

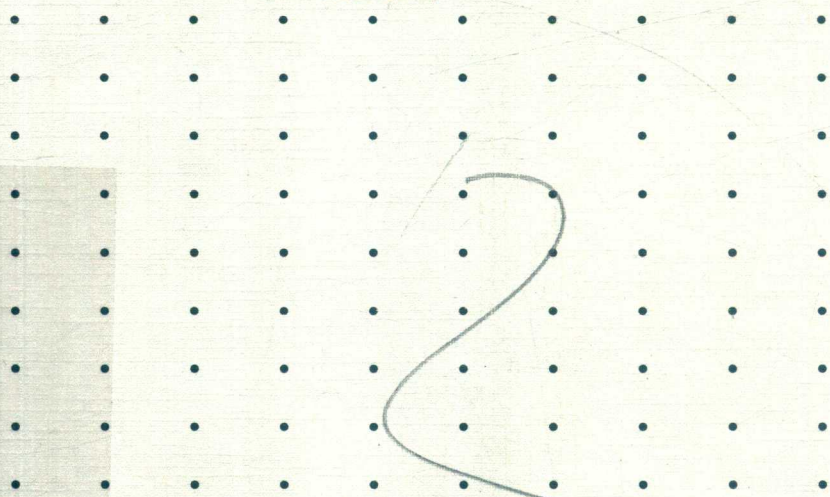


现代数学基础

68

科学计算中的 偏微分方程数值解法

■ 张文生



高等教育出版社



现代数学基础

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

68

科学计算中的 偏微分方程数值解法

■ 张文生



高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

科学计算中的偏微分方程数值解法 / 张文生编著

— 北京: 高等教育出版社, 2019.9

ISBN 978-7-04-052263-1

I. ①科… II. ①张… III. ①偏微分方程 - 数值计算

IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 154953 号

策划编辑 李华英
责任校对 刘娟娟

责任编辑 李华英
责任印制 毛斯璐

封面设计 张楠

版式设计 杨树

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 高教社(天津)印务有限公司
开本 787mm×1092mm 1/16
印张 25.75
字数 540千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2019年9月第1版
印 次 2019年9月第1次印刷
定 价 89.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 52263-00

前 言

在科学与工程计算中常常要数值求解各类偏微分方程,有限差分法、有限元方法和边界元方法是经常使用的方法,本书介绍这三方面的基本理论和数值离散方法.内容是作者在多年教学的基础上撰写而成的,既可作计算数学专业高年级本科生和研究生学习偏微分方程数值解之用,也适合其他相关专业的学生或科研人员学习参考.

全书共分十一章.第一章是预备知识,介绍一些重要基本概念和重要定理.第二章介绍差分近似导数的各种方法及差分格式的 Fourier 误差分析.第三章介绍紧致差分格式,与经典的差分格式相比,这类格式结合函数值及其导数值,可以用较少的结点构造出高阶精度的格式.第四章介绍差分格式的收敛性、相容性和稳定性的分析,重点介绍稳定性分析的 Fourier 级数法和矩阵分析法.第五章介绍抛物型方程的各种典型差分格式,包括二维热传导方程的不对称格式、交替方向隐式格式和局部一维化格式.第六章介绍双曲型方程的典型差分格式,包括差分格式的耗散和频散分析.第七章重点介绍流体力学中的一维守恒律方程的差分格式和高分辨率格式.第八章介绍椭圆型方程的差分方法,包括基于变分原理的差分方法和有限体积法,以及极坐标下 Poisson 方程的差分离散.第九章介绍有限元方法,包括有限元离散、Gauss 求积公式、等参元和误差分析的基本方法.第十章介绍边界元方法,重点基于第二 Green 公式直接推导了区域和边界积分方程,并给出了三维弹性问题的积分方程,包括积分方程的数值离散.偏微分方程采用有限差分、有限元和边界元方法数值离散后,往往归结为一个大型线性代数方程组的求解,常采用迭代法来求解,为此,最后第十一章介绍离散线性代数方程的迭代求解,包括基本迭代方法、预条件迭代方法、Krylov 子空间的迭代方法和多重网格法.

为适应不同专业特别是非计算数学或应用数学专业的需要,本书叙述由浅入深,

推导力求翔实,特别是关键性的步骤,并配以较多的例题,以使读者能更好地自学和掌握.本书强调处理问题的一般性理论方法及其应用,注重方法之间的内在联系和物理解释,努力在理论学习与方法应用之间架起一座桥梁.

