f(0)\end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

又 $$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\ln x = -\infty,\ f(x)\text{ 在 }x=0\text{ 不可导}.$$

下面判断 $x=0$ 是否极值点. 考察 $x=0$ 两侧 $f'(x)$ 的符号.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x(x<0)\\ 1+\ln x(x>0)\end{cases}\begin{cases}>0(x<0)\\ <0(0<x<e^{-1})\end{cases} \qquad (*)$$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

选(B).

评注 ① 用极值第一判别法则判别 $x=x_0$ 是否是 $f(x)$ 的极值点时,要求 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,在 $x=x_0$ 两侧附近 $f'(x)$ 变号,但不要求 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导.

② 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,又

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \begin{cases}A & \Rightarrow\ f'(x_0)=A\\ \infty & \Rightarrow\ f(x)\text{ 在 }x=x_0\text{ 不可导}.\end{cases}$$

当 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不$\exists$,也不为 ∞ 时,由此不能判断 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的可导性,往往要按定义求

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

③ 本题验证 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续后,也可先求出(*)式从而判断 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点. 然后再求

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(1+\ln x) = -\infty,$$

$f'_+(0)$ 不$\exists$,$\Rightarrow f'(0)$ 不$\exists$.

---

(3)【分析】 因$\{u_n\}$单调有界 $\Rightarrow \{u_n\}$ 收敛,记 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$. 由级数的结构,易求出级数(D)的部分和的极限:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=2}^{n+1}u_k^2 - \sum_{k=1}^{n}u_k^2$$
$$= u_{n+1}^2 - u_1^2 \to c^2 - u_1^2 (n \to +\infty)$$

因此级数(D)收敛,选(D).

评注 ① 设 $u_n = \dfrac{n-1}{n}$,则 u_n 单调增加且有界,此时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{u_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n-1}$$

均发散.

当 u_n 有取值为零的项时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$无定义.

② 若$\{u_n\}$是单调增加的有界数列,且是正项数列,则

$$\lim_{n\to+\infty}u_n \overset{\exists}{=\!=} c > 0 \Rightarrow$$
$$\frac{u_n}{n} \sim \frac{c}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n} \text{ 发散},$$
$$\left|(-1)^n\frac{1}{u_n}\right| \to \frac{1}{c} \neq 0, \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n} \text{ 发散}.$$
$$0 < 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} < \frac{u_{n+1} - u_n}{u_1}$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_1} = \dfrac{1}{u_1}(c - u_1)$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_1}$ 收敛,

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛.

(4)【分析】 单连通区域($y > 0$)上,对 $\forall$ 有向光滑闭曲线 C,

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

由 $Q(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad P(x,y) = -\frac{1}{y} + C(x)$$

其中 $C(x)$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上连续.

因此选(D).

(5)【分析】 条件 $A^2 + A = 2E$ 说明 A 的特征值 λ 都要满足 $\lambda^2 + \lambda = 2$,因此只能是 1 或 -2,又 $|A| = 4$ 说明 A 的 3 个特征值的乘积等于 4,于是为 $1, -2, -2$,从而 A 的正、负惯性指数分别是 1 和 2,规范形是 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

选(C).

(6)【分析】 3 张平面两两相交，说明 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个行向量两两都线性无关，$r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$；3 张平面无公共点，说明方程组无解，于是 $r(\boldsymbol{A}) < r(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant 3$.

故选(A).

---

(7)【分析】 选项(A)是事件 A 与事件 B 互不相容的充要条件. 选项(B)是事件 A 与事件 B 相互独立的充要条件，它们与事件 A 与 B 的概率是否相等没有关系. 对于(C)

由 $\quad \boldsymbol{P}(A\overline{B}) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(AB),\ \boldsymbol{P}(B\overline{A}) = \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB)$

可知 $\boldsymbol{P}(A\overline{B}) = \boldsymbol{P}(B\overline{A}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(B)$

故选(C).

---

(8)【分析】 由于 X 与 Y 相互独立且服从同一正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

$$X - Y \sim N(0, 2\sigma^2)$$

$$\boldsymbol{P}\{|X-Y|<1\} = \boldsymbol{P}\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1$$

所以此概率值与 σ^2 有关，而与 μ 无关.

故选(A).

