何斯日古楞　李宏　刘洋　著

发展型偏微分方程的时间间断时空有限元方法

Time Discontinuous Space-Time Finite Element Methods for Evolution Type Partial Differential Equations

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

发展型偏微分方程的时间间断时空有限元方法

Time Discontinuous Space-Time Finite Element Methods for Evolution Type Partial Differential Equations

何斯日古楞　李宏　刘洋　著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书以作者所在科研团队关于间断时间变量的时空有限元方法的研究为基础，以抛物型方程和双曲型方程问题为主要求解对象，为介绍时间间断时空有限元格式的构造，有限元解的存在唯一性、格式的稳定性和收敛性的分析过程而编写. 本书内容包括：绪论、抛物型方程的时间间断时空有限元方法、双曲型方程的时间间断时空有限元方法、Sobolev方程的时间间断时空有限元方法、对流扩散方程的间断时空 H^1-有限元方法、非稳态奇异系数微分方程的时间间断时空有限元方法等.

本书可作为从事科学与工程计算的科技工作者、相关研究人员、研究生以及高年级本科生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

发展型偏微分方程的时间间断时空有限元方法/何斯日古楞，李宏，刘洋著. —西安：西安电子科技大学出版社，2019.1

ISBN 978-7-5606-5150-7

Ⅰ. ① 发… Ⅱ. ① 何… ② 李… ③ 刘… Ⅲ. ① 偏微分方程—有限元法
Ⅳ. ① O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 003021 号

策划编辑 刘小莉
责任编辑 曹 锦 阎彬
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话 (029)88242885 88201467　　邮　　编 710071
网　　址 www.xduph.com　　电子邮箱 xdupfxb001@163.com
经　　销 新华书店
印刷单位 北京虎彩文化传播有限公司
版　　次 2019年1月第1版 2019年1月第1次印刷
开　　本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 10
字　　数 233千字
定　　价 25.00元
ISBN 978-7-5606-5150-7/O

XDUP 5452001-1

前言

在科学和工程计算中，发展方程是用于刻画随时间而变化的状态或过程的一类重要的数学物理偏微分方程，又称为演化方程或进化方程. 随着实际物理问题的日益复杂化，如何求解发展方程成为重要的研究课题. 众所周知，绝大多数情形下，发展方程的解不能用解析公式表达，或者其表达式过于复杂，因而需要采用数值方法求得其近似解. 有限差分方法、有限元方法、有限体积方法和谱方法等都是计算数学工作者、物理学工作者和工程师们常用的数值方法. 随着科学与技术的发展，应用数学和计算数学的不断进步，对数值计算方法也提出了更高的要求：高精度、高分辨率、稳定、平衡耗散色散、保持守恒以及易于编程、占用计算机内存少和节省 CPU 时间等. 为满足解决复杂实际问题对数值格式的高要求，针对不同类型的偏微分方程涌现了多种新型数值格式，单就有限元方法而言，就出现了混合有限元方法、特征和迎风有限元方法、间断有限元方法、时空有限元方法等多种离散方案，尤其是时空有限元方法，该类方法是解决时间依赖问题的一种新型、重要的有限元方法，已被广泛应用于流体力学、热传导、弹性动力学和结构动力学等多个领域. 时空有限元方法是将时间和空间变量统一考虑，在时间和空间两个方向同时发挥(间断)有限元方法的优势，能够实现时间和空间两个变量的高精度、高分辨率离散方案. 时空有限元方法的基础格式有三种：时间和空间都连续、时间允许间断而空间连续以及时间和空间都间断的方法. 目前，国内外研究比较多的是前两种方法. 迄今为止，关于时空有限元方法的专著和书籍并不多见. 近年来，本书作者查阅了大量偏微分方程数值解法，尤其是时空有限元方法的相关文献资料，以时间变量允许间断的时空有限元方法为主，开展时间相关问题的有限元方法研究工作，研究的内容包括标准型、混合型、分裂型等时空离散格式. 本书在试图总结过去研究工作的基础上，详细介绍时空有限元方法，尤其是时间间断时空有限元方法的格式构造、基础理论及数值模拟应用，希望通过本书抛砖引玉，有助于推动时空有限元方法在解决发展方程方面的研究工作，丰富时空有限元方法的数学理论和应用.

本书内容共分为 6 章：第 1 章主要介绍了时空有限元方法的发展历史、基本定义和不等式，以及时间间断时空有限元格式的两种基本框架. 第 2 章介绍抛物型方程的时间间断时空有限元方法. 以二阶线性抛物型方程为例，介绍时间间断时空有限元离散的思路和数值格式构造的方法，同时详细介绍利用 Radau 点处的 Lagrange 插值多项式特性，结合有限差分方法和有限元方法的技巧证明稳定性、收敛性和先验误差估计等理论分析过程，并推广到解决非线性二阶抛物型方程；本章还对二阶抛物型方程构造了时间间断分裂型混合时空有限元格式，对四阶抛物型方程构造了混合间断时空有限元格式，阐述了设计思路和求解算法以及相关的理论分析. 最后通过数值算例对所提出的方法进行数值模拟试验，验证了理论分析的结果. 第 3 章介绍了双曲型方程的时间间断时空有限元方法. 首先介绍波动方程和电报方程的时间间断时空有限元离散化的途径、计算格式的设计和求解算法，理论证