本书是在作者拙作《科学计算中的偏微分方程有限差分法》(2006年第1版,高等教育出版社)的基础上进一步修订而成的.原书自出版之后,一直作为中国科学院大学的研究生教材或参考书使用,经过课堂实践检验,颇受欢迎,已多次重印.这次修订得到了国家科学技术学术著作出版基金的大力资助,主要更正了其中的一些错误,删掉了一些章节,对原书内容进行了精炼,并增加了紧致差分格式、有限元和边界元数值方法这三章内容,以更好适应教学需求.作者在撰写过程中,参考了国内外有关文献,如在有限差分数值解方法中参考了 [4, 5, 7, 38, 39, 44, 47, 49, 55, 56] 等,作者衷心感谢所有直接或间接被引文献的作者.此外,作者要感谢在使用原书和教学过程中有关师生提出的宝贵意见和帮助,也感谢有关专家、同事及我的学生的大力支持和帮助,以及本书编辑的辛勤劳动.最后,还要感谢国家自然科学基金项目 (11471328, 51739007) 所给予的支持和资助.由于作者学识浅陋,认识有限,书中不妥甚至错误可能难免,敬请读者批评指正和赐教.

现代数学基础图书清单

序号	书号	书名	作者
1	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 217179>	代数和编码(第三版)	万哲先 编著
2	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 221749>	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 235975>	实分析(第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 226171>	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 243079>	线性代数与矩阵论(第二版)	许以超 编著
6	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 244656>	矩阵论	詹兴致
7	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 244618>	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 247503>	泛函分析第二教程(第二版)	夏道行 等编著
9	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 253177>	无限维空间上的测度和积分 ——抽象调和分析(第二版)	夏道行 著
10	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 257724>	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 272611>	整体微分几何初步(第三版)	沈一兵 编著
12	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 263602>	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日]加藤和也、黑川信重、斋藤毅 著
13	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 263619>	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日]黑川信重、栗原将人、斋藤毅 著
14	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 380408>	微分方程与数学物理问题(中文校订版)	[瑞典]纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 274868>	有限群表示论(第二版)	曹锡华、时俭益
16	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 274318>	实变函数论与泛函分析(上册,第二版修订本)	夏道行 等编著
17	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 272482>	实变函数论与泛函分析(下册,第二版修订本)	夏道行 等编著
18	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 287073>	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 304480>	偏微分方程	孔德兴
20	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 310696>	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 316117>	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 316988>	多项式代数	王东明 等编著
23	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 319668>	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 319583>	变分学讲义	张恭庆 编著
25	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 322811>	现代极小曲面讲义	[巴西]F. Xavier、潮小李 编著
26	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 327113>	群表示论	丘维声 编著
27	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 346756>	可靠性数学引论(修订版)	曹晋华、程侃 著
28	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 343113>	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 357387>	次正常算子解析理论	夏道行
30	9 ⁷⁸⁷⁰⁴⁰ 348347>	数论 —— 从同余的观点出发	蔡天新

续表

序号	书号	书名	作者
31	9 787040 362688 >	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	9 787040 361681 >	工程数学的新方法	蒋耀林
33	9 787040 345254 >	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	9 787040 364729 >	数论基础	潘承洞 著
35	9 787040 369502 >	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	9 787040 370379 >	索伯列夫空间	王明新
37	9 787040 372526 >	伽罗瓦理论——天才的激情	章璞 著
38	9 787040 372663 >	李代数(第二版)	万哲先 编著
39	9 787040 386516 >	实分析中的反例	汪林
40	9 787040 388909 >	泛函分析中的反例	汪林
41	9 787040 373783 >	拓扑线性空间与算子谱理论	刘培德
42	9 787040 318456 >	旋量代数与李群、李代数	戴建生 著
43	9 787040 332605 >	格论导引	方捷
44	9 787040 395037 >	李群讲义	项武义、侯自新、孟道骥
45	9 787040 395020 >	古典几何学	项武义、王申怀、潘养廉
46	9 787040 404586 >	黎曼几何初步	伍鸿熙、沈纯理、虞言林
47	9 787040 410570 >	高等线性代数学	黎景辉、白正简、周国晖
48	9 787040 413052 >	实分析与泛函分析(续论)(上册)	匡继昌
49	9 787040 412857 >	实分析与泛函分析(续论)(下册)	匡继昌
50	9 787040 412239 >	微分动力系统	文兰
51	9 787040 413502 >	阶的估计基础	潘承洞、于秀源
52	9 787040 415131 >	非线性泛函分析(第三版)	郭大钧
53	9 787040 414080 >	代数学(上)(第二版)	莫宗坚、蓝以中、赵春来
54	9 787040 414202 >	代数学(下)(修订版)	莫宗坚、蓝以中、赵春来
55	9 787040 418736 >	代数编码与密码	许以超、马松雅 编著
56	9 787040 439137 >	数学分析中的问题和反例	汪林
57	9 787040 440485 >	椭圆型偏微分方程	刘宪高
58	9 787040 464832 >	代数数论	黎景辉
59	9 787040 456134 >	调和分析	林钦诚
60	9 787040 468625 >	紧黎曼曲面引论	伍鸿熙、吕以鞏、陈志华
61	9 787040 476743 >	拟线性椭圆型方程的现代变分方法	沈尧天、王友军、李周欣