二、填空题

(9)【分析一】 先分别求出$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$. 用复合函数求导法得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(\sin y - \sin x)(-\cos x) + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(\sin y - \sin x)(\cos y) + x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y}\frac{\partial z}{\partial y} = -f'(\sin y - \sin x) + \frac{y}{\cos x} + f'(\sin y - \sin x) + \frac{x}{\cos y}$$

$$= \frac{x}{\cos y} + \frac{y}{\cos x}$$

【分析二】 用复合函数微分法先求出

$$\mathrm{d}z = f'(\sin y - \sin x)\mathrm{d}(\sin y - \sin x) + y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$= (-\cos x\, f'(\sin y - \sin x) + y)\mathrm{d}x + (\cos y\, f'(\sin y - \sin x) + x)\mathrm{d}y$$

$\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 的系数分别是$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，同样可得

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}.$$

---

(10)【分析一】 用凑微分法得

$$(y^2)' - y^2 = 2$$

对 y^2 来说，这是线性微分方程. 两边乘 e^{-x} 得

$$(\mathrm{e}^{-x}y^2)' = 2\mathrm{e}^{-x}$$

积分得 $\quad \mathrm{e}^{-x}y^2 = -2\mathrm{e}^{-x} + c$

$$y^2 = c\mathrm{e}^x - 2$$

由 $y(0) = 1 \Rightarrow c = 3$. 因此 $y = \sqrt{3\mathrm{e}^x - 2}$

【分析二】 这是可分离变量的，改写成

$$2y\frac{dy}{dx}=y^2+2,\ \frac{2y\,dy}{y^2+2}=dx$$

$$\frac{d(y^2+2)}{y^2+2}=dx$$

积分得 $\ln(y^2+2)=c_1x,$

即 $y^2=ce^x-2$

由 $y(0)=1\Rightarrow c=3$. 因此 $y=\sqrt{3e^x-2}$

评注 若化成标准形式 $y'-\frac{1}{2}y=y^{-1}$

这是伯努利方程,两边乘 y 得 $yy'-\frac{1}{2}y^2=1$

又回到了【分析一】中的情形.

---

(11)**【分析一】** 若熟悉 $\sin x,\cos x$ 的幂级数展开式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x\ (x\in(-\infty,+\infty))$$

立即可得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}\ (x\in(0,+\infty))$.

【分析二】 用逐项求导法求幂级数的和函数,易知该幂级数的收敛域是$(-\infty,+\infty)$.

为了用逐项求导法,当 $x>0$ 时,将幂级数改写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}$$

考察 $\displaystyle S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}(|t|<+\infty),\ S(0)=1$

$\Rightarrow$ $\displaystyle S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}t^{2n-1},\ S'(0)=0$

$$S''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2)!}t^{2(n-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}=-S(t)$$

逐项求导两次后得 $S(t)$ 满足

$$\begin{cases}S''(t)+S(t)=0\\ S(0)=1,S'(0)=0\end{cases}$$

特征方程为 $\lambda^2+1=0$,特征根 $\lambda=\pm i$,通解为

$$S(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$$

由初条件 $\Rightarrow c_1=1,c_2=0$.

因此求得

$$S(t)=\cos t$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=S(\sqrt{x})=\cos\sqrt{x}\ (x\in(0,+\infty)).$$

---

(12)**【分析】** 先用曲面方程 $4-x^2-4z^2=y^2$ 简化被积表达式

$$I=\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,dxdy=\iint_{\Sigma}|y|\,dxdy$$

投影到 xy 平面,化为二重积分,Σ 在 xy 平面的投影区域是 $D:x^2+y^2\leqslant 4$. Σ 取上侧于是

$$I=+\iint_D |y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

D 关于 x,y 轴均对称,D 的第一象限部分记为 D_1,

$$I=4\iint_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

用极坐标变换:

$$D_1:0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2$$

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sin\theta r\mathrm{d}r=4\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^2=\frac{32}{3}$$

---

(13)【分析】 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$,则 $r(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系包含一个解;而 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$. 即 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_3=0$,说明 $(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解,构成 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $C(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,C 任意.

---

(14)【分析】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & ,0<x<2\\ 0 & ,\text{其他}.\end{cases}$

$$\boldsymbol{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & ,0\leqslant x<2\\ 1 & ,x\geqslant 2\end{cases}$$

故

$$P\{F(x)>\boldsymbol{E}X-1\}=P\left\{F(x)>\frac{1}{3}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

三、解答题

(15)【分析与求解】 (Ⅰ)这是一阶线性微分方程,两边乘 $\mu(x)=e^{\int x\mathrm{d}x}=e^{\frac{1}{2}x^2}$ 得

$$(e^{\frac{1}{2}x^2}y)'=1$$

积分得 $e^{\frac{1}{2}x^2}y=x+c$

由 $y(0)=0\Rightarrow c=0$,因此得 $y=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

(Ⅱ)现求 $y=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的凸凹区间与拐点.

