医用高等数学

（第二版）

主编　刘桂然　崔丽娟

非外借

科学出版社

医用高等数学

（第二版）

主　编　刘桂然　崔丽娟
副主编　李　芳　范素军　刘东艳
编　者　王敏彦　顾作林

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会起草的五年制临床医学专业高等数学教学基本要求编写的. 全书共分8章,内容包括:函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分、多元函数微分学、多元函数积分学、微分方程、线性代数初步. 本书结构合理,内容清晰,例题丰富,与医学应用紧密结合,强调数学思想方法与计算工具的应用.

本书可用作普通高等医药院校高等数学课教材,也可作为相关医药工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学/刘桂然,崔丽娟主编. —2版. —北京:科学出版社,2017.8
ISBN 978-7-03-053919-9

Ⅰ.①医… Ⅱ.①刘…②崔… Ⅲ.①医用数学-高等学校-教材 Ⅳ.①R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第164801号

责任编辑:王胡权 / 责任校对:邹慧卿
责任印制:白 洋 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年7月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2017年8月第 二 版 印张:15 3/4
2018年7月第九次印刷 字数:310 000

定价: 29.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

医用高等数学是高等医药院校本科各专业的一门重要的基础理论课程，通过本课程的教学使学生获得必要的数学知识、方法和技能.增强他们数据处理的能力以及分析、解决实际问题的能力，为学生学习后继医学课程和解决医学实际问题提供必不可少的数学方法.培养学生具有严格的逻辑思维头脑，使其在临床医疗工作中善于进行确定性推理和不确定性判断的思考，具有准确的临床思维和综合推理的思维素质.

按照面向 21 世纪教学内容和课程体系改革精神，贯彻医药院校大学教学课程教学内容与体系结构改革的指导思想.结合医疗卫生体制改革、高等教育改革的背景及现代医学发展的实际情况，在保持学科系统性的前提下，为适应新的教学观念，我教研室一线教师在吸取第一版教材长处的基础上，对第一版部分知识进行了必要的更新和调整.

(1) 注重数学概念的实际背景与几何直观的引入，可读性强；

(2) 强调数学建模的思想和方法；

(3) 紧密联系实际，服务医学专业课程.

根据当前医学院校教学课时少而所需数学知识较多的实际情况，本书精选以下内容：函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、微分方程等，教学总时数为 60～100 学时，若删减一些相对独立的章节，也适合 40～60 学时的教学.

由于作者水平有限，书中难免有考虑不周之处，恳请读者多提宝贵意见！

刘桂然　崔丽娟

2017 年 5 月于石家庄

目 录

前言
第 1 章　函数与极限 …… 1
1.1　函数 …… 1
1.2　初等函数 …… 7
1.3　极限 …… 10
1.4　无穷小量与无穷大量 …… 19
1.5　极限的运算 …… 21
1.6　函数的连续性 …… 27
习题 1 …… 34
第 2 章　导数与微分 …… 37
2.1　导数的概念 …… 37
2.2　求导数的一般方法 …… 42
2.3　微分中值定理 …… 50
2.4　导数的应用 …… 53
2.5　微分及其应用 …… 66
习题 2 …… 70
第 3 章　不定积分 …… 75
3.1　不定积分的概念与性质 …… 75
3.2　换元积分法 …… 79
3.3　分部积分法 …… 84
3.4　有理函数的积分 …… 87
3.5　积分表的使用 …… 93
习题 3 …… 94
第 4 章　定积分 …… 97
4.1　定积分的概念和性质 …… 97
4.2　积分上限函数 …… 101
4.3　牛顿-莱布尼茨公式 …… 103
4.4　定积分的计算 …… 104
4.5　广义积分 …… 108
4.6　定积分的应用 …… 111
习题 4 …… 115

