"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、普通高等教育“十一五”国家级规划教材和面向21世纪课程教材，主要内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、 实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等，附录为实数理论和积分表，书后附微积分学简史。

本次修订是在第四版的基础上对一些内容进行适当调整，使教材逻辑性更合理，并适当补充数字资源。第五版仍旧保持前四版“内容选取适当，深入浅出，易教易学，可读性强”的特点。

本书可作为高等学校数学和其他相关专业的教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析.上册／华东师范大学数学科学学院编.--5版.--北京：高等教育出版社，2019.5

ISBN 978-7-04-050694-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①华… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第229064号

项目策划 李艳馥 兰莹莹 李 蕊

策划编辑 兰莹莹 李 蕊　责任编辑 兰莹莹　封面设计 王凌波　版式设计 杜微言

插图绘制 于 博　责任校对 李大鹏　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	20.25	版　次	1981年4月第1版
字　数	440千字		2019年5月第5版
购书热线	010-58581118	印　次	2019年5月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	44.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 50694-00

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院　编

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1210369，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入"我的课程"。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击"进入课程"按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

数学分析简史（上）

数学分析简史（下）

编者的话（初版）

http://abook.hep.com.cn/1210369

第五版前言

华东师范大学数学系编写的《数学分析》(上、下册)自1980年初版诞生以来,相继于1990年和2001年两次再版,1987年荣获全国第一届高等学校优秀教材优秀奖,2004年荣获上海市优秀教材一等奖,并于2010年出版第四版。自第四版出版以来,教材向着信息化和精美化的方向发展,在使用中也发现了一些还可以继续完善的地方,在此背景下我们着手第五版修订。

为做好本次修订,前期我们进行了广泛调研,征集使用意见,并召开了教材修订会,而后根据当前教材发展的新形势,最终确定第五版的修订方案。本次修改的主要原则是基本保留第四版的风格,对某些不完善之处进行必要的处理,并适当补充数字资源(以图标 , 示意)。

本次修改的主要内容有:

1. 增加了对函数 $y=x^n, x>0$ 值域的讨论,从而明确了其反函数 $y=\sqrt[n]{x}$ 的定义域,这就补上了第四版的一个不足;

2. 为了保证大学数学与中学数学内容的衔接,根据授课老师的建议,此次再版将三角函数的和差化积公式、积化和差公式作为习题出现在教材上;

3. 在有理函数的部分分式分解讲解中,我们适当作了一些说明;

4. 对 $y=(1+x)^{\alpha}$ 幂级数的展开式处理稍作修改;

5. 对一些例题进行适当的增减;

6. 将"微积分学简史"作为数字资源。

参加第五版编写工作的老师有:

庞学诚 任主编,并负责编写第一章至第七章;

吴　畏 负责编写第八章至第十一章,以及第十三章;

柴　俊 负责编写第十二章、第十四章至第十八章;

戴浩晖 负责编写第十九章至第二十三章。

在编写过程中,一直得到我校数学科学学院老师的关心和帮助,高等教育出版社的编辑也付出了辛勤的劳动,对此我们表示衷心的感谢。在这里我们还要感谢复旦大学楼红卫教授、浙江大学阮火军教授,同时还要感谢在本书的修订和出版过程中积极提出建议的所有朋友。

第四版前言

第三版前言

再版的话

本书自1980年第一版出版以来，深受广大读者的关爱与支持，在此我们一并致以深切谢意！并衷心希望读者在阅读和使用本教材的过程中继续提出宝贵意见。

编　者

2018年2月

目 录

第一章 实数集与函数

§1 实　数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数.为此,我们先简要叙述实数的有关概念.

一、实数及其性质

在中学数学课程中,我们知道实数由有理数与无理数两部分组成.**有理数**可用分数形式$\frac{p}{q}$(p,q为整数,$q\neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示;而无限十进不循环小数则称为**无理数**.有理数和无理数统称为**实数**.

为了以下讨论的需要,我们把有限小数(包括整数)也表示为无限小数.对此我们作如下规定:对于正有限小数(包括正整数)x,当$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n$时,其中$0\leqslant a_i\leqslant 9$,$i=1,2,\cdots,n$,$a_n\neq 0$,$a_0$为非负整数,记

$$x=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\ 9\cdots,$$

而当$x=a_0$为正整数时,则记

$$x=(a_0-1).999\ 9\cdots,$$

例如2.001记为2.000 999 9…;对于负有限小数(包括负整数)y,则先将$-y$表示为无限小数,再在所得无限小数之前加负号,例如-8记为$-7.999\ 9\cdots$;又规定数0表示为0.000 0….于是,任何实数都可用一个确定的无限小数来表示.

