射影几何学

吉林师范大学函授教育处

吉林师范大学数学函授教材

射影几何学

孙福元　蔡昌令　郭卫中　編

吉林师范大学函授教育处

1959·7·長春

目 录

緒　言

§1. 射影几何学的沿革、对象、方法和任务

1.1. 虽然在数学里，对于一个学科領域，在熟习与掌握它以前，很难闡明它的一般的完整概念，射影几何学也不例外；但是为了明确方向，促进学习，对于我們所要学习的这一学科，应該首先把它的沿革、对象、方法和任务給以概括的叙述。

射影几何学的产生和发展，和其他科学一样，是由于人类的生活和生产的需要。我們知道古代几何学，应当以欧几里得"几何原本"为典型代表，它总結了在它以前大約三个世紀的希腊的数学发展成果。从那时起直到現在为止，尽管"几何原本"有某些缺点，但是仍被認为是科学的严格論証体裁的典范。到了十七世紀，特别是当解析几何学出現以后，几何学的研究和发展进入了一个新的阶段。虽然解析几何学与古代几何学在內容上沒多大区别，但是在当时关于几何方法的研究却占了主要地位，到十八世紀末和十九世紀初这个时期，由于繪图和建筑的需要，几何学在应用方面发展而出現所謂画法几何，它的創始人是孟日（Monge，1746—1818）；并且由于画法几何理論方面的发展而产生了几何学的一个新的分支——射影几何学。它的創始人可以說是彭斯列（Poncelet，1788——1867）。繼彭斯列之后，沙尔（Chasles，1793—1880）和斯丹納（Steiner，1796—1863）改进了射影几何的研究工具，并且把它們应用到各种几何領域，因而得到了很大的成果。到了十九世紀末期，經凱雷（Cayley，1821—1895）和克来因（Klein，1894

—1925)用变换群的方法研究了这个分支，射影几何学便成为完整独立的科学。如果說，起初射影几何学所研究的問題是大量的个别情形的話，那末到后来，它的主要意义，是在于它把各种几何学用变换群的概念相联系而統一起来。特别是初等几何学也可以用射影形式解釋为射影几何学的一部分。

1.2. 作为一門科学来說，总有它的研究对象。射影几何学所研究的对象是什么？为了易于說明这个問題，讓我們先簡單地提一下初等几何学研究的对象。大家知道，在初等几何学中，图形不变形狀而可以随意改变它的位置，这种位置的变更常叫做移动。图形在任意移动下，形狀、長度、角度、面积都是不变的。我們可以說，图形的这种不变性質和量，就是初等几何学的研究对象。用类似的想法。我們可以說明射影几何学的研究对象。为了易于理解，我們可从具体实例出发。設有一个图形，例如圓，从某个光源把它投射到平面上，它的射影可能是橢圓或拋物綫等，同样一个正三角形的射影可能是任意三角形。由此可見，图形的許多性質并不都轉移到它的射影上。同样，和图形有关的許多量在投射下也改变。如一个長度等于 a 的綫段經过中心投射以后，可以得到任意長的綫段。一个已知三角形的面积經过投射以后，可以得到大于或小于已知三角形的面积。总之，几何图形的某些性質和量經过投射后是改变了。但是，有一些性質和量是不变的，如直綫和二次曲綫經过投射后仍分别变为直綫和二次曲綫。在投射下，图形这些不变性質和量，就是射影几何学所研究的对象。

1.3. 任何一門科学都有它的研究方法，而且对于同一对象，研究方法可以是不同的。为了說明射影几何学所用的方法，我們先回忆一下以前研究几何学所用的方法。研究几何的方法，从古代到現在，一直广泛应用着所謂綜合法。这种方法的特点，