明了其位移项的时空 $L^{\infty}([0,T];L^{2}(\Omega))$-模和 $L^{\infty}([0,T];H^{1}(\Omega))$-模先验误差估计；然后构造了伪双曲型方程问题的分裂型间断时空 H^{1}-混合有限元格式，给出了新型格式的设计和求解算法以及相关理论分析；最后通过数值算例对提出的数值方法的可行性和理论分析结果的可靠性进行了验证. 第 4 章介绍了 Sobolev 方程的时间间断时空有限元方法. 对于线性问题，介绍了时间间断时空有限元离散化的途径、计算格式等，并利用对偶问题的强稳定性结果，证明了时间节点 $H^{1}(\Omega)$-模超收敛估计和时空 $L^{\infty}([0,T];H^{1}(\Omega))$-模最优误差估计；对于非线性 Sobolev 方程，通过时间变量积分构造与其等价的时间间断时空有限元格式，证明了时空 $L^{2}([0,T];L^{2}(\Omega))$-模和 $L^{2}([0,T];H^{1}(\Omega))$-模最优先验误差估计. 最后通过数值算例对提出的方法和理论分析结果进行了验证. 第 5 章介绍了对流扩散问题的间断时空 H^{1}-有限元离散化的途径、计算格式的设计、求解算法以及相应的理论分析，并通过数值算例对构造的方法和理论分析结果进行了验证. 第 6 章在加权 Sobolev 空间意义下讨论了具有奇异系数方程的时间间断时空有限元方法，介绍了离散思路、计算格式设计及其理论分析方法，并通过数值算例对提出的方法和理论分析结果进行了验证.

本书在写作过程中得到了方志朝、高巍、刘金存、赵智慧、魏小溪、王金凤、赵洁等老师和王岩、陈娟等学生的帮助，在这里表示感谢；感谢西安电子科技大学出版社编辑的热心帮助；感谢国家自然科学基金(11501311、11661058、11761053)，内蒙古自然科学基金(2017MS0107、2018MS01020)，内蒙古草原英才，内蒙古自治区高等学校青年科技英才支持计划(NJYT-17-A07)的资助.

由于作者的学识与水平所限，虽然几经改稿，书中的不足仍在所难免，敬请各位同仁与广大读者批评、指正.

作　者

2018 年 10 月

目录 contents

第 1 章 绪论

发展型偏微分方程是指随时间而变化的偏微分方程，又称为演化方程或进化方程[1,2]. 众所周知，科学与工程计算中的许多实际问题都可以用线性或非线性发展型偏微分方程(或方程组)刻画其随时间而变化的状态或过程. 常见的发展型偏微分方程有热传导方程、对流扩散方程、波动方程、流体力学方程组、Schrödinger 方程、KdV 方程等，以及将这些方程通过适当的方式耦合而产生的耦合方程组[1,2]. 然而，绝大多数偏微分方程因其表现形式过于复杂等原因很难得到精确解，因而不得不借助数值手段获其近似解来研究问题，数值求解方法也因此显得非常重要. 随着科学与技术的发展，出现了有限差分方法、有限元方法和谱方法等多种数值方法. 长期以来这些数值方法被数学家、物理学家和工程师们广泛关注，在数学理论和实现等方面被不断地发展和改善.

在上述数值方法中，有限元方法作为数值求解偏微分方程问题的有效方法之一，是 Courant 于 1943 年率先提出的，并随着电子计算机的发展逐步应用到航空和土木工程等领域. 到 20 世纪五六十年代，我国的冯康院士和西方科学家各自独立奠定了有限元方法的数学理论基础，为有限元方法的发展做出了历史性的贡献. 多年来，经过众多数学家进一步的研究和发展，使有限元方法逐渐从工程应用中抽象出来，纳入数学轨道，逐步进行标准和严谨的数学描述，建立完善和牢固的数学基础. 目前，有限元方法已发展成为一种观点统一、理论完善、应用广泛的数值方法. 有限元方法由于对区域的形状有较大的适应性，网格剖分灵活，离散方程的形式规范，便于编制通用的计算机程序，并且以变分原理为基础，降低了对解的光滑性要求，因此得到了迅速的发展，被广泛应用于航空、桥梁、土木工程、石油勘探、天气预报等诸多领域. 近年来，为了更好地求解不同类型的发展型偏微分方程，涌现出了很多基于有限元理论思想的可靠、高效、高精度的数值方法，如混合有限元方法、有限体积(元)方法、间断有限元方法、特征和迎风有限元方法、非协调(混合)有限元方法等. 但是，这些方法通常都只是在空间方向上采用有限元离散，在时间方向上则是利用有限差分方法，很难实现时间精度和空间精度的协调和统一，为此提出了将时间和空间变量统一看待，在时间和空间(简称时空)两个方向上同时使用有限元离散并且具有时间、空间高精度的时空有限元方法.

1.1 时空有限元方法简介

时空有限元方法的发展最早可追溯到 20 世纪 60 年代，最初的思想雏形出现于

Nickell、Sackman 和 Oden 等人的文章[3,4]，随后被不断发展并应用于流体力学、热传导、弹性动力学和结构力学等领域. 时空有限元方法可分为以下三类：① 连续时空有限元方法[5-11]，其特点是有限元空间函数可以在时空两个方向同时连续. ② 时间间断时空有限元方法[12-25]，其特点是有限元空间函数在时间方向允许间断而在空间连续. ③ 时空都间断有限元方法[26-30]，其特点是有限元空间函数在时空两个方向允许同时间断. 目前国内外研究比较多的是前两种方法，而国际上对第三种方法的研究刚起步，主要集中于双曲型问题[26-30]的研究，其理论和数值模拟仍需进一步探讨. 相比于连续时空有限元方法，时间间断时空有限元方法在时间方向上进行有限元逼近时采用了 DG(Discontinuous Galerkin)方法，即在时间剖分节点处，通过引进一个“跳跃项”表示不同时空片之间的数据输运过程，从而也将时空有限元格式转化为各个时空片之间既相互独立又有一定联系的逐“条”求解格式，使其更有利于变网格和自动选择时间步长方法的应用. 因此，时间间断时空有限元方法除了在时间和空间两个方向保持传统有限元方法的优点外，还有其独特的性质[2,22]：

(1) 在非结构网格上，能够生成无条件稳定、高精度隐式格式.

(2) 便于解决具有复杂边界区域的问题(如时间依赖自由边界区域的 Stefan 问题)以及有奇异和时间节点间断的问题.

