大学物理复习精要

马春兰　臧涛成　程新利　葛丽娟
毛红敏　时善进　孙　坚　沈娇艳　编著

南京大学出版社

大学物理复习精要

马春兰　臧涛成　程新利　葛丽娟
毛红敏　时善进　孙　坚　沈娇艳　编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理复习精要 / 马春兰等编著. — 南京 ：南京大学出版社，2019.1

ISBN 978 - 7 - 305 - 21552 - 0

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①物理学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 012324 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　　邮编　210093
出 版 人　金鑫荣

书　　名　**大学物理复习精要**
编　　著　马春兰　臧涛成　程新利　葛丽娟　毛红敏　时善进　孙　坚　沈娇艳
责任编辑　甄海龙　王南雁　　　　编辑热线 025 - 83592146

照　　排　南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷　南京玉河印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　印张 14.25　字数 350 千
版　　次　2019 年 1 月第 1 版　　2019 年 1 月第 1 次印刷
ISBN　978 - 7 - 305 - 21552 - 0
定　　价　36.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njuyuexue
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

大学物理是高等学校非物理类理工科专业的基础课程.本书是按马文蔚、周雨青主编的《物理学教程》第三版各章顺序编写,每章分基本要求、内容提要、典型例题、习题选讲和综合练习五个部分.基本要求部分简明扼要地指出每章应该掌握、理解与了解的内容,内容提要部分系统概括和总结了本章的主要内容和知识点,典型例题部分则精选了教材以外的具有典型意义的题目讲解,习题选讲部分题目均为教材课后习题(为使用方便,题号与《物理学教程》相应各章习题题号一致).典型例题和习题选讲两部分所选例题力求内容丰富、难度适当并能覆盖主要知识点.

本书具有一定的通用性,可作为理工科院校相关各专业大学物理课程的教学辅导参考.

本书编写分工如下:第一、二章由孙坚编写,第三、四章由马春兰编写,第五、六章由臧涛成编写,第七、八章由时善进编写,第九、十章由葛丽娟编写,第十一、十二章由沈娇艳编写,第十三、十四章由毛红敏编写,第十五、十六章由程新利编写.全书由臧涛成修订并统稿.

本书编写过程参考了同类教学辅导书以及其他形式的资料,在此不便一一列举,编者在此表示歉意并衷心感谢.

本书在出版过程中得到了苏州科技大学数理学院、南京大学出版社的大力支持,在此编者一并表示诚挚的感谢.

限于编者水平,书中难免出现错漏之处,敬请批评指正.

编者

2018.10

目 录

第 1 章　质点运动学

1.1　基本要求

一、掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动及变化的物理量概念.

二、理解运动方程的物理意义,熟练掌握由运动方程求解速度和加速度的方法.基本掌握已知质点运动加速度和初始条件求速度、运动方程的方法.

三、掌握曲线运动的自然坐标表示法,能计算质点在平面内运动时的速度和加速度,以及质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度.

四、了解质点的相对运动问题.

1.2　内容提要

一、参考系、坐标系和质点模型

1. 参考系

为定性描述物体运动而选用的标准物体或物体系.

2. 坐标系

为定量描述物体的位置与运动情况,在给定的参考系上建立的带有标尺的数学坐标.

坐标系的种类较多,视不同需要而选择.大学物理中常用的坐标系有直角坐标系(x,y,z)、极坐标系(r,θ)、自然坐标系等.在解某些力学问题时,经常会用到自然坐标系.

3. 质点

具有一定质量而大小或形状可以忽略的理想物体.一般有两种简化:

(1) 转动物体自身线度与其活动范围相比小得多时可视为质点.

(2) 物体平动时可视为质点.

二、描述质点运动的物理量

1. 位矢(位置矢量)$\boldsymbol{r}(t)$

确定质点 t 时刻空间具体位置的物理量，是指从坐标原点指向空间某点的有向线段.

直角坐标系中：$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，其大小 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，方向可用与直角三个坐标轴的夹角余弦表示，$\begin{cases}\cos\alpha=x/r\\\cos\beta=y/r.\\\cos\gamma=z/r\end{cases}$

2. 位移 $\Delta\boldsymbol{r}$

描述质点 Δt 时间内位置移动的物理量，是指 $\boldsymbol{r}(t)$端点指向 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$端点的有向线段，即 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$.

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示 Δt 时间内质点位置变化的净效果，与质点运动轨迹无关，只与始、末点位置有关.