就是从几何图形直接来研究它的性質。这就是我們所熟知的初等几何所用的方法。用綜合法研究的几何学又叫做綜合几何学。当十七世紀解析几何学出現时，研究几何的一种新方法——代数法也就出現了。它的出現大大促进了几何学和有关学科的发展。代数法的实質是：使点与数組相对应，使几何图形与方程相联系，把几何問題变成代数問題用代数来解，然后利用相反的过程，把得到的結果再給以几何解釋。这样，代数就成为解决几何問題的有利工具。用代数法研究的几何学，可以叫做代数几何学。以后随着微积分学的产生和发展的同时，研究几何学的另一种新方法——分析法也就产生了。所謂分析法，就是用数学分析的理論来研究几何的一种方法。它的实質在于：在无穷小范圍內只要略去高阶无穷小，复杂的依賴关系就变成綫性的，不均匀过程就变成均匀的。因此，它是研究无穷小范圍內几何图形性質的一个有力工具。用分析法研究的几何学，叫做微分几何学。代数法与分析法有时合称为解析法。研究射影几何，如果用綜合法，就叫做綜合射影几何学；如果用代数法，就叫做代数射影几何学。考虑到讀者的接受程度和中学几何教学上的实际应用。本書采用綜合法。然而既或都是綜合射影几何学，但它的結構也可以是不同的，一种是以公理为基础，用純邏輯的推理来叙述射影几何，一种是从历史观点出发，从初步几何逐漸推广經仿射几何而进入射影几何，我們將用后一种方法。

1.4. 射影几何学不仅是完整的理論科学，而且也是有很大实用价值的一門学科。首先，我們知道，随着我国現代工业和建筑事业的发展，大量的应用着画法几何与制图学的知識。而从現在的趋势和既定的事实来看，射影几何学已成为研究画法几何学的强有力的理論工具。因此，学习射影几何学不仅对生

产建設有需要，而且也給学习画法几何学打下理論基础。其次，因为射影几何学主要不是研究大量的个别問題，而主要是把各种几何学統一起来。这样，就能使我們了解到：已經学过的几何学和將要学的，看来好象是互相无关，但实际上是可以綜合統一的。因此，就会使我們更清楚地了解各种几何学的关系，更深刻地理解几何学的一般概念。最后，学习射影几何学，能扩大知識領域，开扩眼界，并且可以利用射影方法从較高的观点来理解和处理初等几何中的某些問題。因此，作为一个中学数学教师学习射影几何学是必要的。

§2. 一一变換的概念

2.1. 一一变換的概念，在几何学里占有重要地位，并且在以后的叙述里，要常常涉及到这一概念。因此，我們首先了解这种概念的意义是必要的。在正式定义这一概念以前，我們先来看一个例子。

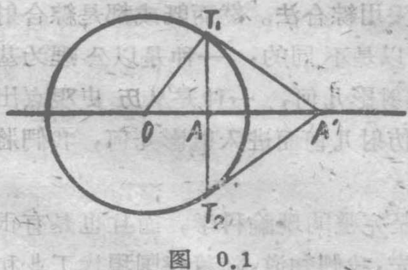

图 0.1

在平面上取一个定圓，設它的中心为 O，半徑为 R（图 0.1）。

除圓的中心 O 外，在平面上任取一点 A，使点 A 对应平面上的点 A'，并且滿足下面条件：

1. 点 O、A 和 A' 在一条直綫上；
2. $OA \cdot OA' = R^2$.

这样的对应叫做关于圓 O 的反演。

在关于圓 O 的反演下，对于圓O 內的点 A，要确定它的对应点 A' 时，可过点 A 作直綫 OA 的垂直弦 T_1T_2，自它的端点 T_1 或 T_2 作圓 O 的切綫，則切綫与直綫 OA 的交点 A' 就是点 A 的对应点。如果点 A 在圓外，按相反顺序作图，則得到它的对应点 A'. 显然，圓內的点对应圓外的点，圓外的点对应圓內的点，而圓 O 上的点都自身对应。

其次，在反演下点与点間的对应是相互的，也就是說，如果点 A 对应点 A'，則点 A' 也对应点 A。

此外，我們容易看出，在反演下通过点 O 的直綫对应本身，圓 O 也对应本身。

2.2. 通过上面关于在反演下，点与点間对应的特殊实例，我們就容易叙述一般的一一变換概念。

如果借助于某种法則，使平面上的每一点 A 对应平面上的一个确定点 A'，并且不同点对应不同点，則这种对应，叫做**平面的一一对应**。

在平面的一一对应下，从点 A 得到对应点A''的过程叫做**平面到本身的一一变換**。

上面所叙述的反演，就是平面到本身的一种一一变換（点 O 除外）。

在平面到本身的一一变換下，与本身的对应点重合的点叫做**二重点**与本身的对应直綫重合的直綫叫做**二重直綫**。如果某个图形与它的对应图形重合，則这样的图形叫做**二重图形**。

