



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编

高等教育出版社

非外借



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第五版（上册）

华东师范大学数学科学学院 编



高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、普通高等教育“十一五”国家级规划教材和面向 21 世纪课程教材, 主要内容包括实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等, 附录为实数理论和积分表, 书后附微积分学简史。

本次修订是在第四版的基础上对一些内容进行适当调整, 使教材逻辑性更合理, 并适当补充数字资源。第五版仍旧保持前四版“内容选取适当, 深入浅出, 易教易学, 可读性强”的特点。

本书可作为高等学校数学和其他相关专业的教材使用。

图书在版编目 (C I P) 数据

数学分析.上册 / 华东师范大学数学科学学院编.
--5 版. --北京: 高等教育出版社, 2019.5
ISBN 978-7-04-050694-5

I. ①数… II. ①华… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 229064 号

项目策划 李艳馥 兰莹莹 李蕊
策划编辑 兰莹莹 李蕊 责任编辑 兰莹莹 封面设计 王凌波 版式设计 杜微言
插图绘制 于博 责任校对 李大鹏 责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	20.25	版 次	1981 年 4 月第 1 版
字 数	440 千字		2019 年 5 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印 次	2019 年 5 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	44.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 50694-00

数学分析

第五版(上册)

华东师范大学数学科学学院 编

1. 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1210369>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
2. 注册并登录, 进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号(20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用



数学分析简史(上)



数学分析简史(下)



编者的话(初版)

<http://abook.hep.com.cn/1210369>

第五版前言

华东师范大学数学系编写的《数学分析》(上、下册)自1980年初版诞生以来,相继于1990年和2001年两次再版,1987年荣获全国第一届高等学校优秀教材优秀奖,2004年荣获上海市优秀教材一等奖,并于2010年出版第四版。自第四版出版以来,教材向着信息化和精美化的方向发展,在使用中也发现了一些还可以继续完善的地方,在此背景下我们着手第五版修订。

为做好本次修订,前期我们进行了广泛调研,征集使用意见,并召开了教材修订会,而后根据当前教材发展的新形势,最终确定第五版的修订方案。本次修改的主要原则是基本保留第四版的风格,对某些不完善之处进行必要的处理,并适当补充数字资源(以图标 \otimes , $\textcircled{\text{III}}$ 示意)。

本次修改的主要内容有:

1. 增加了对函数 $y=x^n, x>0$ 值域的讨论,从而明确了其反函数 $y=\sqrt[n]{x}$ 的定义域,这就补上了第四版的一个不足;
2. 为了保证大学数学与中学数学内容的衔接,根据授课老师的建议,此次再版将三角函数的和差化积公式、积化和差公式作为习题出现在教材上;
3. 在有理函数的部分分式分解讲解中,我们适当作了一些说明;
4. 对 $y=(1+x)^\alpha$ 幂级数的展开式处理稍作修改;
5. 对一些例题进行适当的增减;
6. 将“微积分学简史”作为数字资源。

参加第五版编写工作的老师有:

- 庞学诚 任主编,并负责编写第一章至第七章;
吴 畏 负责编写第八章至第十一章,以及第十三章;
柴 俊 负责编写第十二章、第十四章至第十八章;
戴浩晖 负责编写第十九章至第二十三章。

在编写过程中,一直得到我校数学科学学院老师的关心和帮助,高等教育出版社的编辑也付出了辛勤的劳动,对此我们表示衷心的感谢。在这里我们还要感谢复旦大学楼红卫教授、浙江大学阮火军教授,同时还要感谢在本书的修订和出版过程中积极提出建议的所有朋友。