直角坐标系中，$\Delta\boldsymbol{r}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$，

大小$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

3. 路程 Δs

描述质点 Δt 时间内通过的实际轨迹长度的物理量.Δs 是标量，与质点运动轨迹有关.

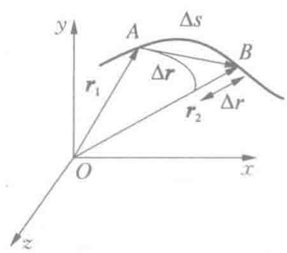

图 1-1

$|\Delta\boldsymbol{r}|$、Δr 及 Δs 的区别和联系见图 1-1：

$|\Delta\boldsymbol{r}|$指 Δt 时间内位移的大小，$|\Delta\boldsymbol{r}|=\overline{AB}$；$\Delta r$ 指 Δt 时间内位矢大小(模)的增量，$\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|=r_2-r_1$；$\Delta s$ 指 Δt 时间内的路程.

通常情况下，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r\neq\Delta s$.曲线运动时，$\Delta t\to0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$.

4. 速度 $\boldsymbol{v}$

描述质点运动的快慢和方向的物理量，$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

直角坐标系中，$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$，方向沿质点所在处曲线切线并指向前进一侧，速度的大小 $v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ 也称为速率，速率还可以用路程对时间的变化率表示，即 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

Δt 内的平均速度$\overline{\boldsymbol{v}}$定义为 Δt 时间内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δt 之比，即$\overline{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$.

5. 加速度 $\boldsymbol{a}$

描述质点速度大小、方向变化快慢的物理量，$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$.

直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，大小 $a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，曲线运动时，$\boldsymbol{a}$ 的方向指向质点所在处曲线凹侧.

三、运动方程及运动学两类基本问题

1. 运动方程和轨迹方程

在给定坐标系中，质点的位置随时间按一定规律变化，位置可以用坐标表示为时间的函数，叫作运动方程.描述质点运动轨迹的曲线方程称为轨迹方程.

运动方程：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

直角坐标系中的分量式：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$

由分量式消去 t 得轨迹方程：$f(x,y,z)=0$

2. 运动学的两类基本问题

(1) 已知运动方程，求速度和加速度

将已知函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对时间 t 求导数即可，即：

$$\boldsymbol{r}\xrightarrow{\text{求导}}\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\text{求导}}\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

(2) 已知速度和加速度，求运动方程

若已知速度、加速度与 t 的关系，直接进行积分即可，即：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)\xrightarrow{\text{积分}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t\xrightarrow{\text{积分}}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$$

特别地，若已知加速度与 x 的关系，应先进行变换

$$a(x)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

通过积分 $\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x$ 可得到 v 与 x 的关系

$$v^2(x)=v_0^2+2\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x$$

再由 $\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{v(x)}$，即可求得 x 与 t 的关系.

四、圆周运动

1. 圆周运动的角量描述(如图 1－2)

(1) 角坐标 $\theta(t)$：描述质点在 t 时刻的角位置.

角位移 $\Delta\theta$：描述质点角坐标的变化，$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$.

角速度 ω：描述质点圆周运动的快慢和方向，$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

角加速度 α：描述质点角速度大小、方向的变化快慢，$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$.

注意：圆周运动时，角位移、角速度和角加速度仅有正负，一般定义逆时针旋转时角位移、角速度为正，顺时针则为负.角加速度的正负与角速度的变化情况有关：角速度变大时，角加速度的正负与角速度的正负相同；角速度变小时，角加速度的正负与角速度的正负相反.

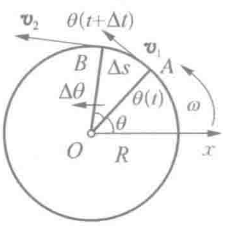

图 1－2

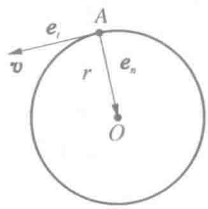

图 1－3

(2) 自然坐标系

如图 1－3 所示，以轨迹上任意一点 A 点为原点，以切线单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 建立的二维坐标系称为自然坐标系.在讨论圆周运动及曲线运动时，我们经常要用到这种坐标系.即时速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向就是在轨迹在 A 点的切线单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 方向，r 为即时曲率半径.