(3) 利用对偶问题的稳定性和误差估计及 Galerkin 正交性，能够得到有限元解的后验和先验误差估计以及时间节点处的超收敛估计.

(4) 特别是在时间剖分节点上，关于时间变量具有超收敛性质.

(5) 允许独立剖分每个时空片 $I_n\times\Omega$，从而便于网格加密和提高计算精度以及采用大时间步长，即能够方便地利用后验误差估计实现有效的自适应算法.

(6) 通过引进间断捕捉算子，可以提高格式对大梯度变化解的模拟效果.

时间间断时空有限元方法的研究发展于 20 世纪 70 年代后期. 1978 年，Jamet 在参考文献[12]中用时间间断时空有限元方法，在给定的时间依赖边界区域上研究了抛物型方程 $u_t+Au=f$(这里 A 是 2μ 阶微分算子，μ 是正整数)，证明了格式的无条件稳定性，并给出了 $L^2(I_n;L^2(\Omega))$-模误差估计(其中 $I_n=(t^n,t^{n+1}]$). 1979 年，Bonnerot 和 Jamet 在参考文献[13]中利用时间间断时空有限元方法构造了三阶精度的算法，数值模拟一维 Stefan 问题，进一步验证了该方法在求解自由边界区域问题的可行性及有效性. 自 20 世纪 80 年代中期以来，Eriksson、Johnson 和 Thomée 等人在系列文章[18-21,31-36]中广泛地研究了线性、非线性二阶抛物型方程的时间间断时空有限元方法. 参考文献[31]分别在光滑和非光滑初始值情形下，用时间间断时空有限元方法分析了抛物型方程 $u_t+Au=f$(其中 A 是定义域为 Hilbert 空间 H 的自伴、正定线性算子). 当初始值为光滑函数时，参考文献[31]分别证明了时间节点 $O(k^{2q-1})(q<2)$ 及 $O(k^{q+1}\log(1/k))(q\geqslant 2)$ 阶误差估计以及时间最大模 $O(k^q)(q\geqslant 1)$ 阶误差估计；对非光滑初值的齐次方程问题，在 $k_{n-1}\leqslant\gamma k_n$ 条件下，证明了时间节点 $O(k^{2q-1}t^{-(2q-1)})$ 阶误差估计和时间最大模 $O(k^q t^{-q})$ 阶误差估计，并把所得结论应用于半离散的热传导方程，给出了有限元解的 $O(h^{r+1}+k^q)$ 以及时间节点 $O(k^{2q-1}+h^{r+1})$ 和 $O(k^{q+1}\log(1/k)+h^{r+1})$ 误差估计(其中 t 表示某一给定的时刻，k 和 k_n 表示时间步长). 针对(非)线性二阶抛物型方程问题，Eriksson 和 Johnson 等人在系列文章[18-21,31-35]中还详细介绍了基于时间间断时空有限元方法的自动选择空间和时间步长的自适应算法的设计过程，并通过后验误差估计和先验误差估计验证了该算法的可行性和有效性.

上述理论分析的共同特点是：对时空网格施加限制条件 $S_h^n \subset S_h^{n-1}$ 或 $k_n \geqslant ch^2$，并利用离散(或连续)对偶问题的强稳定性估计和 Galerkin 正交性，证明了先验误差估计和后验误差估计. 然而，这种理论分析方法对时空网格限制很强，并且对模型问题自身稳定性要求“强”. 为利用时间间断时空有限元方法求解本身没有“强”稳定性质的模型问题或在非结构网格上求解模型问题，Karakashian 和 Makridakis 于 1998 年在参考文献[23]中用时间间断时空有限元方法求解非线性薛定谔方程时，首次提出有限元与 Lagrange 插值相结合的技巧，即在理论分析时利用时间区间 I_n 上的 Radau 点为节点的 Lagrange 插值多项式及相应的高斯 Radau 积分准则和其高代数精度性质，在弱的时空网格限制条件下证明了有限元解的存在唯一性和 $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$-模最优误差估计. 在国内，陈传淼等人在参考文献[37]中分析了薛定谔方程时间(连续)间断时空有限元格式的守恒性，发现时间间断格式具有电荷近似守恒性，且其误差为 $O(h^{2m+1})$. 基于参考文献[23]的理论分析技巧，参考文献[38]～[44]进一步研究了非线性抛物型方程、对流扩散方程和对流占优 Sobolev 方程的时间间断时空有限元方法，证明了有限元解的存在唯一性以及 $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$-模和 $L^\infty([0, T], H^1(\Omega))$-模最优误差估计. 参考文献[45]、[46]将时间间断时空有限元方法与混合元思想结合，将其应用推广到四阶抛物型方程问题，给出了近似解和中间量的收敛性、稳定性等的证明. 参考文献[47]～[49]将时间间断时空有限元方法与 H^1－Galerkin 混合有限元方法结合，研究了 Sobolev 方程问题的混合格式，利用不动点定理证明了有限元解的存在唯一性，并引入时间、空间投影算子和时空投影算子，在对偶问题的稳定性分析的基础上，给出了 $L^\infty([0, T], H^1(\Omega))$-模先验误差估计. 虽然与混合元思想结合的间断时空有限方法能同时高精度逼近解本身和中间变量，但在计算量方面却付出了一定的代价——使用较大量的 CPU 时间和存储空间. 为克服混合间断时空有限元方法的这一困难，参考文献[50]首次将分裂技巧[51]和时间间断时空有限元方法结合，研究了二阶抛物型方程，并通过收敛性分析和数值实验验证了所提出格式的可行性. 这种方法在数值计算方面不仅同时发挥时空有限元和混合有限元两种方法的优势，而且将求解辅助变量的离散子系统从原来的位移和辅助变量的耦合方程组系统中分裂出来，使其允许各自独立地进行高精度求解，从而在一定程度上降低了原问题的求解难度和规模，并且放宽了有限元空间的选择要求.