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 5 章 多元函数微分学 ··· 118
5.1 空间解析几何简介 ··· 118
5.2 多元函数的基本概念 ··· 125
5.3 偏导数和全微分 ··· 132
5.4 多元复合函数和隐函数的偏导数 ··· 141
习题 5 ··· 144
第 6 章 多元函数积分学 ··· 148
6.1 二重积分 ··· 148
6.2 广义二重积分 ··· 157
6.3 二重积分的应用 ··· 159
习题 6 ··· 162
第 7 章 微分方程 ··· 164
7.1 微分方程的基本概念 ··· 164
7.2 一阶微分方程 ··· 167
7.3 可降阶的二阶微分方程 ··· 174
7.4 二阶常系数线性微分方程 ··· 178
7.5 微分方程的应用 ··· 186
习题 7 ··· 191
第 8 章 线性代数初步 ··· 193
8.1 行列式 ··· 193
8.2 矩阵及其运算 ··· 200
8.3 矩阵的初等变换 ··· 206
8.4 n 维向量与向量组的线性相关性 ··· 209
8.5 线性方程组 ··· 212
8.6 矩阵的特征值和特征向量 ··· 220
习题 8 ··· 221
习题答案 ··· 224
参考文献 ··· 235
附录 简明积分表 ··· 236

第1章 函数与极限

高等数学的主要研究对象是函数，所用的研究方法是极限法. 函数反映了客观世界中变量间相互依赖的关系，极限是研究变量变化趋势的重要方法. 正是极限的产生才使数学的发展发生了质的飞跃——由初等数学进入高等数学的研究. 因此，极限是高等数学的奠基性概念，它对后续学习起着十分重要的作用. 本章将介绍函数、函数极限及函数连续性等基本概念与性质.

1.1 函 数

1.1.1 函数的定义

1. 常量与变量

世间万物都处在运动变化之中，在观察和研究事物的过程中会遇到许多量，这些量一般可分为两种：一种是在研究问题的过程中保持不变(即取同一数值)的量，称为**常量**；另一种是在研究问题的过程中会起变化(即可取不同数值)的量，称为**变量**.

例如，在自由落体运动中(不计空气阻力)，下落距离 S 与下落时间 t 是两个变量，它们之间存在着如下关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，是常量.

2. 函数的定义

在同一过程中，几个变量的变化常常不是孤立的，而是按照一定规律相互联系、相互制约着，如在自由落体运动中(不计空气阻力)，下落距离 S 与下落时间 t 存在着这样的关系：$S=\frac{1}{2}gt^2$，在一定范围内，每给定一个时间 t_0，可得一个确定的距离值 S_0 与其对应，两个变量取值间的这种对应关系，就是函数关系的实质.

定义 1.1 设某一变化过程中存在两个变量 x 与 y，如果对于变量 x 在其变化范围 D 内的每一个值，按照某一对应法则 f，变量 y 都有确定的实数与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，或称 y 为 x 的函数. 记为 $y=f(x)$，$x\in D$，称 D 为函

数的**定义域**.

因为 y 的值随 x 而定,所以称 x 为自变量,y 为因变量.当 x 任取 D 中的一个值 x_0 时,与之对应的 y 值称为函数在 $x=x_0$ 处的函数值,记为 $f(x_0)$,此时也称函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处有定义.当 x 遍取 D 中一切值时,函数值的全体构成的集合$\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的**值域**,记为 $f(D)$.

若定义域 D 中每一个自变量值,对应的函数值都是唯一的,这种函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**.

例如,由方程 $x^2+y^2=1,x\in[-1,1]$,可以确定 y 为 x 的函数,但对于$(-1,1)$内的每个 x 值,对应的 y 值有两个:$y=\pm\sqrt{1-x^2},x\in(-1,1)$,所以该函数为多值函数.

在一定条件下可使多值函数变成单值函数,因此,以后如无特殊说明时,函数指的都是单值函数.

如上式,当 $y\geqslant 0$ 时,$y=\sqrt{1-x^2}$;当 $y<0$ 时,$y=-\sqrt{1-x^2}$.特殊地,当函数的定义域为正自然数集时,函数可写成:$y=f(n),n\in\mathbf{N}^+$,或记 $f(n)=y_n,n\in\mathbf{N}^+$,即为数列$\{y_n\}$,可见数列是一种特殊的函数.

理解函数定义时需注意以下问题.

(1) 函数的两要素:定义域与对应法则.两函数相等指定义域与对应法则分别相等.

(2) 定义域求法:对抽象函数,定义域是使表达式 $f(x)$有意义的一切实数值组成的集合;对实际问题所建立的函数,定义域是使实际问题与表达式都有意义的一切实数值组成的集合.

函数的定义域可用集合或区间表示.

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{4-x}\sqrt{x^2-1}$的定义域,并用区间表示.