例如，在反演下圓 O 上的点都是二重点。通过点 O 的直綫都是二重直綫。圓 O 是二重图形。

現在研究逆变換的概念。

用 F表示平面到本身的一个一一变換，設在这个变換下，点 A对应点A'。

如果有某种法則，使平面上的点 A'，反过来能对应点 A，則从点 A' 得到点 A 的法則叫做变換 F 的逆变換，变換 F 的逆变換常用 F^{-1} 表示。显然，一一变換的逆变換也是一一变換。

对于反演，我們看出，平面上的点 A 对应 A'，反之，点 A' 也对应点 A。因此，反演的逆变換还是同一个反演。

如果某个一一变換 F 和它的逆变換 F^{-1} 是同一个变換；也就是在这种一一变換下，点 A 的对应点是 A'，而点 A' 的对应点又是点 A。則这种变換叫做对合变換。

反演就是一种对合变換。当然，对合变換是变換的一种特殊情形。

最后，我們来研究变換积的概念。

如果有一个一一变換 F_1，使点 A 变为 A_1，还有另一个变換 F_2，使点 A_1 又变为 A_2，則使点 A 变为 A_2 的变換 F 叫做变換 F_1 和 F_2 的积。兩个变換 F_1 和 F_2 的积 F 常用下面記号表示：

$$F=F_1 \cdot F_2.$$

显然，平面到本身的兩个一一变換的积也是一个一一变換。并且一个一一变換 F 和它逆变換 F^{-1} 的积使平面上每个点变为本身，因为 F 把点 A 变为 A'，而 F^{-1} 又把点 A' 变为 A。

