College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

工程数学

积分变换习题全解指南

东南大学数学系　张元林　编

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

工程数学

积分变换习题全解指南

东南大学数学系　张元林　编

高等教育出版社

内容简介

本书是高等教育出版社出版的《工程数学—积分变换》(第四版)教材的配套参考书,不仅对教材中所有习题作了详尽解答,而且在每章开始列出了“内容要点”,给出了“例题分析”。书中各章节习题的题号均与教材相一致,书后附有与教材相同的 Fourier 变换简表和 Laplace 变换简表,以方便查用。因此,本书具有相对独立性。

本书可作为“积分变换”课程的教学参考书,除可供高等院校非数学专业的师生参考使用外,也可供广大工程技术人员及自学积分变换的读者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.积分变换习题全解指南/张元林主编;东南大学数学系编.—北京:高等教育出版社,2004.1
ISBN 7-04-012956-6

Ⅰ.工… Ⅱ.①张…②东… Ⅲ.工程数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 126066 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	河北省财政厅印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2004 年 1 月第 1 版
印　　张	6.75	印　　次	2004 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	160 000	定　　价	9.80 元

前　言

本书是高等教育出版社出版的《工程数学—积分变换》(第四版,东南大学数学系　张元林编)教材的配套参考书。为了方便读者使用,对教材中所有习题作了详尽的解答。

本书也具有相对的独立性,每章开始列出"内容要点",简述本章的基本概念、主要定理、性质及计算公式,使读者能尽快地掌握其主要内容,也可起到复习、小结的效果;在习题解答前,选出一些有代表性的题目给出"例题分析",不仅给出其详细的解答过程,更着重于解题思路的分析,并尽可能地提供解题的多种方法,从而提高读者的分析问题和解决问题的能力;最后,对该教材的所有习题作出"习题全解",这里,将按习题所在的章节,提供与教材内容的次序相适应的一种解题方法,并给出解答的全过程,对于有些习题可能遇到的难点或一题多解的情形,尽可能地加以注明,以期读者达到解题方法的多样性与灵活性。另外,教材中带有星号 * 内容的习题也同样作出了解答,以供需要此内容的读者及学有余力的学生参考。书中各章节习题的题号均与教材相一致。书后附有与教材相同的 Fourier 变换简表与 Laplace 变换简表,以方便查用。

必须指出,学好数学离不开自己做习题。如果用"阅读题解"代替"自己做题",必将会影响自己解题能力的提高。但若是自己做了,再参考本书并作一些分析和比较,那将会收到触类旁通、举一反三的效果。这也是编者所期望的。

本书的编写力求层次分明,步骤清楚,书写格式规范化,使读者通过本书的学习,能对《积分变换》的理论与方法有更加深入的理解。

由于编者水平所限，本书给出的解题方法未必都是最好的，难免有误、不妥之处，敬请指正。

编 者

2003年8月于南京

目　录

第一章 Fourier 变换

一 内容要点

本章从讨论周期函数的 Fourier 级数的展开式出发,进而讨论非周期函数的 Fourier 积分公式及其收敛定理,并在此基础上引出 Fourier 变换的定义、性质、一些计算公式及某些应用.

本章的重点是求函数的 Fourier 变换及 Fourier 变换的某些应用.函数的 Fourier 变换也是本章的一个难点,要解决好这个难点,必须掌握好 Fourier 变换的基本性质及一些常用函数(如单位脉冲函数,单位阶跃函数,正、余弦函数等)的 Fourier 变换及其逆变换的求法.从而才能较好地运用 Fourier 变换进行频谱分析,解某些微分、积分方程和偏微分方程的定解问题.

1. Fourier 积分

(1) Fourier 级数的展开式

设 $f_T(t)$ 以 T 为周期且在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件(即在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足:1°连续或只有有限个第一类间断点;2°只有有限个极值点).则 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上可以展成 Fourier 级数.在 $f_T(t)$ 的连续点处,有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\quad(\text{三角形式})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t}, \qquad \text{（复数形式或称复指数形式）}$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, w_n = n\omega, c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega t}\,dt \qquad (n=0,\pm 1,\cdots),$$

$c_0 = \dfrac{a_0}{2}, c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2}(n=1,2,\cdots)$. 在 $f_T(t)$的间断点 t 处,上面的展开式左边 $f_T(t)$应以$\dfrac{1}{2}[f_T(t+0)+f_T(t-0)]$代替.