解　要使 $y=\dfrac{1}{4-x}\sqrt{x^2-1}$有意义,必须

$$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0\\4-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow -\infty<x\leqslant -1,\text{或}\ 1\leqslant x<4\ \text{或}\ 4<x<+\infty,$$

所以,函数的定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,4)\cup(4,+\infty)$.

例 2　求函数 $y=\sqrt{\log_2(6-x)}$的定义域,并用区间表示.

解　要使 $y=\sqrt{\log_2(6-x)}$有意义,必须

$$\begin{cases}\log_2(6-x)\geqslant 0\\6-x>0\end{cases}\Rightarrow x\leqslant 5,$$

所以,函数的定义域为$(-\infty,5]$.

3. 邻域

在函数的研究中,常常遇到一个与区间有关的概念——邻域.

以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 **δ 邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$. x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径. 而数集 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. 邻域刻画了点 x_0 附近的一个范围,δ 越大该范围越大,δ 越小该范围越小.

1.1.2 函数的表示方法

(1) 列表法:将自变量值与对应的函数值列在一张表格里,这种表示函数的方法称为列表法.

(2) 图像法:用坐标平面上的图形来表示函数的方法叫图像法. 例如,正弦曲线、指数曲线及医学诊断中所用的心电图等都是用图像法表示的函数.

(3) 解析法:用含有自变量、因变量的数学式子表示函数的方法称为解析法(公式法). 例如,$y=kx+b$, $y=ax^2+bx+c$ 等.

1.1.3 分段函数

用解析式表示函数时,有些函数对于自变量在定义域的不同范围内取值时,同一函数采用两个以上的解析式表示其对应值,这种函数称为**分段函数**.

例 3 函数 $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ e^x, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 是一个分段函数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

1.1.4 函数的基本特性

1. 函数的有界性

设有函数 $y=f(x)$, $x\in D$,若存在正数 M,使得对于一切 $x\in D$,均有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界,否则称为无界.

例如,函数 $y=\sin x$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $y=\sin x$ 为有界函数. 而函数 $y=x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界,因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在一个正数 M,使得 $|x+1|\leqslant M$ 恒成立.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$,若对于区间 I 内任意两点 x_1 与 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的;若对于区间 I 内任意两点 x_1 与 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立,则称函数

$f(x)$在区间 I 内是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的,如图 1.1 所示. 而函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上单调减少;在区间$[0,+\infty)$上单调增加. 但在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数,如图 1.2 所示.

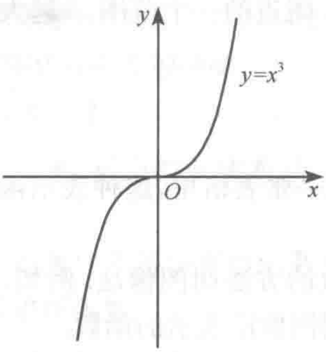

图 1.1

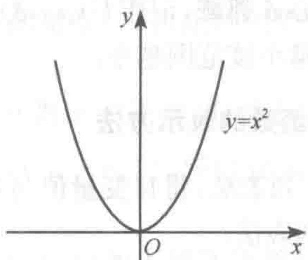

图 1.2

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,若 D 关于原点对称,且对$\forall x\in D$,有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$为偶函数;若 D 关于原点对称,且对$\forall x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称 $f(x)$为奇函数.

例如,函数 $y=x^2$ 及 $y=\cos x$ 都是偶函数,$y=x^3$ 及 $y=\sin x$ 都是奇函数,而 $y=x^2+\sin x$ 是非奇非偶的函数.

由奇、偶函数的定义得:偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1.3),奇函数的图像关于原点对称(图 1.4).

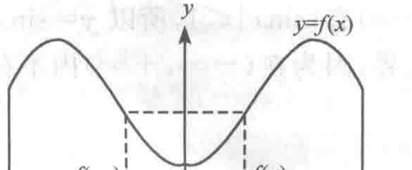

图 1.3

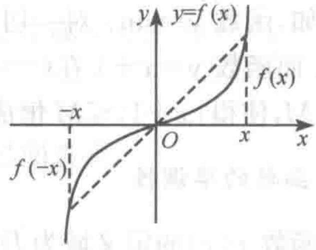

图 1.4

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对于 $\forall x\in D$，有 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，其中 T 为 $f(x)$ 的周期. 使上式成立的最小正常数称为此函数的最小正周期.

注 (1) 函数的周期不唯一，通常说周期函数的周期是指其最小正周期. 例如，$y=\sin x$ 是周期函数，其周期为 2π.