使平面上每个点本身对应的变換，叫做恒等变換，恒等变換常用 E 表示。

因此，变換 F 和它逆变換 F^{-1} 的积是恒等变換 E：

$$E=F \cdot F^{-1}.$$

关于兩个平面或空間的对应等概念，可做类似定义。但我們以后的一切叙述，只限于在一个平面內，至于空間几何，在平面几何的基础上用类似方法加以推广就够了。

第一章　移　　动

§1. 移动的概念

1.1. 移动是欧几里得几何的最主要概念。在这一章里是我們研究这一概念的性質以及它在作图上的应用。

移动的概念可定义如下：

在平面到本身的一一变换下，如果对应綫段总是相等的，則这种变换叫做移动。

在移动下，如果图形ϕ变为ϕ'，則說图形ϕ合同于ϕ'。

移动具有下面的性質：

1. 移动W的逆变换W^{-1}仍是一个移动。

这个性質是显然的。根据这个性質可知，如果图形ϕ合同于ϕ'，則图形ϕ'也合同于ϕ。

2. 兩个移动W_1和W_2的积仍是一个移动

这个性質根据移动的定义可直接推出。并且根据这个性質可知，如果图形ϕ合同于ϕ_1，ϕ_1合同于ϕ_2，則图形ϕ合同于ϕ_2。

其次，由上面兩个性質可知，移动$W \cdot W^{-1}$是恒等移动，恒等移动把每个图形ϕ变为本身，因此，每个图形ϕ合同于它本身。

3. 在移动下，一条直綫上的点，仍变到一条直綫上；也就是直綫变为直綫。

事实上，設A、B、C是一条直綫a上的三个点，点B在

A 和 C 之間，A'、B'、C' 是它們的对应点（图1.1）根据移动的定义

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ AC=A'C'.$$

因为，

$$AB+BC=AC,$$

所以，

$$A'B'+B'C'=A'C'.$$

由此可知，点 A'、B'、C' 也在一条直綫 a' 上，并且点 B' 在 A' 和 C' 之間。

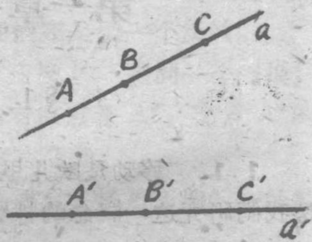

图 1.1

根据上述性質可知，在移动下半直綫变为半直綫，角、三角形、多角形和圓分别变为与它們合同的角、三角形、多角形和圓。并且兩点間的距离、角度、面积等都不变。

在移动下，几何图形的性質和有关的量，仍旧沒有改变的叫做移动的不变性質和不变量。

我們看出，移动的不变性質和不变量正是初等几何的主要研究对象。

1.2. 为了便于研究有关移动的問題，我們应該了解一个移动由什么条件决定。关于决定移动的条件有下面定理。

定理．**移动由三对对应点完全确定**

証明．設已知移动的三对对应点 A，A'；B，B'；C，C'，也就是把

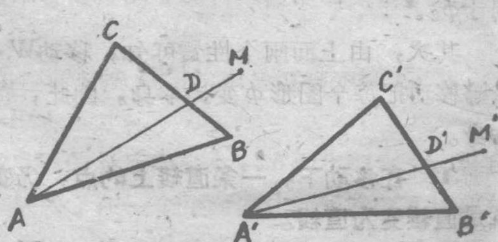

图 1.2

三角形 ABC 变为它的合同三角形 $A'B'C'$（图1.2）。我們只要証明把点 A 变为 A'；点 B 变为 B'；点 C 变为 C' 的移动只有一个就可以。

在平面上任取一点 M，連結点 M 和三角形 ABC 的一个頂点，例如頂点 A 使与对边或延長綫相交，用 D 表示綫段 AM 与边 BC 的交点。

根据移动的性質 3，点 D 的对应点 D' 在直綫 $B'C'$ 上并且是唯一的。同样，点 M 的对应点 M' 应該在直綫 $A'D'$ 上并且也是唯一的。因此，只有一个移动把三点 A、B、C 变为 A'、B'、C'。于是，定理得到証明。

从这个定理可以直接推出下面結論：

如果移动有三个二重点，則所有点都是二重点，也就是这个移动是恒等变换。

根据这个定理，当我們研究一个移动时，自然可以用它的兩个对应三角形来代替。

1.3. 移动可分为下列兩类：

把一个三角形变为同向三角形的移动，叫做第一种移动；反之，把一个三角形变为異向三角形的移动，叫做第二种

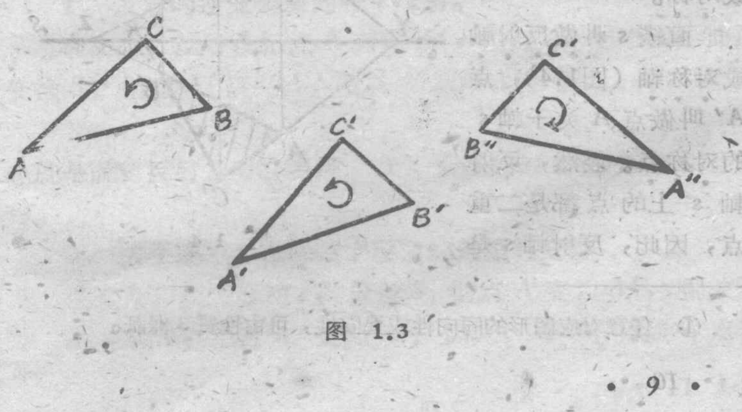

图 1.3

移动[①]。

如图1.3所示，有对应三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的移动是第一种移动；有对应三角形 ABC 和 $A''B''C''$ 的移动是第二种移动。