自 20 世纪 80 年代后期，Hulbert 和 Hughes 等人在二阶双曲型问题上率先取得了一些重要成果. 他们针对弹性动力学问题，从更自然的二阶双曲型方程出发提出了“双场”和“单场”两种时间间断时空有限元方法.“双场”时间间断时空有限元格式允许位移与速度独立插值(然而“单场”格式仅对位移插值)，各个时空单元块之间的位移和速度的连续性可以弱满足，并且主要是通过应变能内积的方法使位移连续. 与此同时，格式中还引入了在精确解中恒为零的最小二乘项[15,16]及非线性间断捕捉算子[16]来增加格式的稳定性，并且控制由于材料突然变化及出现冲激而引起的数值振荡，但未在方程解的光滑区域内降低精度. 他们还为所提出的方法做了理论分析，证明了格式的无条件稳定性并给出了两种格式的误差估计[15,16]. 随后，Hulbert[17]将时间间断时空有限元方法的应用推广到结构动力学问题，分别分析了只逼近位移的“单场”格式和同时独立逼近位移与速度的“双场”格式的无条件稳定性以及收敛性. 进一步地，从有限差分的角度分析了格式的稳定性、耗散性及收敛性，得出的算法使不需要的失真的高频反应渐近消除，又不引起低频域内过大的数值耗散，还表现出

较小的数值漂移. 因此，这是一族求解二阶常微分方程组的无条件稳定的具有高阶精度的算法. 随后，于开平等人[52-55]将结构动力学问题转换到状态空间中去研究，并进一步验证了时间间断有限元方法求解结构动力学等问题的优越性. Chen 等人[56]将时间间断时空有限元方法的应用进一步推广到饱和多孔介质的动态分析问题. Idesman[57]讨论了线性弹性动力学问题的时间(连续)间断时空有限元格式在结构和无结构时空网格上的收敛性. 在参考文献[22]中，Johnson 研究了二阶波动方程的时间间断时空有限元方法，采用线性多项式同时逼近位移与速度并且在离散空间 S_h^n 的变化不是很频繁的前提下，给出了位移项关于 $L^2(\Omega)$-模 $O(h^2k^{-1/2}+k^3)$阶先验误差估计和 $O(h^2+k^3)$阶后验误差估计，以及能量模 $O(hk^{-1/2}+k^3)$阶先验误差估计和 $O(h+k^3)$阶后验误差估计. 参考文献[22]从理论分析的观点指出：二阶波动方程的时间间断有限元格式不需要额外引入最小二乘项. 对二阶波动方程问题，French[58]还利用加权内积和时间间断有限元方法建立了一种时空有限元格式，讨论了格式对时空导数项的能量模误差估计，并且采用分片线性多项式做数值实验，验证了理论分析的结果. 参考文献[59]、[60]在时间离散区间内利用 Radau 点处 Lagrange 插值多项式的特性，有限差分方法和有限元方法相结合的技巧，去掉对时空网格的限制条件，研究了弹性动力学方程和电报方程的“双场”格式，证明了离散解的存在唯一性和时间最大模、空间 $L^2(\Omega)$-模最优误差估计. 参考文献[61]利用伪双曲型方程的特征，将 H^1-Galerkin混合有限元方法和时间间断有限元方法相结合，构造了一种分裂型间断 H^1-混合有限元格式，并分析了近似解和辅助变量的最优收敛性. 参考文献[61]所提出的方法在一定程度上降低了原问题的求解难度和规模，并且使有限元空间的选择变得更宽松，同时发挥了 H^1-Galerkin 混合有限元方法和时间间断有限元方法的优势.

发展型积分-微分方程广泛地应用在具有记忆性的材料中的热传导、气体扩散、核反应动力学、黏弹性力学以及人口动力学等多种领域. 方程中的积分项的出现(来源于物理过程的记忆或反馈性质)使其与传统的抛物(双曲)型方程有着本质的区别，数值求解也更加困难. 因此，对此类方程的数值研究是非常有价值的. Larsson 等人在参考文献[62]中首次将时间间断时空有限元方法应用于一般的积分-微分方程，利用对偶问题的稳定性证明了具有光滑积分核和光滑初始值问题的误差估计，给出了节点 $O(h^{r+1}+k^{q+1})$阶误差估计. 特别地，当利用线性分片多项式逼近时，在剖分节点处有 $O(h^{r+1}+k^3)$阶超收敛现象. 参考文献[62]还从理论分析的角度指出：通过适当地调整时间步长，时间间断时空有限元方法能够处理具有奇异积分核或非光滑初始值问题解中的奇异点. 基于参考文献[23]的思想，参考文献[63]～[65]分别讨论了非线性对流占优微分-积分方程和(非)线性积分-微分方程初边值问题的时间间断时空有限元方法，利用有限差分方法和有限元方法相结合的技巧，证明了有限元解的存在唯一性和 $L^\infty([0,T],L^2(\Omega))$-模最优阶误差估计. 进一步地，参考文献[66]、[67]将时间间断时空有限元与混合元结合，将其应用推广到四阶抛物型积分-微分方程问题.

奇异方程，特别是非线性奇异方程广泛应用在核物理、气体动力学、流体力学、边界层理论、非线性场和非线性光学等诸多领域. 还有热传导问题、离子体极化现象中的猝灭问题以及概率中描述布朗运动和随机过程的微分方程等，都归结为奇异抛物型方程. 但是，由于奇异性产生困难，这类问题的理论及数值分析一直没有得到很好的研究. 直到 1981 年，著名数值分析家 Thomée 首先提出要深入探讨奇异问题的有限元方法以来，国内外学者对此

问题的有限元方法展开了广泛的研究. 参考文献[68]、[69]首次利用时间间断时空有限元方法分析了二维奇异抛物型问题，给出了有限元解及其跳跃项的加权 Sobolev 空间模意义下的误差估计. 进一步地，参考文献[70]、[71]分别利用将有限差分和有限元方法相结合的技巧，以及基于对偶问题的稳定性估计的技巧，讨论了一维奇异抛物型问题的时间间断的时空有限元方法的收敛性.