(2) 并非所有周期函数都有最小正周期. 例如，$y=f(x)=1, x\in\mathbf{R}$ 是周期函数，其周期为任意非零常数，由于没有最小正实数，所以该函数没有最小正周期.

1.1.5 复合函数与反函数

1. 复合函数

在实际问题中，常会遇到这种情况：变量 y 不是直接依赖于变量 x，而是直接依赖于变量 u，但 u 依赖于 x，这样 y 通过 u 而依赖于 x 成为 x 的函数.

例如，质量为 m 的物体从空中自由下落，在此过程中，动能 E 是速度 v 的函数：$E=\frac{1}{2}mv^2$，而速度 v 又是时间 t 的函数：$v=gt$，将 $v=gt$ 代入 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 中，得 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2$，这样 E 通过中间变量 v 而成为 t 的函数，称函数 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2$ 为 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与 $v=gt$ 构成的复合函数.

一般地有如下定义：

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，其定义域为 U，而 u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，其定义域为 D，值域为 $\varphi(D)$，如果 $U\cap\varphi(D)\neq\varnothing$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，其中 u 称为中间变量.

例 4 写出下列所给函数的复合函数及其定义域：

(1) $y=\ln u$ 与 $u=\cos x$； (2) $y=u^2$ 与 $u=\sin x$.

解 (1) 因为 $y=\ln u$ 要求 $u>0$，使 $u=\cos x>0$ 的 x 的范围为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $y=\ln u$ 与 $u=\cos x$ 的复合函数为 $y=\ln(\cos x)$，其定义域为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right), k\in\mathbf{Z}$.

(2) 因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$u=\sin x\in[-1,1]\subset\mathbf{R}$，所以 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 的复合函数为 $y=(\sin x)^2=\sin^2 x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

注 (1) 不是任何两函数都可以复合成一个函数.

例如,$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数. 因为 $u=2+x^2$ 的值域为$[2,+\infty)$,而 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,$[2,+\infty)\cap[-1,1]=\varnothing$,所以 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 不能复合成一个函数.

(2) 复合函数的中间变量可以不止一个.

例 5 指出函数 $y=\lg\sqrt{\sin(x^2+1)}$是由哪几个简单函数复合而成的.

解 $y=\lg\sqrt{\sin(x^2+1)}$是由 $y=\lg u, u=\sqrt{v}, v=\sin w, w=x^2+1$ 四个函数复合而成的.

2. *反函数*

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$的定义域为 X,值域为 Y,如果对 $\forall y\in Y$,由 $y=f(x)$可以解出一个 x 值与 y 对应,这样便得到一个以 y 为自变量、x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$,称函数 $y=\varphi(x)$为 $y=f(x)$的**反函数**,记作 $y=f^{-1}(x)$,$x\in Y$,而 $y=f(x)$称为**直接函数**.

显然,$y=f(x)$,$x\in X$,与 $y=f^{-1}(x)$,$x\in Y$ 互为反函数,f 的定义域、值域分别是 f^{-1}的值域与定义域.

例如,由 $y=f(x)=2x+1$ 得 $x=\dfrac{y-1}{2}$,所以函数 $y=f(x)=2x+1$ 的反函数为 $y=\dfrac{x-1}{2}$.

由定义得:$f^{-1}(f(x))=x$,$f(f^{-1}(x))=x$;在同一坐标系中,反函数 $y=f^{-1}(x)$,$x\in Y$ 与直接函数 $y=f(x)$,$x\in X$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(图 1.5).

利用这种关系,很容易从 $y=f(x)$,$x\in X$ 的图像获得 $y=f^{-1}(x)$,$x\in Y$ 的图像,如图 1.6 为函数 $y=x^3$ 与其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$的图像.