第四版前言



第三版前言



再版的话

本书自 1980 年第一版出版以来,深受广大读者的关爱与支持,在此我们一并致以深切谢意!并衷心希望读者在阅读和使用本教材的过程中继续提出宝贵意见。

编者


2018 年 2 月

第一章 实数集与函数	1
§ 1 实数	1
一、实数及其性质	1
二、绝对值与不等式	3
§ 2 数集·确界原理	4
一、区间与邻域	4
二、有界集·确界原理	5
§ 3 函数概念	8
一、函数的定义	9
二、函数的表示法	9
三、函数的四则运算	10
四、复合函数	11
五、反函数	11
六、初等函数	13
§ 4 具有某些特性的函数	14
一、有界函数	15
二、单调函数	16
三、奇函数和偶函数	17
四、周期函数	17
第二章 数列极限	21
§ 1 数列极限概念	21
§ 2 收敛数列的性质	26
§ 3 数列极限存在的条件	32
第三章 函数极限	41
§ 1 函数极限概念	41
一、 x 趋于 ∞ 时函数的极限	41
二、 x 趋于 x_0 时函数的极限	42
§ 2 函数极限的性质	46
§ 3 函数极限存在的条件	50
§ 4 两个重要的极限	53
一、证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	53
二、证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	54

§ 5	无穷小量与无穷大量	56
	一、无穷小量	56
	二、无穷小量阶的比较	57
	三、无穷大量	59
	四、曲线的渐近线	61
第四章	函数的连续性	65
§ 1	连续性概念	65
	一、函数在一点的连续性	65
	二、间断点及其分类	66
	三、区间上的连续函数	68
§ 2	连续函数的性质	69
	一、连续函数的局部性质	69
	二、闭区间上连续函数的基本性质	71
	三、反函数的连续性	73
	四、一致连续性	74
§ 3	初等函数的连续性	78
	一、指数函数的连续性	78
	二、初等函数的连续性	80
第五章	导数和微分	83
§ 1	导数的概念	83
	一、导数的定义	83
	二、导函数	85
	三、导数的几何意义	87
§ 2	求导法则	90
	一、导数的四则运算	90
	二、反函数的导数	92
	三、复合函数的导数	93
	四、基本求导法则与公式	95
§ 3	参变量函数的导数	97
§ 4	高阶导数	100
§ 5	微分	104
	一、微分的概念	104
	二、微分的运算法则	106
	三、高阶微分	106
	四、微分在近似计算中的应用	107
第六章	微分中值定理及其应用	111
§ 1	拉格朗日定理和函数的单调性	111
	一、罗尔定理与拉格朗日定理	111
	二、单调函数	114
§ 2	柯西中值定理和不定式极限	117
	一、柯西中值定理	117
	二、不定式极限	118
§ 3	泰勒公式	125

一、带有佩亚诺型余项的泰勒公式	125
二、带有拉格朗日型余项的泰勒公式	128
三、在近似计算上的应用	130
§ 4 函数的极值与最大(小)值	132
一、极值判别	132
二、最大值与最小值	134
§ 5 函数的凸性与拐点	137
§ 6 函数图像的讨论	143
* § 7 方程的近似解	145
第七章 实数的完备性	150
§ 1 关于实数集完备性的基本定理	150
一、区间套定理	150
二、聚点定理与有限覆盖定理	151
* 三、实数完备性基本定理之间的等价性	154
* § 2 上极限和下极限	156
第八章 不定积分	161
§ 1 不定积分概念与基本积分公式	161
一、原函数与不定积分	161
二、基本积分表	163
§ 2 换元积分法与分部积分法	166
一、换元积分法	166
二、分部积分法	171
§ 3 有理函数和可化为有理函数的不定积分	175
一、有理函数的不定积分	175
二、三角函数有理式的不定积分	179
三、某些无理根式的不定积分	180
第九章 定积分	186
§ 1 定积分概念	186
一、问题提出	186
二、定积分的定义	187
§ 2 牛顿—莱布尼茨公式	190
§ 3 可积条件	192
一、可积的必要条件	193
二、可积的充要条件	193
三、可积函数类	194
§ 4 定积分的性质	198
一、定积分的基本性质	198
二、积分中值定理	202
§ 5 微积分学基本定理·定积分计算(续)	205
一、变限积分与原函数的存在性	205
二、换元积分法与分部积分法	209
三、泰勒公式的积分型余项	212
* § 6 可积性理论补叙	215