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法.现定义两个实数的大小关系.

定义1　给定两个非负实数

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$$

其中a_0,b_0为非负整数,$a_k,b_k(k=1,2,\cdots)$为整数,$0\leqslant a_k\leqslant 9$,$0\leqslant b_k\leqslant 9$.若有

$$a_k=b_k,k=0,1,2,\cdots,$$

则称x与y相等,记为$x=y$;若$a_0>b_0$或存在非负整数l,使得

$$a_k=b_k(k=0,1,2,\cdots,l)\text{ 而 }a_{l+1}>b_{l+1},$$

则称x大于y或y小于x,分别记为$x>y$或$y<x$.

对于负实数x,y,若按上述规定分别有$-x=-y$与$-x>-y$,则分别称$x=y$与$x<y$(或

$y>x$).另外,规定任何非负实数大于任何负实数.

以下给出通过有限小数来比较两个实数大小的等价条件.为此,先给出如下定义.

定义 2　设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数.称有理数

$$x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为实数 x 的**n位不足近似**,而有理数

$$\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

称为 x 的**n位过剩近似**,$n=0,1,2,\cdots$.

对于负实数 $x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,其 n 位不足近似与过剩近似分别规定为

$$x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n} \text{ 与 } \bar{x}_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n.$$

注　不难看出,实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减,即有 $x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots$,而过剩近似 $\bar{x}_n$ 当 n 增大时不增,即有 $\bar{x}_0\geqslant\bar{x}_1\geqslant\bar{x}_2\geqslant\cdots$.

我们有以下的命题.

命题　设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y=b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数,则 $x>y$ 的等价条件是:存在非负整数 n,使得

$$x_n > \bar{y}_n,$$

其中 x_n 表示 x 的 n 位不足近似,$\bar{y}_n$ 表示 y 的 n 位过剩近似.

关于这个命题的证明,以及关于实数的四则运算法则的定义,可参阅本书附录 I 第八节.

例 1　设 x,y 为实数,$x<y$.证明:存在有理数 r,满足

$$x < r < y.$$

证　由于 $x<y$,故存在非负整数 n,使得 $\bar{x}_n<y_n$.令

$$r = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + y_n),$$

则 r 为有理数,且有

$$x \leqslant \bar{x}_n < r < y_n \leqslant y,$$

即得 $x<r<y$. □

为方便起见,通常将全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$,即

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

实数有如下一些主要性质:

1. 实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的,即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是实数.

2. 实数集是有序的,即任意两实数 a,b 必满足下述三个关系之一:$a<b,a=b,a>b$.

3. 实数的大小关系具有传递性,即若 $a>b,b>c$,则有 $a>c$.

4. 实数具有阿基米德(Archimedes)性,即对任何 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $b>a>0$,则存在正整数 n,使得 $na>b$.

5. 实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数(见例 1),也有无理数.

6. 如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原点,指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向),并规定一个单位长度,则称此直线为**数轴**. 可以说明:任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数. 于是,实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系. 在本书以后的叙述中,常把"实数 a"与"数轴上的点 a"这两种说法看作具有相同的含义.

例 2 设 $a,b\in\mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε,有 $a<b+\varepsilon$,则 $a\leqslant b$.

证 用反证法. 倘若结论不成立,则根据实数集的有序性,有 $a>b$. 令 $\varepsilon=a-b$,则 ε 为正数且 $a=b+\varepsilon$,但这与假设 $a<b+\varepsilon$ 相矛盾. 从而必有 $a\leqslant b$. □

关于实数的定义与性质的详细论述,有兴趣的读者可参阅本书附录 Ⅰ.

二、绝对值与不等式

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质:

1. $|a|=|-a|\geqslant 0$,当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$.
2. $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.
3. $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$, $|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$ $(h>0)$.
4. 对任何 $a,b\in\mathbf{R}$,都有如下的**三角形不等式**:
$$|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|.$$
5. $|ab|=|a||b|$.
6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

下面只证明性质 4,其余性质由读者自行证明.