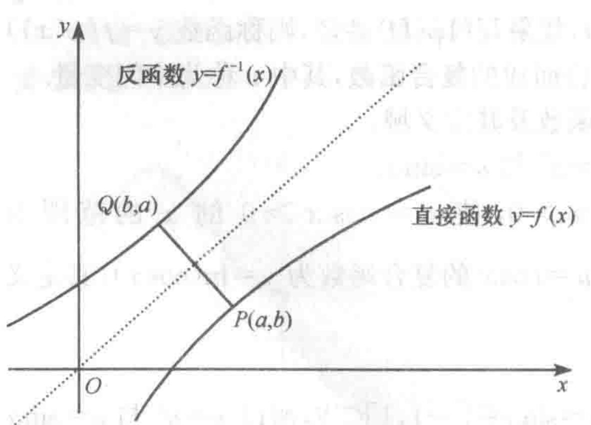

图 1.5

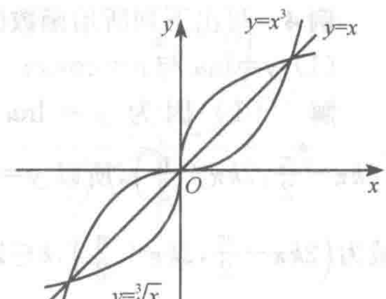

图 1.6

1.2 初 等 函 数

1.2.1 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五类函数统称为**基本初等函数**.

在函数的研究中,基本初等函数起着基础的作用,它的性质对后续学习非常重要,鉴于基本初等函数的性质在中学已详细讲过,下面简要回顾一下.

1. 幂函数:$y=x^{\mu}$(μ 为常数)

幂函数的共性:图像都过点(1,1);在区间$(0,+\infty)$内均有定义. 当 $\mu>0$ 时,在$(0,+\infty)$内幂函数是单调增加的;当 $\mu<0$ 时,在$(0,+\infty)$内幂函数是单调减少的(图 1.7).

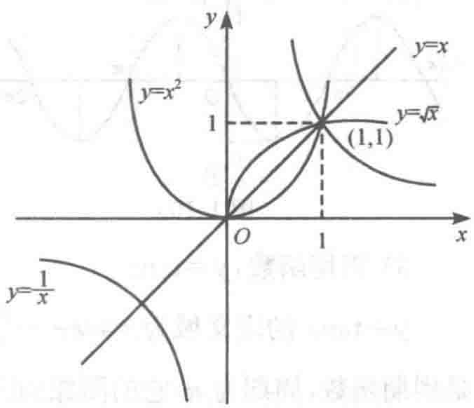

图 1.7

2. 指数函数:$y=a^x$($a>0,a\neq1$)

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,图像总在 x 轴上方,且都过点(0,1).

当 $a>1$ 时,函数是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,函数是单调减少的(图 1.8).

3. 对数函数:$y=\log_a x$($a>0,a\neq1$)

对数函数的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,图像总在 y 轴右侧,且都过点(1,0).

当 $a>1$ 时,函数是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,函数是单调减少的(图 1.9).

对数函数与指数函数互为反函数.

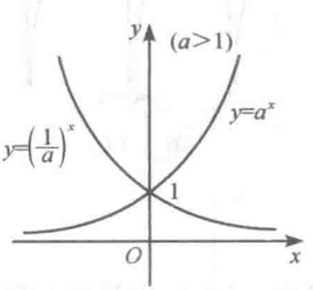

图 1.8

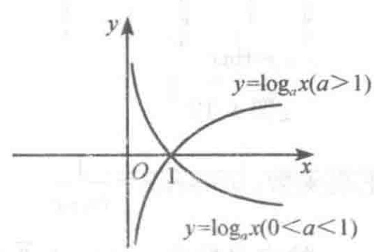

图 1.9

4. 三角函数

1）正弦函数：$y=\sin x$

$y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是奇函数，也是周期函数，周期为 2π，它的图像如图 1.10 所示.

2）余弦函数：$y=\cos x$

$y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是偶函数，也是周期函数，周期为 2π，它的图像如图 1.11 所示.

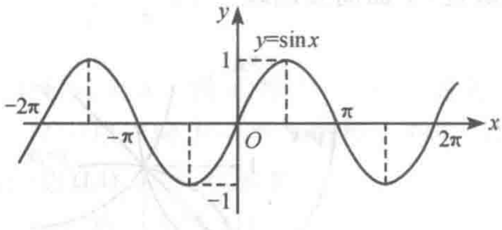

图 1.10

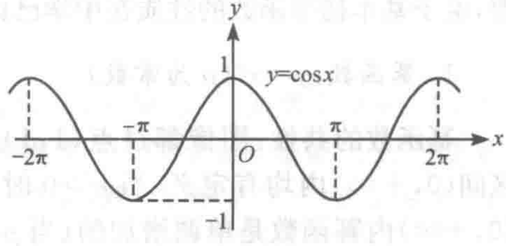

图 1.11

3）正切函数：$y=\tan x$

$y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，也是周期函数，周期为 π，它的图像如图 1.12 所示.