(2) Fourier 积分定理

对于$(-\infty,+\infty)$上的任何一个非周期函数 $f(t)$都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$当 $T\to+\infty$时转化而来的. 由此,从 $f_T(t)$的 Fourier 级数的复数形式出发,能够得到一个非周期函数 $f(t)$的 Fourier 积分公式,其条件为:

若 $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上满足下列条件:

1° $f(t)$在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件;

2° $f(t)$在无限区间$(-\infty,+\infty)$上绝对可积(即积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$收敛),则在 $f(t)$的连续点处有如下的 Fourier 积分公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right]e^{j\omega t}\,d\omega.$$

在 $f(t)$的间断点 t 处,上面展开式左端的 $f(t)$应以$\dfrac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$代替. 这个公式也称为 Fourier 积分公式的复数形式.

这个定理在教材中虽然未加证明,但应当看到它是 Fourier 变换的理论基础,必须深刻理解其含义,掌握它成立的条件,以便为学习 Fourier 变换奠定理论基础.

(3) Fourier 积分公式的其他形式

1) Fourier 积分公式的三角形式

利用 Euler 公式,由 Fourier 积分公式的复数形式可推出它的三角形式:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

2) Fourier 正弦积分公式

当 $f(t)$为奇函数时,利用三角函数的和差公式,由 Fourier 积分公式的三角形式可推出其 Fourier 正弦积分公式

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

3) Fourier 余弦积分公式

当 $f(t)$为偶函数时,同理可得

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

若 $f(t)$仅在$(0,+\infty)$上有定义,且满足 Fourier 积分收敛定理的条件,通过奇式(偶式)延拓,便可得到 $f(t)$的 Fourier 正弦(余弦)积分展开式.

2. Fourier 变换

(1) Fourier 变换的概念

Fourier 变换对的一般形式:

$$\begin{cases}\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega;\end{cases}$$

Fourier 正弦变换对:当 $f(t)$为奇函数时,有

$$\begin{cases}\mathscr{F}_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin \omega t\mathrm{d}t \\ f(t) = \mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)] = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin \omega t\mathrm{d}\omega;\end{cases}$$

Fourier 余弦变换对:当 $f(t)$为偶函数时,有

$$\begin{cases}\mathscr{F}_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos \omega t\mathrm{d}t \\ f(t) = \mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)] = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos \omega t\mathrm{d}\omega,\end{cases}$$

它们可分别简记为 $f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$,$f(t)\Leftrightarrow F_s(\omega)$及 $f(t)\Leftrightarrow F_c(\omega)$.显然,当 $f(t)$为奇函数时,$F(\omega)=-2\mathrm{j}F_s(\omega)$,当 $f(t)$为偶函数时,$F(\omega)=2F_c(\omega)$.

(2) 单位脉冲函数及其 Fourier 变换

δ-函数的重要性质—筛选性质:若 $f(t)$为无穷次可微的函数,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0).$$

一般地,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = f(t_0).$$

由这一性质,可得 $\mathscr{F}[\delta(t)]=1$,$\mathscr{F}^{-1}[1]=\delta(t)$,表明 $\delta(t)$和 1 构成一个 Fourier 变换对,记为 $\delta(t)\Leftrightarrow 1$.同理,有 $\delta(t-t_0)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$.

需要指出的是 $\delta(t)$是一个广义函数,它的 Fourier 变换是一种广义 Fourier 变换.在物理学和工程技术中有许多重要函数(如常数,符号函数,单位阶跃函数及正、余弦函数等)不满足 Fourier 积分定理中的绝对可积条件(即不满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t<\infty$),然而其广义 Fourier 变换是存在的.利用单位脉冲函数及其Fourier变换就可以求出它们的 Fourier 变换.例如

$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0),$$

$$\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega),\mathscr{F}[\mathrm{sgn}t]=\frac{2}{\mathrm{j}\omega},$$
$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)],$$
$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)].$$

3. Fourier 变换的物理意义—频谱

(1) 非正弦的周期函数 $f_T(t)$的频谱

在 $f_T(t)$的 Fourier 级数展开式中,称

$$a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t=A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