由性质 2 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,\ -|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$

两式相加后得到

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$

根据性质 3,上式等价于

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|. \tag{1}$$

将(1)式中 b 换成 $-b$,(1)式右边不变,即得 $|a-b|\leqslant |a|+|b|$,这就证明了性质 4 不等式的右半部分. 又由 $|a|=|a-b+b|$,据(1)式有

$$|a|\leqslant |a-b|+|b|.$$

从而得

$$|a|-|b|\leqslant |a-b|. \tag{2}$$

将(2)式中 b 换成 $-b$,即得 $|a|-|b|\leqslant |a+b|$. 性质 4 得证. □

习　题　1.1

1. 设 a 为有理数，x 为无理数. 证明：

(1) $a+x$ 是无理数；(2) 当 $a\neq 0$ 时，ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1) $x(x^2-1)>0$；(2) $|x-1|<|x-3|$；(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$. 证明：若对任何正数 ε，有 $|a-b|<\varepsilon$，则 $a=b$.

4. 设 $x\neq 0$，证明 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$，并说明其中等号何时成立.

5. 证明：对任何 $x\in\mathbf{R}$，有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$；(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

并说明等号何时成立.

6. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$（$\mathbf{R}^+$表示全体正实数的集合）. 证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗？

---

7. 设 $x>0,b>0,a\neq b$. 证明 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

8. 设 p 为正整数. 证明：若 p 不是完全平方数，则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

9. 设 a,b 为给定实数. 试用不等式符号（不用绝对值符号）表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$；(2) $|x-a|<x-b$；(3) $|x^2-a|<b$.

§2　数集 · 确界原理

本节中我们先定义 $\mathbf{R}$ 中两类重要的数集——区间与邻域，然后讨论有界集，并给出确界定义和确界原理.

一、区间与邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$. 我们称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记作 (a,b)；数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$；数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开半闭区间**，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$. 以上这几类区间统称为**有限区间**. 从数轴上来看，开区间 (a,b) 表示 a,b 两点间所有点的集合，闭区间 $[a,b]$ 比开区间 (a,b) 多两个端点，半开半闭区间 $[a,b)$ 比开区间 (a,b) 多一个端点 a 等.

满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a,+\infty)$，这里符号 ∞ 读作“无穷大”，$+\infty$ 读作“正无穷大”. 类似地，我们记

$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\},\ (a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$
$$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\},\ (-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$

其中 $-\infty$ 读作"负无穷大".以上这几类数集都称为**无限区间**.有限区间和无限区间统称为**区间**.

设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$.满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a;\delta)$,或简单地写作 $U(a)$,即有

$$U(a;\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^{\circ}(a;\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

它也可简单地记作 $U^{\circ}(a)$.注意,$U^{\circ}(a;\delta)$ 与 $U(a;\delta)$ 的差别在于:$U^{\circ}(a;\delta)$ 不包含点 a.

此外,我们还常用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域 $U_{+}(a;\delta)=[a,a+\delta)$,简记为 $U_{+}(a)$;

点 a 的 δ 左邻域 $U_{-}(a;\delta)=(a-\delta,a]$,简记为 $U_{-}(a)$;

($U_{-}(a)$ 与 $U_{+}(a)$ 去除点 a 后,分别为**点 a 的空心 δ 左、右邻域**,简记为 $U^{\circ}_{-}(a)$ 与 $U^{\circ}_{+}(a)$.)

∞ 邻域 $U(\infty)=\{x\mid |x|>M\}$,其中 M 为充分大的正数(下同);

$+\infty$ 邻域 $U(+\infty)=\{x\mid x>M\}$;

$-\infty$ 邻域 $U(-\infty)=\{x\mid x<-M\}$.

二、有界集·确界原理

定义 1 设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集.若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$,则称 S 为**有上界(下界)的数集**,数 $M(L)$ 称为 S 的一个**上界(下界)**.

若数集 S 既有上界又有下界,则称 S 为**有界集**.若 S 不是有界集,则称 S 为**无界集**.

例 1 证明数集 $\mathbf{N}_{+}=\{n\mid n$ 为正整数$\}$ 有下界而无上界.

证 显然,任何一个不大于 1 的实数都是 $\mathbf{N}_{+}$ 的下界,故 $\mathbf{N}_{+}$ 为有下界的数集.