4）余切函数：$y=\cot x$

$y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，也是周期函数，周期为 π，它的图像如图 1.13 所示.

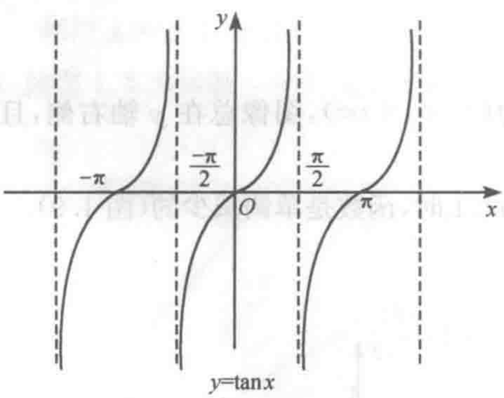

图 1.12

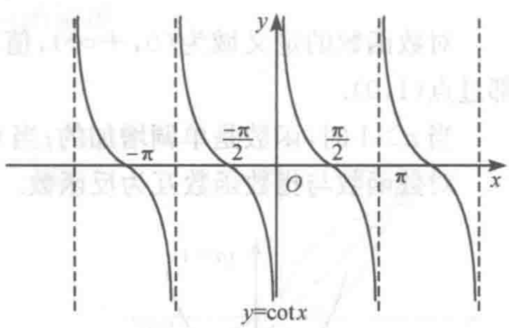

图 1.13

5）正割函数：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

$y=\sec x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $|y|\geqslant 1$，它是偶函数，也是周

期函数,周期为 2π,它的图像如图 1.14 所示.

6) 余割函数:$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

$y=\csc x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$,值域为 $|y|\geqslant 1$,它是奇函数,也是周期函数,周期为 2π,它的图像如图 1.15 所示.

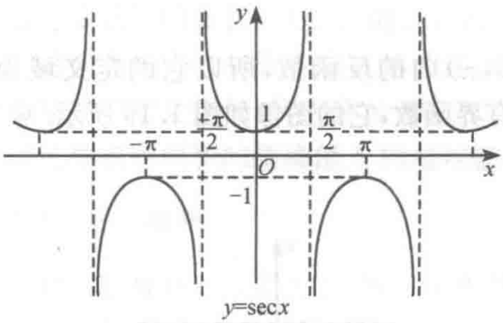

图 1.14

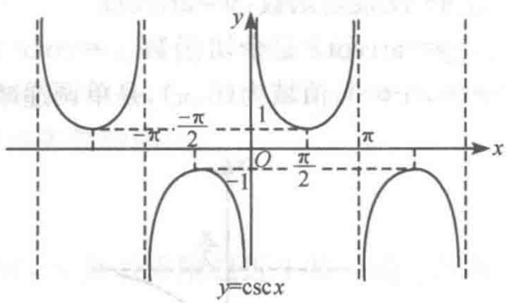

图 1.15

5. 反三角函数

1) 反正弦函数:$y=\arcsin x$

$y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数,所以它的定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,它是奇函数,也是单调递增的有界函数,它的图像如图 1.16 所示.

2) 反余弦函数:$y=\arccos x$

$y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数,所以它的定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,是单调递减的有界函数,它的图像如图 1.17 所示.

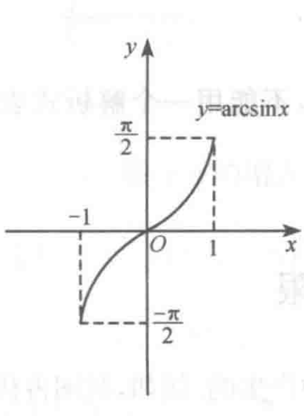

图 1.16

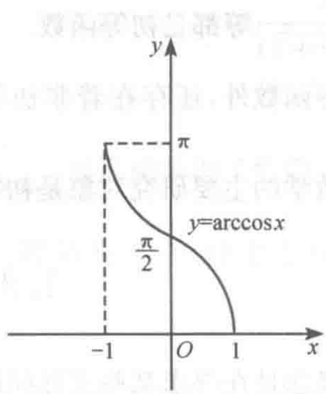

图 1.17

3）反正切函数：$y=\arctan x$

$y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数，所以它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它是奇函数，也是单调递增有界的函数，它的图像如图 1.18 所示.