显然，两个同种移动的积是第一种移动；两个不同种移动的积是第二种移动。

平面的第一种移动的直观形象是一个平面，在它本身上滑动；第二种移动的直观形象是把一个平面翻轉后再随意地放在原来的位置。

§2. 反　射

2.1. 在前一节我們研究了一般的移动概念，下面几节的任务是研究它的特殊情形，首先我們来研究反射。

如果一一变换的每对对应点 A、A' 連結綫段，都垂直于同一直綫 s，且被直綫 s 所平分，則这种变换叫做关于直綫 s 的反射或对称。

直綫 s 叫做反射軸或对称軸（图1.4），点 A' 叫做点 A 关于軸 s 的对称点。显然，反射軸 s 上的点都是二重点，因此，反射軸 s 是

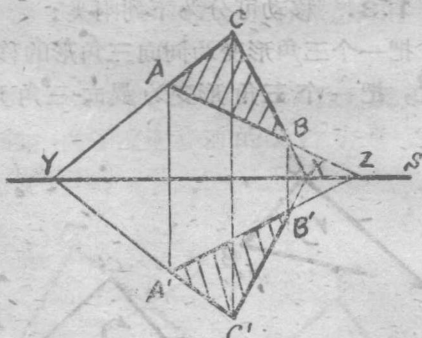

图 1.4

---

① 任意对应图形的同向性或異向性，可由性質3保証。

二重直綫。通过对应点的直綫也是二重直綫，但它上面的点除与軸 s 的交点外都不是二重点。

关于直綫的反射是移动，可由下面定理确定。

定理. **在反射下，对应綫段相等。**

証明. 設 AB 和 $A'B'$ 是对应綫段（图 1.5），綫段 AA' BB' 分别与軸 s 交于 A_0、B_0，这时，兩个直角三角形 BXY 和 $B'XY$ 合同，由此，$\angle BXY=\angle B'XY$，因而 $\angle AXB=\angle A'XB$. 因为 $BX=B'X$，$AX=A'X$，所以，三角形 ABX 和 $A'B'X$ 合同，因此 $AB=A'B'$.

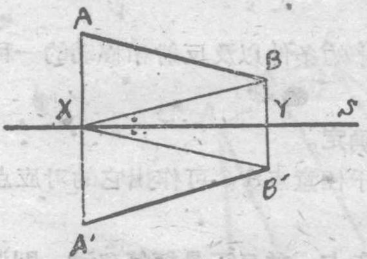

图 1.5

关于点 A、B 在軸 s 的不同側，或在軸的同一垂綫上的情形，也容易証明。

根据这个定理，可以断定反射是移动，显然反射是第二种移动，因为它把三角形变为異向三角形。例如图 1.4 里的三角形 CXY 和 $C'XY$；ABC 和 $A'B'C'$.

2.2. 关于直綫的反射具有下面性質：

1. 反射的逆变换是同一个反射。

事实上，反射 S 把点 A 变为 A'，把点 A' 变为 A，而逆变换 S^{-1} 把点 A' 变为 A，把点 A 变为 A'. 因此，

$$S=S^{-1}.$$

也就是說，反射是对合变换。关于直綫的对称图形是相互对称。

2. 关于同一个軸的兩个反射的是恒等变换

事实上，設关于軸 s 的反射 S_1 把点 A 变为 A'，则关于軸 s 的反射 S_2 把点 A' 变为 A. 因此，$S\cdot S_2$ 使每个点不

变。

3. 在反射下，对应直綫或者交于軸上，或者都与軸平行。

事实上，設反射的对应直綫是 AB 和 $A'B'$（图 1.4），如果直綫 AB 与軸 s 交于点 Z，因为点 Z 是二重点。所以，点 Z 必在直綫 AB 的对应直綫 $A'B'$ 上。也就是直綫 AB 和 $A'B'$ 交于点 Z。并且由此可知，如果直綫 AB 与軸 s 平行，則直綫 $A'B'$ 也和軸 s 平行。

2.3. 現在研究决定反射的条件以及反射和移动的一种重要关系。

定理. **反射由反射軸完全确定。**

証明. 有反射軸 s，則对于任意点 A，可作出它的对应点 A'，并且是唯一的。

定理. **如果移动有兩个二重点，并且不是恒等移动，則这个移动是关于过兩个二重点的直綫的反射。**

証明. 設已知移动的兩个二重点为 A、B（图1.6）。根据移动定义，則直綫 AB 上的每个点都是二重点。如果用 M、M' 表示不在直綫 AB 上的任意一对对应点。因为移动保持角的大小不变，所以，$\angle MAB=\angle M'AB$，$\angle MBA=\angle M'BA$。由于移动不是恒等变换，因而点 M 和 M' 必关于直綫 AB 对称，于是定理得到証明。

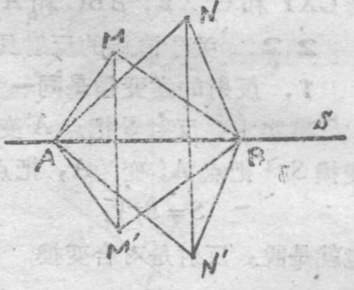

图 1.6

定理. **每个移动都可以表示为不多于三次反射的积。**

証明. 設任意移动是由兩个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 确定的