因为时间间断时空有限元方法格式独特的优越性，最近在最优控制等研究领域也获得迅速发展. 近年来，Meidner 和 Vexler 等人在他们的一系列文章[72−75]中广泛地研究了抛物型方程最优控制问题的时间间断时空有限元方法，给出了先验估计和后验估计的理论证明，构造了一种自适应时空网格局部加密算法. 参考文献[76]进一步研究了具有逐点控制约束条件的发展型 Navier－Stokes 方程分布式最优控制问题的时间零次间断多项式时空有限元方法，并在对时空网格有限制的条件下证明了 $L^2(\Omega)$-模 $O(h)$阶收敛性. 在国内，Liu 等人在参考文献[77]中利用时间间断时空有限元方法数值求解了抛物型最优控制问题，在时空网格弱限制的条件下给出了后验误差估计，并改进了具有障碍等约束控制问题数值解的收敛性. Hou 等人在参考文献[78]中针对线性抛物型方程最优控制问题给出混合间断有限元格式，并对空间低阶 $R-T$ 混合有限元证明了先验误差估计，进一步在静态网格剖分假设下证明了 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$-模后验误差估计.

近年来，分数阶微分方程的研究成为国际学术界的一个研究热点，已被广泛应用于黏弹性力学、动力学、控制论、统计和生物科学等领域. 相比于整数阶微分算子，分数阶微分算子能够更准确地描述具有历史记忆性和空间整体域相关性的力学与物理过程，而且分数阶导数建模简单，参数的物理意义清晰. 然而，分数阶微分方程的解析解更难求得. 因此，分数阶微分方程的数值解法研究受到了计算科学界的广泛关注，并得到了迅速发展. Mclean 和 Mustapha 在他们的系列文章[79−83]中研究分数阶微分方程问题的时间变量间断时空有限元方法，分析了时间基函数为分段常数(即改进的 Eular 格式)与线性多项式时 $L^2([0, T]; L^2(\Omega))$-模和 $L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))$-模误差估计. 进一步地，在参考文献[84]中利用对偶问题的稳定分析和讨论了时空有限元空间基函数为时间分段线性间断多项式、空间分段线性连续多项式的情形下，分数阶微分方程初边值问题的间断时空有限元格式的在时间节点处的超收敛性. Zhou 和 Zhang[85] 利用时间基函数为分段常数(即改进的 Eular 格式)的时间间断时空有限元方法求解了时间分数阶最优控制问题. Liu、Yan 和 Khan[86] 讨论了空间分数阶微分方程问题的时间间断时空有限元格式，证明了逼近函数关于时间变量为分段常数时得到的 $O(h^{r-\alpha}+k_n)$阶和分段线性多项式时得到的 $O(h^{2(r-\alpha)}+k_n^3)$阶的收敛性. 参考文献[87]～[89]利用参考文献[23]的思想，即有限差分和有限元方法相结合的技巧，研究了空间分数阶微分方程问题的时间间断时空有限元方法，证明了 $L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))$-模误差估计.

时间间断时空有限元方法允许每个时空片的剖分互相独立，从而易于网格加密和高精度处理边界点，即易于实现自适应算法. Thompson 和 He 在参考文献[90]中结合时间间断时空有限元方法和高精度无反射边界条件，研究了无界区域上的波动方程的自适应算法. 在数值计算中，他们利用基于 Zienkiewicz－Zhu 空间误差估计、时间节点跳跃项误差估计和辅助边界函数建立 h 自适应时空准则，利用稀疏多层迭代法求解了离散方程. Schmich 和 Vexler 在参考文献[91]中给出了一种后验误差估计子，构造了求解抛物型方程的自适应

算法. 这种后验误差估计子具有一定的物理意义，它允许运动网格局部加密，并且分离了时间和空间变量离散对误差的影响. Hauke 和 Doweidar 在参考文献[92]中研究了对流扩散反应方程的基于时间间断有限元的亚网格尺度稳定化方法，并分析了 Fourier 稳定性. 更多关于 hp 型间断时空有限元方法和稳定化时空有限元方法的研究请参阅参考文献[15]、[72]、[93]～[95]等.

时间间断时空有限元方法虽然在时空两个方向同时发挥有限元方法的优势，能够实现格式的无条件稳定和高计算精度，但是其所生成的格式为隐式格式，基函数关于时间间断、空间连续，因而在每个时间片内时间间断时空有限元格式所生成的方程组比标准有限元方法所生成的方程组大一倍或几倍. 尤其在求解耦合问题时，这一情形比较显著，加大了求解难度和计算量. 因此，如何设计精度足够高又能够降低计算量的有效算法便显得十分重要. Hulbert 和 Hughes 等人最初利用时间间断时空有限元方法求解弹性动力学和结构动力学问题时，就提出了一种预估-多步校正算法[16]. 目前，Chien[96,97]、Thompson[98]、Li[99-101]等许多学者针对二阶双曲型方程问题提出了时间间断有限元方法的很多实用的预估-校正和迭代算法. 降低时空有限元方法计算量的另一途径就是通过重构合适的基函数，降低空间维数. 特征投影分解(Proper Orthogonal Decomposition，POD)方法是一种有效逼近大量数据的高效降维方法. 国内主要由罗振东教授等人将 POD 方法与有限元方法、有限体积元方法、有限差分方法，特别是与混合有限元方法相结合研究了抛物型方程[102-105]、对流扩散方程[106-108]、双曲型方程[109, 110]、Navier - Stokes 方程[111]和 Boussinesq 方程[112]等，并分析降维格式的误差、算法和数值算例来说明格式的可行性. 国外 Bauman 等人在参考文献[113]中研究了参数方程的 POD 时空 Galerkin 方法. Akman 在参考文献[114]中将 POD 方法应用于对流反应扩散方程的间断时空 Galerkin 方法，分析了间断能量范数、间断椭圆投影和时空投影下的 POD 截断误差，并给出了降维解和精确解间的误差估计. 国内的罗振东教授[115]还给出了热传导方程基于POD方法的降维连续时空有限元外推迭代格式，并分析了降维解的误差估计. 此外，Rovas、Machiels、Maday[116]和 Yano[117]分别对抛物型方程问题与 Boussinesq 方程详细讨论了基于缩减基(Reduced - Basis)方法的时间间断时空有限元方法，并做了算法的后验误差分析.