为第 n 次谐波,其中 $\omega_n=n\omega=\frac{2n\pi}{T}$. $A_0=\frac{|a_0|}{2}$,$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$称为频率为ω_n的第n 次谐波的振幅,在 $f_T(t)$的 Fourier 级数的复数形式中,第 n 次谐波为 $c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}+c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n t}$,并且$|c_n|=|c_{-n}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$,从而 $f_T(t)$的第 n 次谐波的振幅为

$$A_n=2|c_n|\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况. 所谓频谱图,通常是指频率 ω_n与振幅 A_n 的关系图. A_n 也称为 $f_T(t)$的振幅频谱(简称为频谱). 由于 $n=0,1,2,\cdots$,所以频谱 A_n 的图形是不连续的,称之为离散频谱,其频谱图清楚地表明了一个非正弦的周期函数$f_T(t)$包含了哪些频率分量及各分量所占的比重(如振幅的大小).

(2) 非周期函数 $f(t)$的频谱

非周期函数 $f(t)$的 Fourier 变换 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,在频谱分析中又称为 $f(t)$的频谱函数,它的模$|F(\omega)|$称为 $f(t)$的振幅频谱(简称频谱). 由于 ω 是连续变化的,这种频谱称为连续频谱,频谱图为连续曲线. 振幅频谱$|F(\omega)|$是频率 ω 的偶函数;相角频谱

$\varphi(\omega)=\arctan\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}$是频率$\omega$ 的奇函数. 对一个时间

函数作 Fourier 变换，就是求这个时间函数的频谱函数.

频谱图能清楚地表明时间函数的各频谱分量的相对大小，因此，频谱图在工程技术中有着广泛的应用. 作出一个非周期函数 $f(t)$ 的频谱图，其步骤如下：

1）先求出非周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$；

2）选定频率 ω 的一些值，算出相应的振幅频谱 $|F(\omega)|$ 的值；

3）将上述各组数据所对应的点填入直角坐标系中，用连续曲线连接这些离散的点，就得到了该函数 $f(t)$ 的频谱图.

4. Fourier 变换的基本性质

为叙述方便，在下述性质中，凡是需要求 Fourier 变换的函数，假定都满足 Fourier 积分定理中的条件.

（1）线性性质　设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，$\alpha,\beta$ 为常数，则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega);$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

（2）位移性质　设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega t_0}F(\omega);$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=f(t)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t}$$，（象函数的位移性质）.

（3）微分性质　设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，如果 $f^{(k)}(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f^{(k)}(t)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，则有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^nF(\omega);$$

$$F^{(n)}(\omega)=(-\mathrm{j})^n\mathscr{F}[t^nf(t)]$$，（象函数的微分性质）.

特别，当 $n=1$ 有

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{j}\omega F(\omega);$$

$$F'(\omega)=-\mathrm{j}\mathscr{F}[tf(t)].$$

（4）积分性质　设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，如果当 $t\to+\infty$ 时，

$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \to 0$,则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega);$$

当 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)\neq 0$ 时,有

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega).$$

(5*) 乘积定理　设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$, $\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\overline{f_2(t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega,$$

其中 $\overline{f_1(t)}$, $\overline{f_2(t)}$, $\overline{F_1(\omega)}$ 及 $\overline{F_2(\omega)}$ 分别为 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $F_1(\omega)$ 及 $F_2(\omega)$ 的共轭函数. 特别,当 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 为实函数时,有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega.$$

(6*) 能量积分　设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

这一等式又称为 Parseval 等式. 函数 $S(\omega)=|F(\omega)|^2$ 称为能量密度函数(或称能量谱密度). 它可以决定函数 $f(t)$ 的能量分布规律. 将它对所有频率积分就得到 $f(t)$ 的总能量,因此, Parseval 等式又称为能量积分. 它表明非周期函数 $f(t)$ 在时间域内的能量与在频率域内的能量不因 $f(t)$ 取 Fourier 变换后而改变. 由于能量密度函数 $S(\omega)$ 是 ω 的偶函数,则能量积分可进一步写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

5. 卷积与相关函数

(1) 卷积的概念

$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,且其运算满足

$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$　　(交换律);

$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$ (结合律);

$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$ (分配律);

$|f_1(t) * f_2(t)| \leqslant |f_1(t)| * |f_2(t)|$　　(卷积不等式).

(2) 卷积定理　设 $f_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$满足 Fourier 积分定理中的条件,且 $\mathscr{F}[f_k(t)] = F_k(\omega)(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t) * \cdots * f_n(t)] = F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)\cdot\cdots\cdot F_n(\omega);$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot\cdots\cdot f_n(t)] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} F_1(\omega) * F_2(\omega) * \cdots * F_n(\omega)$$(象函数卷积定理).