	一、上和与下和的性质	215
	二、可积的充要条件	217
第十章	定积分的应用	222
§ 1	平面图形的面积	222
§ 2	由平行截面面积求体积	225
§ 3	平面曲线的弧长与曲率	229
	一、平面曲线的弧长	229
	二、曲率	233
§ 4	旋转曲面的面积	236
	一、微元法	236
	二、旋转曲面的面积	237
§ 5	定积分在物理中的某些应用	239
	一、液体静压力	239
	二、引力	240
	三、功与平均功率	241
* § 6	定积分的近似计算	243
	一、梯形法	243
	二、抛物线法	244
第十一章	反常积分	247
§ 1	反常积分概念	247
	一、问题提出	247
	二、两类反常积分的定义	248
§ 2	无穷积分的性质与敛散判别	252
	一、无穷积分的性质	252
	二、非负函数无穷积分的敛散判别法	253
	三、一般无穷积分的敛散判别法	255
§ 3	瑕积分的性质与敛散判别	258
附录 I	实数理论	263
	一、建立实数的原则	263
	二、分析	264
	三、分划全体所成的有序集	266
	四、 \mathbf{R} 中的加法	267
	五、 \mathbf{R} 中的乘法	268
	六、 \mathbf{R} 作为 \mathbf{Q} 的扩充	270
	七、实数的无限小数表示	271
	八、无限小数四则运算的定义	272
附录 II	积分表	275
	一、含有 x^n 的形式	275
	二、含有 $a+bx$ 的形式	275
	三、含有 $a^2 \pm x^2, a>0$ 的形式	276
	四、含有 $a+bx+cx^2, b^2 \neq 4ac$ 的形式	276
	五、含有 $\sqrt{a+bx}$ 的形式	276

六、含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $a > 0$ 的形式	277
七、含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ 的形式	277
八、含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的形式	278
九、含有 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的形式	279
十、含有反三角函数的形式	279
十一、含有 e^x 的形式	280
十二、含有 $\ln x$ 的形式	280
部分习题答案与提示	282
索引	303
 微积分学简史	308

§1 实数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数.为此,我们先简要叙述实数的有关概念.

一、实数及其性质

在中学数学课程中,我们知道实数由有理数与无理数两部分组成.有理数可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数, $q \neq 0$) 表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示;而无限十进不循环小数则称为无理数.有理数和无理数统称为实数.

为了以下讨论的需要,我们把有限小数(包括整数)也表示为无限小数.对此我们作如下规定:对于正有限小数(包括正整数) x ,当 $x = a_0.a_1a_2 \cdots a_n$ 时,其中 $0 \leq a_i \leq 9, i = 1, 2, \cdots, n, a_n \neq 0, a_0$ 为非负整数,记

$$x = a_0.a_1a_2 \cdots (a_n - 1)999\ 9 \cdots,$$

而当 $x = a_0$ 为正整数时,则记

$$x = (a_0 - 1).999\ 9 \cdots,$$

例如 2.001 记为 2.000 999 9...;对于负有限小数(包括负整数) y ,则先将 $-y$ 表示为无限小数,再在所得无限小数之前加负号,例如 -8 记为 -7.999 9...;又规定数 0 表示为 0.000 0...于是,任何实数都可用一个确定的无限小数来表示.

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法.现定义两个实数的大小关系.

定义 1 给定两个非负实数

$$x = a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots, \quad y = b_0.b_1b_2 \cdots b_n \cdots,$$

其中 a_0, b_0 为非负整数, $a_k, b_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为整数, $0 \leq a_k \leq 9, 0 \leq b_k \leq 9$.若有

$$a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则称 x 与 y 相等,记为 $x = y$;若 $a_0 > b_0$ 或存在非负整数 l ,使得

$$a_k = b_k (k = 0, 1, 2, \cdots, l) \text{ 而 } a_{l+1} > b_{l+1},$$

则称 x 大于 y 或 y 小于 x ,分别记为 $x > y$ 或 $y < x$.

对于负实数 x, y ,若按上述规定分别有 $-x = -y$ 与 $-x > -y$,则分别称 $x = y$ 与 $x < y$ (或

$y > x$). 另外, 规定任何非负实数大于任何负实数.

以下给出通过有限小数来比较两个实数大小的等价条件. 为此, 先给出如下定义.