除了以上介绍的时间间断时空有限元方法，还有基于时间间断时空有限元格式的带有各种修正项的流线-扩散方法(Streamline Diffusion Method)、特征线流线扩散方法等[2,118]，此处不再详述.

1.2 基本概念及不等式

设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧式空间，Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n$. 用 $L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p<\infty)$表示一切定义在 Ω 上的 p 次可积函数组成的集合，$L^\infty(\Omega)$表示一切定义在 Ω 上的本性有界(即除去一个零测度集外是有界)可测函数组成的集合，并赋予范数

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\quad(1\leqslant p<\infty)$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|\quad(p=\infty)$$

并且当 $p=2$ 时，用 $(\cdot,\cdot)$表示 $L^2(\Omega)$空间上的内积，且定义为

$$(u,\ v)=\int_{\Omega} uv\mathrm{d}x \quad (\forall u,\ v\in L^2(\Omega))$$

设函数 u 的偏导数记为

$$D^{\alpha}u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

其中，$\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$ 称为 n 重指标；$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ 是非负整数，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

定义 1.1　设 $C_0^{\infty}(\Omega)$为支集是 Ω 中紧集的无穷次可微函数的集合，$L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$为区域 Ω 上的 Lebesgue 局部可积函数空间，$u\in L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$. 如果存在 $v\in L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$，使得

$$\int_{\Omega} v\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} uD^{\alpha}\varphi\mathrm{d}x \quad (\forall \varphi\in C_0^{\infty}(\Omega))$$

则称 v 是 u 的一个$|\alpha|$ 阶广义导数，并记 $v=D^{\alpha}u$.

定义 1.2　设 m 为非负整数，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$定义为

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega):\ D^{\alpha}u\in L^p(\Omega),\ |\alpha|\leqslant m\}$$

赋予范数

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p\Big)^{1/p} \quad (1\leqslant p<\infty)$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \quad (p=\infty)$$

赋予半范数

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\Big(\sum_{|\alpha|=m}\|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p\Big)^{1/p} \quad (1\leqslant p<\infty)$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}=\max_{|\alpha|=m}\|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \quad (p=\infty)$$

令 $W_0^{m,p}(\Omega)=\{u\in W^{m,p}(\Omega):\ D^{\alpha}u|_{\partial\Omega}=0,\ |\alpha|\leqslant m\}$，其中$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界. 当 $p=2$ 时，将 $W^{m,p}(\Omega)$和 $W_0^{m,p}(\Omega)$分别记作 $H^m(\Omega)$和 $H_0^m(\Omega)$. 又显见 $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$，$H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$. 在不引起混淆时，简记$\|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)}$为$\|\cdot\|_m$；特别地，当 $m=0$ 时，简记$\|\cdot\|_0$为$\|\cdot\|$.

定义 1.3　有限维 Hilbert 向量空间$(\boldsymbol{X})^q$ 上定义内积

$$((\boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{\Psi}))=\sum_{i=1}^{q}(\phi_i,\ \psi_i) \quad (\boldsymbol{\Phi}=(\phi_1,\ \cdots,\ \phi_q)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\Psi}=(\psi_1,\ \cdots,\ \psi_q)^{\mathrm{T}}\in(\boldsymbol{X})^q)$$

相应的范数 $\Big(\sum_{i=1}^{q}\|\psi_i\|^2\Big)^{1/2}$ 记为$|||\cdot|||$，$\Big(\sum_{i=1}^{q}\|\psi_i\|_1^2\Big)^{1/2}$ 记为$|||\cdot|||_1$.

定义 1.4　设 ℓ，m 为非负整数，则时空域上的 Sobolev 空间 $H^{\ell}(J;H^m(\Omega))$和 $L^{\infty}(J;\ H^m(\Omega))$分别定义为

$$H^{\ell}(J;H^m(\Omega))=\left\{u\in H^m(\Omega):\ \int_J\sum_{i=0}^{\ell}\left\|\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}u(x,\ t)\right\|_m^2\mathrm{d}t<\infty\right\}$$

$$L^{\infty}(J;H^m(\Omega))=\{u\in H^m(\Omega):\ \operatorname{ess\,sup}_J\|u(x,\ t)\|_m<\infty\}$$

并赋予范数

$$\|u\|_{H^{\ell}(J;H^m(\Omega))}=\left(\int_J\sum_{i=0}^{\ell}\left\|\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}u(x,\ t)\right\|_m^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\|u\|_{L^{\infty}(J;H^m(\Omega))}=\max_J\|u(x,\ t)\|_m$$

特别地，当 $J=I_n=(t^n, t^{n+1}]$ 时，简记 $\|u\|_{L^2(I_n;H^m(\Omega))}=|||u|||_{m,n}$；当 $m=0$ 时，简记 $|||u|||_{0,n}=|||u|||_n$.