特别,

$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)\cdot F_2(\omega);$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

(3*) 相关函数的概念

相关函数的概念和卷积的概念一样,也是频谱分析中的一个重要概念. 记函数 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的互相关函数为

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau)\mathrm{d}t.$$

记函数 $f(t)$的自相关函数(简称为相关函数)为

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau)\mathrm{d}t.$$

显然,$R(\tau) = R(-\tau)$;$R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$.

(4*) 相关函数和能量谱密度的关系

1) 自相关函数和能量谱密度构成一个 Fourier 变换对:$R(\tau) \Leftrightarrow S(\omega)$,即

$$\begin{cases} R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega; \\ S(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \end{cases}$$

利用 $R(\tau)$和 $S(\omega)$的偶函数性质,可进一步写为

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega;$$

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$R(\tau)$在 $\tau=0$ 时,可得 Parseval 等式,即

$$R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt.$$

2) 互相关函数和互能量谱密度构成一个 Fourier 变换对. 由乘积定理(当 $f_1(t)$和 $f_2(t)$为实函数时)知

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

记互能量谱密度为 $S_{12}(\omega)=\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)$(而 $S_{21}(\omega)=F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}$),则

$$\begin{cases} R_{12}(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega; \\ S_{12}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \end{cases}$$

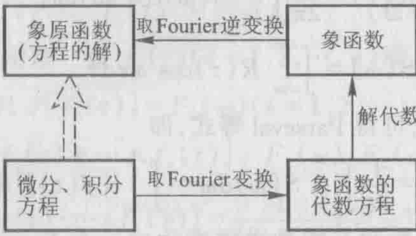
显然,互能量谱密度有 $S_{21}(\omega)=\overline{S_{12}(\omega)}$.

6. Fourier 变换的应用

Fourier 变换是分析非周期函数频谱的理论基础. 它在频谱分析中有着重要的应用,前面已列出其内容要点. 这里的应用主要是用来求解某些微分、积分方程和偏微分方程(其未知函数为二元函数的情形)的定解问题.

(1) 微分、积分方程的 Fourier 变换解法

运用 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质,对欲求解的方程两端取 Fourier 变换,将其转化为象函数的代数方程,通过解代数方程与求 Fourier 逆变换就可得到原方程的解.这种解法如下图所示意:



(2*) 偏微分方程的 Fourier 变换解法

运用 Fourier 变换求解偏微分方程的定解问题类似于上述示意图中的三个步骤,即先将定解问题中的未知函数看作某一自变量的函数,对方程及定解条件关于该自变量取 Fourier 变换,把偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题;再根据这个常微分方程和相应的定解条件,求出象函数;然后再取 Fourier 逆变换,得到原定解问题的解.这里,要求变换的自变量在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化;如要求变换的自变量在 $(0,+\infty)$ 内变化,则根据定解条件的情形可运用 Fourier 正弦变换或 Fourier 余弦变换来求解该偏微分方程的定解问题.

二 例题分析

例 1-1 试求函数 $f(t)=\begin{cases} t, & |t|\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的 Fourier 积分表达式.

解 在 Fourier 积分定理的条件下,函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分表达式,可以用复数形式,也可以用三角形式来表达;由于函数

$f(t)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,还可以用 Fourier 正弦积分公式来表达;如果读者已经掌握 Fourier 变换的性质,则可根据教材第一章§1.1中的例1,利用象函数的微分性质求得结果.

方法1 利用 Fourier 积分公式的复数形式,在$f(t)$的连续点处,有

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau(\cos\omega\tau-\mathrm{j}\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{-\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}\tau\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{-\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\mathrm{d}\omega,\ (t\neq\pm1)
\end{aligned}$$

当$t=\pm1$时,$f(t)$应以$\frac{1}{2}[f(\pm1+0)+f(\pm1-0)]=\pm\frac{1}{2}$代替.

方法2 利用 Fourier 积分公式的三角形式,在$f(t)$的连续点处,有

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\omega t\left[\int_{0}^{1}\tau\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\mathrm{d}\omega,\ (t\neq\pm1)
\end{aligned}$$

同样,当$t=\pm1$时,$f(t)$应以$\pm\frac{1}{2}$代替

方法3 由于$f(t)$为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,也可以利用