定义 2 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数. 称有理数

$$x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为实数 x 的 n 位不足近似, 而有理数

$$\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

称为 x 的 n 位过剩近似, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

对于负实数 $x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, 其 n 位不足近似与过剩近似分别规定为

$$x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n} \quad \text{与} \quad \bar{x}_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n.$$

注 不难看出, 实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减, 即有 $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$, 而过剩近似 \bar{x}_n 当 n 增大时不增, 即有 $\bar{x}_0 \geq \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \geq \cdots$.

我们有以下的命题.

命题 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y = b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数, 则 $x > y$ 的等价条件是: 存在非负整数 n , 使得

$$x_n > \bar{y}_n,$$

其中 x_n 表示 x 的 n 位不足近似, \bar{y}_n 表示 y 的 n 位过剩近似.

关于这个命题的证明, 以及关于实数的四则运算法则的定义, 可参阅本书附录 I 第八节.

例 1 设 x, y 为实数, $x < y$. 证明: 存在有理数 r , 满足

$$x < r < y.$$

证 由于 $x < y$, 故存在非负整数 n , 使得 $\bar{x}_n < y_n$. 令

$$r = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + y_n),$$

则 r 为有理数, 且有

$$x \leq \bar{x}_n < r < y_n \leq y,$$

即得 $x < r < y$. □

为方便起见, 通常将全体实数构成的集合记为 \mathbf{R} , 即

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

实数有如下一些主要性质:

1. 实数集 \mathbf{R} 对加、减、乘、除 (除数不为 0) 四则运算是封闭的, 即任意两个实数的和、差、积、商 (除数不为 0) 仍然是实数.
2. 实数集是有序的, 即任意两实数 a, b 必满足下述三个关系之一: $a < b, a = b, a > b$.
3. 实数的大小关系具有传递性, 即若 $a > b, b > c$, 则有 $a > c$.
4. 实数具有阿基米德 (Archimedes) 性, 即对任何 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $b > a > 0$, 则存在正整数 n , 使得 $na > b$.
5. 实数集 \mathbf{R} 具有稠密性, 即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数, 且既有有理数 (见例 1), 也有无理数.

6. 如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原点,指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向),并规定一个单位长度,则称此直线为**数轴**.可以说明:任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数.于是,实数集 \mathbf{R} 与数轴上的点有着一一对应关系.在本书以后的叙述中,常把“实数 a ”与“数轴上的点 a ”这两种说法看作具有相同的含义.

例 2 设 $a, b \in \mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε , 有 $a < b + \varepsilon$, 则 $a \leq b$.

证 用反证法.倘若结论不成立,则根据实数集的有序性,有 $a > b$. 令 $\varepsilon = a - b$, 则 ε 为正数且 $a = b + \varepsilon$, 但这与假设 $a < b + \varepsilon$ 相矛盾.从而必有 $a \leq b$. \square

关于实数的定义与性质的详细论述,有兴趣的读者可参阅本书附录 I.

二、绝对值与不等式

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质:

1. $|a| = |-a| \geq 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时有 $|a| = 0$.
2. $-|a| \leq a \leq |a|$.
3. $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$, $|a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h$ ($h > 0$).
4. 对任何 $a, b \in \mathbf{R}$, 都有如下的**三角形不等式**:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

5. $|ab| = |a| |b|$.

6. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$).

下面只证明性质 4, 其余性质由读者自行证明.

由性质 2 有

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

两式相加后得到

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

根据性质 3, 上式等价于

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (1)$$

将(1)式中 b 换成 $-b$, (1)式右边不变, 即得 $|a - b| \leq |a| + |b|$, 这就证明了性质 4 不等式的右半部分. 又由 $|a| = |a - b + b|$, 据(1)式有

$$|a| \leq |a - b| + |b|.$$

从而得

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \quad (2)$$

将(2)式中 b 换成 $-b$, 即得 $|a| - |b| \leq |a + b|$. 性质 4 得证. \square

习 题 1.1

1. 设 a 为有理数, x 为无理数. 证明:

(1) $a+x$ 是无理数; (2) 当 $a \neq 0$ 时, ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1) > 0$; (2) $|x-1| < |x-3|$; (3) $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x-2}$.

3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$. 证明: 若对任何正数 ε , 有 $|a-b| < \varepsilon$, 则 $a=b$.