定义 1.5 设 $v^n=v(\cdot, t^n)(0\leqslant n\leqslant N)$. 定义函数 v 的单边极限为

$$v^{n+}=\lim_{s\to 0,\ s>0} v(x, t^n+s)\quad (0\leqslant n\leqslant N-1)$$

$$v^{n-}=\lim_{s\to 0,\ s<0} v(x, t^n+s)\quad (0\leqslant n\leqslant N)$$

进而定义相应的跳跃函数为

$$[v^n]=v^{n+}-v^{n-}\quad (1\leqslant n\leqslant N-1)$$

Hölder 不等式 设 $1\leqslant p, q\leqslant +\infty$，且满足 $1/q+1/p=1$，则对于任意的 $f\in L^p(\Omega)$ 和任意的 $g\in L^q(\Omega)$，有

$$\int_\Omega |fg|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_\Omega |f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，有 Cauchy - Schwarz 不等式

$$\int_\Omega |fg|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_\Omega |f|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |g|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Young 不等式 设 a，b 为正实数，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$ab\leqslant \varepsilon a^2+\frac{b^2}{c_\varepsilon}$$

其中，ε 任意小而 c_ε 任意大.

Poincaré 不等式 设 $\Omega\in\mathbb{R}^n$ 为有界区域，$\Gamma\subset\partial\Omega$，$\mathrm{meas}(\Gamma)>0$，则存在常数 $c=c(\Omega)>0$，使得

$$\|u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}\leqslant c\left(|u|_{W^{1,p}(\Omega)}+\left|\int_\Gamma u\,\mathrm{d}s\right|\right)\quad (u\in W^{1,p}(\Omega),\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$$

特别地，当 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 时，此不等式给出了 $W^{1,p}(\Omega)$ 空间中范数 $\|\cdot\|_{1,p}$ 与半范数 $|\cdot|_{1,p}$ 的等价性，此时有

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant c\,|u|_{W^{1,p}(\Omega)}\quad (u\in W^{1,p}(\Omega),\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$$

Green 公式 (1) 当 $u\in H^2(\Omega)$ 和 $v\in H^1(\Omega)$ 时，有

$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量；∇u 为 u 的梯度，$\Delta u=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

(2) 当 $v\in H^1(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\phi}\in H(\mathrm{div};\Omega)$ 时，有

$$\int_\Omega v\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega \nabla v\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} v\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

其中，$H(\mathrm{div};\Omega)=\{\boldsymbol{\phi}\in(L^2(\Omega))^n;\ \nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\in L^2(\Omega)\}$，$\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}=\mathrm{div}\boldsymbol{\phi}$ 为向量函数 $\boldsymbol{\phi}$ 的散度.

本书仅仅列出一些基本定义和不等式、Sobolev 空间及相关性质，更多详细的内容请参阅相关书籍和专著[119-127]. 另外，本书中用 C 和 c 表示与时空网格剖分长度无关的一般正常数，在不同的地方所代表的值可能不同.

1.3 时间间断时空有限元格式基本框架

设 H 是 Hilbert 空间，H^* 是 H 的对偶空间. A 是定义域 $\mathbb{D}(A)\subset H$ 的自半、正定的

连续(或离散)算子，且具有紧的逆算子. B 是边界算子(如可取为 Dirichlet 边界条件或 Neumann 边界条件等). 为简单起见，以如下抽象的模型问题

$$\begin{cases} u_t + Au = f(x, t) & (t \in [0, T],\ x \in \Omega) \\ Bu = 0 & (t \in [0, T],\ x \in \partial\Omega) \\ u(0) = u_0 & (x \in \Omega) \end{cases} \tag{1.3.1}$$

为求解对象来介绍时间间断时空有限元方法.

首先对时间区间$[0, T]$离散. 设 $0=t^0<t^1<\cdots t^N=T$, $I_n=(t^n, t^{n+1}]$, $(n=0, \cdots, N-1)$. $k_n=t^{n+1}-t^n$ 表示时间步长，$k=\max\{k_n, 0\leqslant n\leqslant N-1\}$. 定义时空片 $Q^n:=\Omega\times I_n$，并且在每个时空片 Q^n 内，设 $T_h^n=\{\tau\}$是空间区域Ω 的一种拟一致剖分，h_τ 表示单元 τ 的长度，$h_n=\max\{h_\tau, \tau\in T_h^n\}$, $h=\max\{h_n, 0\leqslant n\leqslant N-1\}$. 每个时空片 Q^n 的剖分可以不相同，即 T_h^n 和 T_h^{n-1} 在界面 $t=t^n(n=1, 2, \cdots, N-1)$上可以取不同的节点.

然后建立有限元空间. 对时空片 $I_n\times T_h^n(0\leqslant n\leqslant N-1)$，定义有限元空间 S_h^n 如下:

$$S_h^n=\{\psi\in H: \psi|_\tau\in P_r(\tau), \tau\in T_h^n\}$$

其中，$P_r(\tau)$表示单元 τ 上关于变量 x 的次数不超过 r 的多项式集合. 记 t^0 对应的空间为 S_h^{-1}. 为简单起见，置 $S_h^{-1}=S_h^0$. 设 q 是一个给定的正整数，令 V_{hk} 表示由分块多项式 v: $\Omega\times[0, T]\to\mathbb{R}$ 组成的空间

$$V_{hk}=\left\{v: v|_{I_n\times\Omega}=\sum_{j=0}^{q-1}t^j\psi_j(x), \psi_j(x)\in S_h^n\right\}$$

由空间 V_{hk} 的定义可知，对 $\forall\, t\in I_n$，函数 v 是 S_h^n 中关于变量 x 的次数不超过 r 的连续多项式；而对 $\forall\, x\in\Omega$，v 是关于时间变量 t 的 $q-1$ 次分片多项式，并且在时间剖分节点 t^n $(n=1, \cdots, N-1)$处允许间断. 进一步地，定义

$$V_{hk}^n=\{v|_{I_n\times\Omega}: v\in V_{hk}\}$$

则由空间 V_{hk}^n 的定义可知，$v^n=v^{n-}$.