先求出 y''.

$$y'=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y''=-2xe^{-\frac{x^2}{2}}-(1-x^2)xe^{-\frac{x^2}{2}}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

令 $y''=0$ 得 $x(x^2-3)=0$,解得 $x=0,x=\pm\sqrt{3}$.

考察 y'' 的正负号区间

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

综上　$y(x)$ 的凸区间是 $(-\infty,-\sqrt{3}),(0,\sqrt{3})$

$y(x)$ 的凹区间是 $(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},+\infty)$

$y(x)$ 的拐点是 $(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}),(0,0),(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

---

(16)**【分析与求解】**　(Ⅰ) $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 沿它的梯度方向取方向导的最大值,该点的梯度向量的模即最大值.

$$\operatorname{grad}z\Big|_{(3,4)}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_{(3,4)}=(2ax,2by)\Big|_{(3,4)}=(6a,8b)$$

$$\left|\operatorname{grad}z\Big|_{(3,4)}\right|=\sqrt{(6a)^2+(8b)^2}=\sqrt{36a^2+64b^2}$$

现由 $(6a,8b)$ 与 $(-3,-4)$ 同向及最大值为 10,我们可得

$$\begin{cases}\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}\\ \sqrt{36a^2+64b^2}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\36a^2+64b^2=100\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\quad a=b,a^2=1$

因此求出 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

(Ⅱ) 按题意所求曲面为

$$z=2-x^2-y^2(x^2+y^2\leqslant 2)$$

此曲面在 xy 平面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$

按曲面的面积公式,该曲面的面积

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=4\iint_{D_1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy\ (D_1\text{ 是 }D\text{ 在第一象限部分})$$

用极坐标变换得

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,rdr=4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}d(4r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{6}(27-1)=\frac{13}{3}\pi$$

---

(17)**【分析与求解】**　因 $\sin x$ 是变号的,所以该图形的面积

$$S=\int_0^{+\infty}e^x|\sin x|dx$$

$\sin x>0(2n\pi<x<(2n+1)\pi),\sin x<0((2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi)n=0,1,2,3,\cdots$.

由于该积分收敛

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x}\sin xdx-\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}e^{-x}\sin xdx\right]$$

先算出
$$\int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\int \sin x\mathrm{d}e^{-x}=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\mathrm{d}x$$
$$=-e^{-x}\sin x-\int \cos x\mathrm{d}e^{-x}$$
$$=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$
$$\int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+c$$

$\Rightarrow$
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$
$$=-\frac{1}{2}[e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1}-e^{-k\pi}(-1)^{k}]$$
$$=\frac{1}{2}(-1)^{k}e^{-k\pi}(1+e^{-\pi})$$

$\Rightarrow$
$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{-2n\pi}(1+e^{-\pi})$$
$$\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}e^{x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}e^{-(2n+1)\pi}(1+e^{-\pi})$$

代入得
$$S=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[e^{-2n\pi}+e^{-(2n+1)\pi}](1+e^{-\pi})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}(1+e^{-\pi})=\frac{1}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

---

(18)**【分析与求解】** (Ⅰ)已知

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t=\frac{(n-1)!!}{n!!}I^*,\text{其中 }I^*=\begin{cases}1 & (n\text{ 为奇数})\\ \frac{\pi}{2} & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$$

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\mathrm{d}t$$
$=I_n-I_{n+2}$(这里 n 与 $n+2$ 有相同的奇偶性)
$$I_{n+2}=\frac{(n+1)!!}{(n+2)!!}I^*=\frac{(n+1)(n-1)!!}{(n+2)n!!}I^*=\frac{n+1}{n+2}I_n.$$

代入上式得
$$a_n=\left(1-\frac{n+1}{n+2}\right)I_n=\frac{1}{n+2}I_n$$

又
$$a_{n-2}=I_{n-2}-I_n=\frac{n}{n-1}I_n-I_n=\left(\frac{n}{n-1}-1\right)I_n=\frac{1}{n-1}I_n$$

综上,$\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\dfrac{n-1}{n+2}$ 即 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$.

易证$\{a_n\}$单调减少:显然
$$x^{n+1}<x^n(x\in(0,1))$$
$$x^{n+1}\sqrt{1-x^2}<x^n\sqrt{1-x^2}\ (x\in(0,1))$$

$\Rightarrow$
$$a_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=a_n$$