4. 设 $x \neq 0$, 证明 $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$, 并说明其中等号何时成立.

5. 证明: 对任何 $x \in \mathbf{R}$, 有

(1) $|x-1| + |x-2| \geq 1$; (2) $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$.

并说明等号何时成立.

6. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ (\mathbf{R}^+ 表示全体正实数的集合). 证明

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

7. 设 $x > 0, b > 0, a \neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

8. 设 p 为正整数. 证明: 若 p 不是完全平方数, 则 \sqrt{p} 是无理数.

9. 设 a, b 为给定实数. 试用不等式符号 (不用绝对值符号) 表示下列不等式的解:

(1) $|x-a| < |x-b|$; (2) $|x-a| < x-b$; (3) $|x^2-a| < b$.

§ 2 数集 · 确界原理

本节中我们先定义 \mathbf{R} 中两类重要的数集——区间与邻域, 然后讨论有界集, 并给出确界定义和确界原理.

一、区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$. 我们称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b) ; 数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$; 数集 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 和 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 都称为半开半闭区间, 分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$. 以上这几类区间统称为有限区间. 从数轴上来看, 开区间 (a, b) 表示 a, b 两点间所有点的集合, 闭区间 $[a, b]$ 比开区间 (a, b) 多两个端点, 半开半闭区间 $[a, b)$ 比开区间 (a, b) 多一个端点 a 等.

满足关系式 $x \geq a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a, +\infty)$, 这里符号 ∞ 读作“无穷大”, $+\infty$ 读作“正无穷大”. 类似地, 我们记

$$\begin{aligned} (-\infty, a] &= \{x \mid x \leq a\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, \\ (-\infty, a) &= \{x \mid x < a\}, (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}, \end{aligned}$$

其中 $-\infty$ 读作“负无穷大”.以上这几类数集都称为无限区间.有限区间和无限区间统称为区间.

设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$.满足绝对值不等式 $|x-a| < \delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a; \delta)$,或简单地写作 $U(a)$,即有

$$U(a; \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^\circ(a; \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

它也可简单地记作 $U^\circ(a)$.注意, $U^\circ(a; \delta)$ 与 $U(a; \delta)$ 的差别在于: $U^\circ(a; \delta)$ 不包含点 a .

此外,我们还常用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a; \delta) = [a, a + \delta)$,简记为 $U_+(a)$;

点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a; \delta) = (a - \delta, a]$,简记为 $U_-(a)$;

($U_-(a)$ 与 $U_+(a)$ 去除点 a 后,分别为点 a 的空心 δ 左、右邻域,简记为 $U_-^\circ(a)$ 与 $U_+^\circ(a)$.)

∞ 邻域 $U(\infty) = \{x \mid |x| > M\}$,其中 M 为充分大的正数(下同);

$+\infty$ 邻域 $U(+\infty) = \{x \mid x > M\}$;

$-\infty$ 邻域 $U(-\infty) = \{x \mid x < -M\}$.

二、有界集 · 确界原理

定义 1 设 S 为 \mathbf{R} 中的一个数集.若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x \in S$,都有 $x \leq M(x \geq L)$,则称 S 为有上界(下界)的数集,数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界).

若数集 S 既有上界又有下界,则称 S 为有界集.若 S 不是有界集,则称 S 为无界集.

例 1 证明数集 $\mathbf{N}_+ = \{n \mid n \text{ 为正整数}\}$ 有下界而无上界.

证 显然,任何一个不大于1的实数都是 \mathbf{N}_+ 的下界,故 \mathbf{N}_+ 为有下界的数集.

为证 \mathbf{N}_+ 无上界,按照定义只需证明:对于无论多么大的数 M ,总存在某个正整数 $n_0 (\in \mathbf{N}_+)$,使得 $n_0 > M$.事实上,对任何正数 M (无论多么大),取 $n_0 = [M] + 1$ ^①,则 $n_0 \in \mathbf{N}_+$,且 $n_0 > M$.这就证明了 \mathbf{N}_+ 无上界. \square

读者还可自行证明:任何有限区间都是有界集,无限区间都是无界集;由有限个数组成的数集是有界集.