(3) 线量与角量的关系

角位移与弧长：$\Delta s=r\Delta\theta$

角速度与线速度的大小：$v=r\omega$

切向加速度与角加速度的大小关系：$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\alpha$

法向加速度与角速度的大小关系：$a_n=\frac{v^2}{r}=r\omega^2$

(4) 圆周运动时总加速度计算式：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{r}\boldsymbol{e}_n \text{ 或 } \boldsymbol{a}=r\alpha\boldsymbol{e}_t+r\omega^2\boldsymbol{e}_n$$

切向加速度、法向加速度和总加速度的关系，如图 1－4 所示.

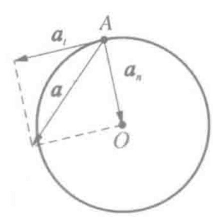

图 1－4

2. 两种圆周运动

(1) 匀速率圆周运动：$\alpha=0$，ω 是恒量，基本方程 $\theta=\theta_0+\omega t$.

(2) 匀变速率圆周运动：α 是恒量，基本方程

$$\omega=\omega_0+\alpha t,\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2,\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0).$$

五、相对运动

如图 1-5 所示，静止坐标系 xOy，运动坐标系 $x'O'y'$.在 O' 系相对于 O 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 作平动运动的情况下，同一质点 P 在这两个参考系中的位矢、速度、加速度之间的关系为：

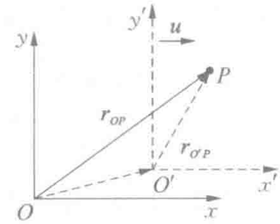

图 1-5

$$\boldsymbol{r}_{OP}=\boldsymbol{r}_{O'P}+\boldsymbol{u}\Delta t,\boldsymbol{v}_{OP}=\boldsymbol{v}_{O'P}+\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}_{OP}=\boldsymbol{a}_{O'P}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

1.3　典型例题

例 1　已知质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(4-3t^2)\boldsymbol{j}$ (SI)，求

(1) 质点的轨迹；

(2) $t=0$ s 及 $t=3$ s 时，质点的位置矢量；

(3) $t=0$ s 到 $t=3$ s 时间内的位移；

(4) $t=0$ s 到 $t=3$ s 时间内的平均速度；

(5) $t=3$ s 末的速度及速度大小；

(6) $t=3$ s 末加速度及加速度大小.

解　这是一道已知运动方程，求解位矢、位移、速度、加速度的典型题目，属于第一种类型，可根据第一种类型的解题思路依次求解，注意求解过程中的矢量的方向如何表示.

(1) 先写运动方程的分量式：$\begin{cases}x=2t\\y=4-3t^2\end{cases}$

消去 t 得轨迹方程：$y=4-\dfrac{3}{4}x^2$，是抛物线.

(2) 位矢：$\boldsymbol{r}\Big|_{t=0\,\mathrm{s}}=4\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}\Big|_{t=3\,\mathrm{s}}=(6\boldsymbol{i}-23\boldsymbol{j})$ m

(3) 位移：$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\Big|_{t=3\,\mathrm{s}}-\boldsymbol{r}\Big|_{t=0\,\mathrm{s}}=6\boldsymbol{i}-23\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{j}=(6\boldsymbol{i}-27\boldsymbol{j})$ m

大小：$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{6^2+(27)^2}=27.66$ m

方向：$\theta_0=\arctan\left(\dfrac{-9}{2}\right)=-1.35$ rad，与 x 轴正方向夹角为 -1.35 rad.

(4) 平均速度：$\overline{\boldsymbol{v}}\Big|_{t=0-3\,\mathrm{s}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}=(2\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j})\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

大小：$|\overline{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{4+81}=9.22\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

(5) 速度：$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-6t\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}\Big|_{t=3\,\mathrm{s}}=(2\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

大小：$v\Big|_{t=3\,\mathrm{s}}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=18.11\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

(6) 加速度 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-6\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，$\boldsymbol{a}\Big|_{t=3\,\mathrm{s}}=-6\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

大小：$a\Big|_{t=3\,\mathrm{s}}=-6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，沿 y 轴负向，与时间无关

例 2 某质点初位矢 $\boldsymbol{r}_0=2\boldsymbol{i}$(SI)，初速度 $\boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{j}$(SI)，加速度 $\boldsymbol{a}=4t\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j}$(SI)，求：(1) 该质点任意时刻的速度；(2) 该质点任意时刻的运动方程.

解 这是一道已知加速度表达式，提供初位矢，初速度等初始条件，求解任意时刻的速度、位矢的典型题目，属于第二种类型，可根据第二种类型的解题思路依次求解.注意求解过程中积分如何确定积分上下限.