4）反余切函数：$y=\text{arccot}\,x$

$y=\text{arccot}\,x$ 是余切函数 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 内的反函数，所以它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，是单调递减的有界函数，它的图像如图 1.19 所示.

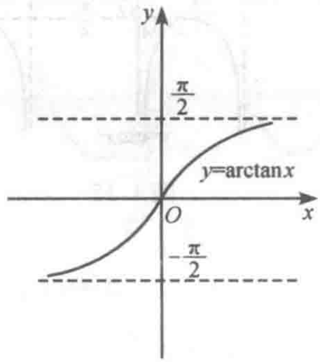

图 1.18

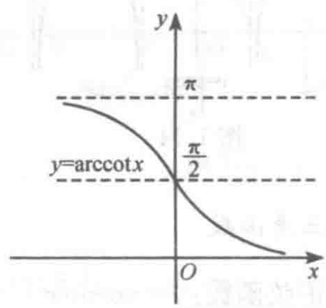

图 1.19

1.2.2 初等函数

由常数和五种基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合而成的函数称为**初等函数**.

例如，$y=\text{arccot}\,x^2$，$y=\frac{P(x)}{Q(x)}$（$P(x)$，$Q(x)$ 均为 x 的多项式），$y=\frac{x^2+a^x}{\lg(x+\sqrt{x^2+3})}$ 等都是初等函数.

除初等函数外，还存在着非初等函数. 例如，不能用一个解析式表示的分段函数.

高等数学的主要研究对象是初等函数.

1.3 极　　限

极限概念是在寻求某些实际问题的精确解中产生的. 例如，我国古代数学家刘徽（公元 3 世纪）利用一系列圆内接正多边形面积来推算圆面积的方法——割圆

术,就是极限思想在几何上的一个应用.

设有一圆,求其面积的精确值 S.具体步骤如下:

先做圆内接正六边形,其面积记为 S_1,再做圆内接正 12 边形,其面积记为 S_2,再做圆内接正 24 边形,其面积记为 S_3……每次边数加倍,循此下去,可得一系列圆内接正多边形面积 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$.

显然,n 越大,S_n 越接近 S,但是无论 n 取多大,只要 n 取定了,S_n 终究只是圆内接正多边形的面积,只是 S 的近似值.可以设想:当 n 无限增大(记为 $n\to\infty$,读作 n 趋向无穷大)时,圆内接正多边形无限接近于圆,此时 S_n 无限接近于 S.正如刘徽所述:"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无失矣."这种求圆面积的精确值 S 的过程就是极限思想的体现.

1.3.1 数列极限

对一般数列 $\{x_n\}$ 要考察:当 n 无限增大时,x_n 是否无限趋近于某一确定的数值? 如果是,如何确定该值?

首先看一实例,考察数列 $\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势(图 1.20).

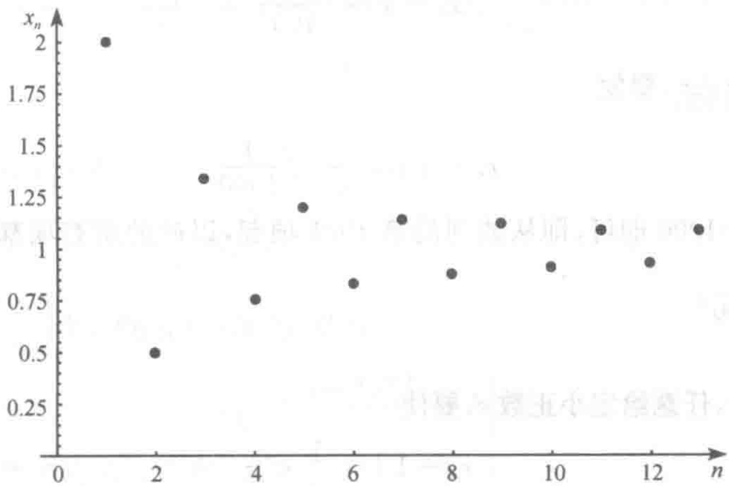

图 1.20

由图 1.20 可见,随着 n 的增大,$x_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 越来越接近于数值 1.以至于 n 无限增大(即 $n\to\infty$)时,$x_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限趋近于 1.数值 1 叫做数列 $\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

一般地,对于数列 $\{x_n\}$ 以常数 A 为极限有如下定义.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com