若数集 S 有上界,则显然它有无穷多个上界,而其中最小的一个上界常常具有重要的作用,称它为数集 S 的上确界.同样,有下界数集的最大下界,称为该数集的下确界.下面给出数集的上确界和下确界的精确定义.

定义 2 设 S 是 \mathbf{R} 中的一个数集.若数 η 满足:

(i) 对一切 $x \in S$,有 $x \leq \eta$,即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$,存在 $x_0 \in S$,使得 $x_0 > \alpha$,即 η 又是 S 的最小上界,

则称数 η 为数集 S 的上确界,记作

^① $[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数,例如 $[2.9] = 2, [-4.1] = -5$.

$$\eta = \sup S^{①}.$$

定义 3 设 S 是 \mathbf{R} 中的一个数集.若数 ξ 满足:

- (i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是 S 的下界;
- (ii) 对任何 $\beta > \xi$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$, 即 ξ 又是 S 的最大下界,

则称数 ξ 为数集 S 的下确界, 记作

$$\xi = \inf S.$$

上确界与下确界统称为确界.

例 2 设 $S = \{x \mid x \text{ 为区间 } (0, 1) \text{ 上的有理数}\}$. 试按上、下确界的定义验证: $\sup S = 1, \inf S = 0$.

解 先验证 $\sup S = 1$:

(i) 对一切 $x \in S$, 显然有 $x \leq 1$, 即 1 是 S 的上界.

(ii) 对任何 $\alpha < 1$, 若 $\alpha \leq 0$, 则任取 $x_0 \in S$, 都有 $x_0 > \alpha$; 若 $\alpha > 0$, 则由有理数集在实数集中的稠密性, 在 $(\alpha, 1)$ 上必有有理数 x_0 , 即存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$.

类似地可验证 $\inf S = 0$. □

读者还可自行验证: 闭区间 $[0, 1]$ 的上、下确界分别为 1 和 0; 对于数集 $E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, 有 $\sup E = \frac{1}{2}, \inf E = -1$; 正整数集 \mathbf{N}_+ 有下确界 $\inf \mathbf{N}_+ = 1$, 而没有上确界.

注 1 由上(下)确界的定义可见, 若数集 S 存在上(下)确界, 则一定是唯一的. 又若数集 S 存在上、下确界, 则有 $\inf S \leq \sup S$.

注 2 从上面一些例子可见, 数集 S 的确界可能属于 S , 也可能不属于 S .

例 3 设数集 S 有上确界. 证明

$$\eta = \sup S \in S \Leftrightarrow \eta = \max S^{②}.$$

证 \Rightarrow) 设 $\eta = \sup S \in S$, 则对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$, 而 $\eta \in S$, 故 η 是数集 S 中最大的数, 即 $\eta = \max S$.

\Leftarrow) 设 $\eta = \max S$, 则 $\eta \in S$; 下面验证 $\eta = \sup S$:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$, 即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$, 只需取 $x_0 = \eta \in S$, 则 $x_0 > \alpha$. 从而满足 $\eta = \sup S$ 的定义. □

关于数集确界的存在性, 我们给出如下确界原理.

定理 1.1(确界原理) 设 S 为非空数集. 若 S 有上界, 则 S 必有上确界; 若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

证 我们只证明关于上确界的结论, 后一结论可类似地证明.

为叙述方便, 不妨设 S 含有非负数. 由于 S 有上界, 故可找到非负整数 n , 使得

1) 对于任何 $x \in S$, 有 $x < n+1$;

2) 存在 $a_0 \in S$, 使 $a_0 \geq n$.

对半开区间 $[n, n+1)$ 作 10 等分, 分点为 $n.1, n.2, \dots, n.9$, 则存在 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中的一个数 n_1 , 使得

① \sup 是拉丁文 supremum(上确界)一词的简写, 下面的 \inf 是拉丁文 infimum(下确界)一词的简写.

② 记号 \max 是 maximum(最大)一词的简写, $\eta = \max S$ 表示数 η 是数集 S 中最大的数. 以下将出现的记号 \min 是 minimum(最小)一词的简写, $\min S$ 表示数集 S 中最小的数.