(1) 给出的加速度是含时间变量的函数，由 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，并结合题设给出的初速度条件可得：

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0=\int_0^t \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t=\int_0^t(4t\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}t=2t^2\boldsymbol{i}+\frac{t^4}{2}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+2t^2\boldsymbol{i}+\frac{t^4}{2}\boldsymbol{j}=2t^2\boldsymbol{i}+\left(2+\frac{t^4}{2}\right)\boldsymbol{j}$$

(2) 由 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，注意带入的速度表达式应是上述已求解的任意时刻的速度表达式，并结合题设给出的初速度条件可得：

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t=\int_0^t\left[2t^2\boldsymbol{i}+\left(2+\frac{t^4}{2}\right)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{d}t=\frac{2t^3}{3}\boldsymbol{i}+\left(2t+\frac{t^5}{10}\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\frac{2t^3}{3}\boldsymbol{i}+\left(2t+\frac{t^5}{10}\right)\boldsymbol{j}=\left(2+\frac{2t^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\left(2t+\frac{t^5}{10}\right)\boldsymbol{j}$$

例 3 一质点按规律 $S=t^3+2t^2$(SI)在圆的轨道上运动，S 为圆弧的自然坐标.如果当 $t=2$ s 时的总加速度大小为 $16\sqrt{2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，求此圆周的半径 R.

解 题目涉及圆周运动的线量与角量的关系式、圆周运动时的速度、加速度公式，尤其是加速度公式中有关切向加速度、法向加速度和总加速度的大小的求解，解题时需要把这些公式综合使用.

由题意可得，t 时刻质点沿圆周运动的运动方程为：$s=R\theta=t^3+2t^2$

质点沿圆周运动的速度：$v=R\omega=3t^2+4t$

切向加速度：$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\alpha=6t+4$

法向加速度：$a_n=\frac{v^2}{R}=\sqrt{a^2-a_t^2}$

半径：$R=\dfrac{v^2}{\sqrt{a^2-a_t^2}}=\dfrac{(3\times2^2+4\times2)^2}{\sqrt{(16\sqrt{2})^2-(6\times2+4)^2}}=\dfrac{20^2}{4^2}=25\ \mathrm{m}$

1.4　习题选讲

1-11　质点沿直线运动，加速度 $a=4-t^2$，式中 a 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，t 的单位为 s.如果当 $t=3$ s 时，$x=9$ m，$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求质点的运动方程.

解　本题属于运动学第二类问题，即已知加速度求速度和运动方程，必须在给定条件下用积分方法解决.由于是直线运动，所以此时可以去掉矢量号，以正负号来表示某一直线上的运动情况.由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 和 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 可得 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$.

由 $\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$ 可得，

$$v=4t-\frac{1}{3}t^3+v_0 \tag{1}$$

再由 $\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t$ 可得，

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4+v_0t+x_0 \tag{2}$$

将 $t=3$ s 时，$x=9$ m，$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 代入(1)、(2)得 $v_0=-1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$x_0=0.75$ m.于是可得质点运动方程为：$x=2t^2-\dfrac{1}{12}t^4+0.75$

1-14　质点在 Oxy 平面内运动，其运动方程为 $\boldsymbol{r}=2.0t\boldsymbol{i}+(19.0-2.0t^2)\boldsymbol{j}$，式中 $\boldsymbol{r}$ 的单位为 m，t 的单位为 s.求：(1) 质点的轨迹方程；(2) 在 $t_1=1.0$ s 到 $t_2=2.0$ s 时间内的平均速度；(3) $t_1=1.0$ s 时的速度及切向和法向加速度；(4) $t_1=1.0$ s 时质点所在处轨道的曲率半径 ρ.

解　根据运动方程可直接写出其分量式 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$，从中消去参数 t，即得质点的轨迹方程.平均速度是反映质点在一段时间内位置的变化率，即 $\overline{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$，它与时间间隔 Δt 的大小有关，当 $\Delta t\to0$ 时，平均速度的极限即瞬时速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.切向和法向加速度是指在自然坐标下的分矢量 $\boldsymbol{a}_t$ 和 $\boldsymbol{a}_n$，前者只反映质点在切线方向速度大小的变化率，即 $\boldsymbol{a}_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$，后者只反映质点速度方向的变化，它可由总加速度 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}_t$ 得到.在求得 t_1 时刻质点的速度和法向加速度的大小后，可由公式 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ 求 ρ.