为证 $\mathbf{N}_{+}$ 无上界,按照定义只需证明:对于无论多么大的数 M,总存在某个正整数 $n_0(\in\mathbf{N}_{+})$,使得 $n_0>M$.事实上,对任何正数 M(无论多么大),取 $n_0=[M]+1$①,则 $n_0\in\mathbf{N}_{+}$,且 $n_0>M$.这就证明了 $\mathbf{N}_{+}$ 无上界. □

读者还可自行证明:任何有限区间都是有界集,无限区间都是无界集;由有限个数组成的数集是有界集.

若数集 S 有上界,则显然它有无穷多个上界,而其中最小的一个上界常常具有重要的作用,称它为数集 S 的上确界.同样,有下界数集的最大下界,称为该数集的下确界.下面给出数集的上确界和下确界的精确定义.

定义 2 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集.若数 η 满足:

(i) 对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha<\eta$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\alpha$,即 η 又是 S 的最小上界,

则称数 η 为数集 S 的**上确界**,记作

---

① $[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数,例如 $[2.9]=2,[-4.1]=-5$.

$$\eta=\sup S^{①}.$$

定义 3 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集.若数 ξ 满足:

(i) 对一切 $x\in S$,有 $x\geqslant\xi$,即 ξ 是 S 的下界;

(ii) 对任何 $\beta>\xi$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0<\beta$,即 ξ 又是 S 的最大下界,

则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**,记作

$$\xi=\inf S.$$

上确界与下确界统称为**确界**.

例 2 设 $S=\{x\mid x$ 为区间 $(0,1)$ 上的有理数$\}$.试按上、下确界的定义验证:$\sup S=1,\inf S=0$.

解 先验证 $\sup S=1$:

(i) 对一切 $x\in S$,显然有 $x\leqslant 1$,即 1 是 S 的上界.

(ii) 对任何 $\alpha<1$,若 $\alpha\leqslant 0$,则任取 $x_0\in S$,都有 $x_0>\alpha$;若 $\alpha>0$,则由有理数集在实数集中的稠密性,在 $(\alpha,1)$ 上必有有理数 x_0,即存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\alpha$.

类似地可验证 $\inf S=0$. □

读者还可自行验证:闭区间 $[0,1]$ 的上、下确界分别为 1 和 0;对于数集 $E=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\middle| n=1,2,\cdots\right\}$,有 $\sup E=\dfrac{1}{2}$,$\inf E=-1$;正整数集 $\mathbf{N}_+$ 有下确界 $\inf\mathbf{N}_+=1$,而没有上确界.

注 1 由上(下)确界的定义可见,若数集 S 存在上(下)确界,则一定是唯一的.又若数集 S 存在上、下确界,则有 $\inf S\leqslant\sup S$.

注 2 从上面一些例子可见,数集 S 的确界可能属于 S,也可能不属于 S.

例 3 设数集 S 有上确界.证明

$$\eta=\sup S\in S\Leftrightarrow\eta=\max S^{②}.$$

证 $\Rightarrow$) 设 $\eta=\sup S\in S$,则对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,而 $\eta\in S$,故 η 是数集 S 中最大的数,即 $\eta=\max S$.

$\Leftarrow$) 设 $\eta=\max S$,则 $\eta\in S$;下面验证 $\eta=\sup S$:

(i) 对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha<\eta$,只需取 $x_0=\eta\in S$,则 $x_0>\alpha$.从而满足 $\eta=\sup S$ 的定义. □

关于数集确界的存在性,我们给出如下确界原理.

定理 1.1(确界原理) 设 S 为非空数集.若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

证 我们只证明关于上确界的结论,后一结论可类似地证明.

为叙述方便,不妨设 S 含有非负数.由于 S 有上界,故可找到非负整数 n,使得

1) 对于任何 $x\in S$,有 $x<n+1$;

2) 存在 $a_0\in S$,使 $a_0\geqslant n$.

对半开区间 $[n,n+1)$ 作 10 等分,分点为 $n.1,n.2,\cdots,n.9$,则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_1,使得

① sup 是拉丁文 supremum(上确界)一词的简写,下面的 inf 是拉丁文 infimum(下确界)一词的简写.

② 记号 max 是 maximum(最大)一词的简写,$\eta=\max S$ 表示数 η 是数集 S 中最大的数.以下将出现的记号 min 是 minimum(最小)一词的简写,min S 表示数集 S 中最小的数.