设函数空间 $D([0, T]; C^\infty(\Omega)):=\{\phi: \phi\in C^1([0, T]; C^\infty(\Omega)), \phi(T)=0\}$，则用 $\phi\in D([0, T]; C^\infty(\Omega))$乘式(1.3.1)的两端并在时空域$[0, T]\times\Omega$ 上积分后：求 $u\in L^2([0, T]; H)\cap H^1([0, T]; H^*)$，使得 $u(0)=u_0$ 且

$$-\int_0^{t^N}(u, \phi_t)\mathrm{d}t+\int_0^{t^N}A(u, \phi)\mathrm{d}t=(u, \phi(0))+\int_0^{t^N}(f, \phi)\mathrm{d}t \tag{1.3.2}$$

其中，双线性形 $A: H\times H\to\mathbb{R}$ 由$(Av, w)=A(v, w)$生成且正定连续，即

$$|A(v, w)|\leqslant c\,\|v\|_H\,\|w\|_H \quad (\forall v, w\in H)$$

$$A(v, v)\geqslant c\,\|v\|_H^2 \quad (\forall v\in H))$$

用函数 $U\in V_{hk}$ 替换弱形式 (1.3.2) 左端第一项中的 u，得

$$-\int_0^{t^N}(U, \phi_t)\mathrm{d}t=-\sum_{n=0}^{N-1}\left((U, \phi)\Big|_{t^n}^{t^{n+1}}-\int_{I_n}(U_t, \phi)\mathrm{d}t\right)$$

$$=\int_0^{t^N}(U_t, \phi)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{N-1}([U^n], \phi^n)+(U^{0+}, \phi^0)$$

其中，$\phi^n=\phi(\cdot, t^n)\in D([0, T]; C^\infty(\Omega))$.

问题式(1.3.1) 的时间间断时空有限元的格式Ⅰ：求 $U\in V_{hk}$，使得

$$\int_0^{t^N} [(U_t, \phi) + A(U, \phi)]\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{N-1}([U^n], \phi^{n+}) + (U^{0+}, \phi^{0+})$$
$$= (u_0, \phi^{0+}) + \int_J (f, \phi)\mathrm{d}t \quad (\forall \phi \in V_{hk}^n, n = 0, 1, \cdots, N-1) \tag{1.3.3}$$

由于 $\phi \in V_{hk}^n$ 在各个子区间 I_n 内是相互独立的，故在区间 $I_n = (t^n, t^{n+1}]$ 内相应地有

$$\int_{I_n} [(U_t, \phi) + A(U, \phi)]\mathrm{d}t + ([U^n], \phi^{n+}) = \int_{I_n} (f, \phi)\mathrm{d}t \quad (\forall \phi \in V_{hk}^n) \tag{1.3.4}$$

注 1.1 格式Ⅰ中跳跃项 $([U^n], \phi^{n+})$ 表示不同时空片之间的数据输运过程，也体现了该方法在时间节点 $t^n (0 \leqslant n \leqslant N-1)$ 处允许间断的特点.

进一步地，对格式 (1.3.4) 等号左端第一项关于时间变量 t 分部积分后，可得与其等价的格式Ⅱ：求 $U \in V_{hk}$，使得

$$(U^{n+1}, \phi^{n+1}) + \int_{I_n} [-(U, \phi_t) + A(U, \phi)]\mathrm{d}t = (U^n, \phi^{n+}) + \int_{I_n} (f, \phi)\mathrm{d}t \tag{1.3.5}$$

在格式I的基础上，目前还发展了带有各种修正项的流线-扩散方法(Streamline Diffusion Method)、特征线流线扩散法[2,118]，以及 hp 型间断 Galerkin 有限元方法[93]等格式.

当 $q=1$ 时，逼近函数 U 是关于时间变量 t 的分块常值函数，故在时间区间 I_n 内 $U_t \equiv 0$ 和 $U(t) = U^{n+1} = U^{n+}$. 于是格式Ⅰ、Ⅱ化简为改进的向后 Euler 格式：

$$(U^{n+1}, \psi) + k_n A(U^{n+1}, \psi) = (U^n, \psi) + \left(\int_{I_n} f(t)\mathrm{d}t, \psi\right) \quad (\forall \psi \in S_h^n)$$

或者

$$(I + k_n A)U^{n+1} = U^n + \int_{I_n} f(t)\mathrm{d}t$$

进而，还可以写成

$$\bar{\partial}_t U^{n+1} + AU^{n+1} = \frac{1}{k_n}\int_{I_n} f(t)\mathrm{d}t$$

其中，$\bar{\partial}_t U^{n+1} = \dfrac{U^{n+1} - U^n}{k_n}$.

当 $q=2$ 时，逼近函数 U 是关于时间变量 t 的分块线性多项式函数. 在时间区间 I_n 内，设 $U(t) = U_0 + U_1(t - t^n)/k_n$，$\phi = \psi + \eta(t - t^n)/k_n$. 于是格式Ⅰ、Ⅱ化简为求 U_0、$U_1 \in S_h^n$ 使得

$$(U_0, \psi) + k_n A(U_0, \psi) + (U_1, \psi) + \frac{k_n}{2}A(U_1, \psi) = (U^n, \psi) + \left(\int_{I_n} f(t)\mathrm{d}t, \psi\right) \quad (\forall \psi \in S_h^n)$$
$$\frac{k_n}{2}A(U_0, \eta) + \frac{1}{2}(U_1, \eta) + \frac{k_n}{3}A(U_1, \eta) = \left(\frac{1}{k_n}\int_{I_n} (t - t^n)f(t)\mathrm{d}t, \eta\right) \quad (\forall \eta \in S_h^n)$$

这里逼近函数 U 还可以表示成线性 Lagrange 多项式：

$$U(t) = \frac{t^{n+1} - t}{k_n}U_0 + \frac{t - t^n}{k_n}U_1$$

对于 $q > 2$ 的更一般情形，请参阅参考文献[2].

基于格式Ⅰ，Eriksson、Johnson 和 Thomée 等人在系列文章[18-21]中，利用对偶问题的强稳定性估计和 Galerkin 正交性系统地分析了抛物型方程的时间间断时空有限元收敛性. 基于格式Ⅱ，Karakashian 和 Makridakis 于 1998 年在参考文献[23]中利用有限差分和