(1) 由参数方程：$x=2.0t$，$y=19.0-2.0t^2$

消去 t 得质点的轨迹方程：$y=19.0-0.50x^2$

(2) 在 $t_1=1.0$ s 到 $t_2=2.0$ s 时间内的平均速度：

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=2.0\boldsymbol{i}-6.0\boldsymbol{j}$$

(3) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为：

$$\boldsymbol{v}(t)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=2.0\boldsymbol{i}-4.0t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}=-4.0\boldsymbol{j}$$

则 $t_1=1.0$ s 时的速度：$\boldsymbol{v}(t)\Big|_{t=1\,\mathrm{s}}=(2.0\boldsymbol{i}-4.0\boldsymbol{j})\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

切向和法向加速度分别为：

$$\boldsymbol{a}_t\Big|_{t=1\,\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)\boldsymbol{e}_t=3.58\boldsymbol{e}_t\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\boldsymbol{a}_n=\sqrt{a^2-a_t^2}\,\boldsymbol{e}_n=1.79\boldsymbol{e}_n\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(4) $t_1=1.0$ s 质点的速度大小为：$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=4.47\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=11.17\ \mathrm{m}$$

1-20 一半径为 0.50 m 的飞轮在启动时的短时间内，其角速度与时间的平方成正比. 在 $t=2.0$ s 时测得轮缘一点的速度值为 $4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.求：(1) 该轮在 $t'=0.5$ s 的角速度，轮缘一点的切向加速度和总加速度；(2) 该点在 2.0 s 内所转过的角度.

解 首先应该确定角速度的函数关系 $\omega=kt^2$.依据角量与线量的关系由特定时刻的速度值可得相应的角速度，从而求出式中的比例系数 k，$\omega=\omega(t)$确定后，注意到运动的角量描述与线量描述的相应关系，由运动学中两类问题求解的方法(微分法和积分法)，即可得到特定时刻的角加速度、切向加速度和角位移.

因 $v=\omega R$，由题意 $\omega\propto t^2$ 得比例系数

$$k=\frac{\omega}{t^2}=\frac{v}{Rt^2}=2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}$$

所以

$$\omega=\omega(t)=2t^2$$

则 $t'=0.5$ s 时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega=2t'^2=0.5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=4t'=2.0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

$$a_t=\alpha R=1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

总加速度：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=a_t\boldsymbol{e}_t+a_n\boldsymbol{e}_n=\alpha R\boldsymbol{e}_t+\omega^2R\boldsymbol{e}_n$

总加速度大小：$a=\sqrt{(\alpha R)^2+(\omega^2 R)^2}=1.01\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

在 2.0 s 内该点所转过的角度

$$\theta-\theta_0=\int_0^2 \omega\,\mathrm{d}t=\int_0^2 2t^2\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3\Big|_0^2=5.33\ \mathrm{rad}$$

1.5　综合练习

一、选择题

1. 一质点在平面上做一般曲线运动，其瞬间速度为 $\boldsymbol{v}$，瞬时速率为 v，某一段时间内的平均速度为$\overline{\boldsymbol{v}}$，平均速率为$\overline{v}$.它们之间的关系必定有(　　)

(A) $|\boldsymbol{v}|=v,|\overline{\boldsymbol{v}}|=\overline{v}$　　(B) $|\boldsymbol{v}|\neq v,|\overline{\boldsymbol{v}}|=\overline{v}$

(C) $|\boldsymbol{v}|\neq v,|\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\overline{v}$　　(D) $|\boldsymbol{v}|=v,|\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\overline{v}$

2. 若用 $\boldsymbol{r}$、s、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 分别表示质点运动的位矢、路程、速度和加速度，则下列表述正确的是(　　)

(A) $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta r$　　(B) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$　　(C) $a=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　(D) $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

3. 质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为(v 表示任一时刻质点的速率)(　　)

(A) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　　(B) $\frac{v^2}{R}$　　(C) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v^2}{R}$　　(D) $\left[\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^4}{R^2}\right)\right]^{1/2}$

4. 某质点的运动方程为 $x=3t-5t^3+6$(SI)，则该质点作(　　)

(A) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

(B) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

(C) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

(D) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

5. 下列说法哪一条正确？(　　)

(A) 加速度恒定不变时，物体运动方向也不变

(B) 平均速率等于平均速度的大小

(C) 不管加速度如何，平均速率表达式总可以写成(v_1、v_2 分别为初、末速率)

$$\overline{v}=\frac{(v_1+v_2)}{2}$$

(D) 运动物体速率不变时，速度可以变化

6. 质点在平面内运动时，位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$，若保持$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，则质点的运动是(　　)