续表

序号	书号	书名	作者
62	9 787040 479263 >	非线性泛函分析	袁荣
63	9 787040 496369 >	现代调和分析及其应用讲义	苗长兴
64	9 787040 497595 >	拓扑空间与线性拓扑空间中的反例	汪林
65	9 787040 505498 >	Hilbert 空间上的广义逆算子与 Fredholm 算子	海国君、阿拉坦仓
66	9 787040 507249 >	基础代数学讲义	章璞、吴泉水
67.1	9 787040 507256 >	代数学方法 (第一卷) 基础架构	李文威
68	9 787040 522631 >	科学计算中的偏微分方程数值解法	张文生

网上购书: www.hepmall.com.cn, gdjycbs.tmall.com, academic.hep.com.cn, www.jd.com,
www.amazon.cn, www.dangdang.com

其他订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社电子商务部汇款订购。
 书款通过银行转账, 支付成功后请将购买信息发邮件或
 传真, 以便及时发货。购书免邮费, 发票随书寄出 (大
 批量订购图书, 发票随后寄出)。

单位地址: 北京西城区德外大街4号

电 话: 010-58581118

传 真: 010-58581113

电子邮箱: gjdzfwb@pub.hep.cn

通过银行转账:

户 名: 高等教育出版社有限公司

开 户 行: 交通银行北京马甸支行

银行账号: 110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

目 录

第一章 基础知识	1
§1.1 偏微分方程基本概念	1
§1.1.1 方程的分类	2
§1.1.2 方程的特征线	3
§1.1.3 方程组的分类	5
§1.1.4 定解条件	7
§1.2 矩阵的基本概念	8
§1.3 矩阵重要性质与定理	11
§1.3.1 三对角矩阵特征值	12
§1.3.2 矩阵特征值估计及非奇异性判定	19
§1.3.3 Schur 定理	26
§1.4 向量和矩阵的范数	28
§1.4.1 矩阵范数与谱半径的关系	30
§1.4.2 矩阵范数的估计	31
§1.4.3 矩阵序列的收敛性	35
§1.5 常用定理	37
§1.5.1 实系数多项式的根	37
§1.5.2 Newton-Cotes 型数值积分公式	38
§1.5.3 Green 公式	39
§1.6 练习	40

第二章 有限差分近似基础	43
§2.1 网格及有限差分记号	43
§2.2 空间导数近似	45
§2.3 导数的算子表示	48
§2.4 任意阶精度差分格式的建立	51
§2.4.1 Taylor 级数表	51
§2.5 非均匀网格	54
§2.6 Fourier 误差分析	55
§2.7 练习	59
第三章 紧致差分格式	60
§3.1 差分近似的推广	60
§3.2 各阶导数的紧致格式	63
§3.2.1 一阶导数近似	63
§3.2.2 二阶导数近似	64
§3.2.3 三阶导数近似	65
§3.2.4 四阶导数近似	65
§3.3 交错网格上的紧致格式	66
§3.3.1 一阶导数	66
§3.3.2 二阶导数	66
§3.4 联合一阶和二阶导数的紧致格式	67
§3.4.1 系数对称	67
§3.4.2 系数非对称	68
§3.5 单边格式	69
§3.6 练习	69
第四章 差分格式稳定性分析	71
§4.1 收敛性	71
§4.1.1 初值问题	71
§4.1.2 初边值问题	73
§4.2 相容性	75
§4.2.1 初值问题	75
§4.2.2 初边值问题	80
§4.3 稳定性	84
§4.4 Lax 定理	88

§4.5 稳定性分析方法	89
§4.5.1 Fourier 级数法 (即 von Neumann 法).	90
§4.5.2 矩阵分析法	100
§4.6 练习	108
第五章 抛物型方程	111
§5.1 一维常系数扩散方程	111
§5.1.1 向前和向后差分格式	111
§5.1.2 加权隐式格式	112
§5.1.3 三层显式格式	113
§5.1.4 三层隐式格式	115
§5.1.5 预测 - 校正格式	116
§5.1.6 不对称格式	117
§5.2 对流扩散方程	120
§5.2.1 FTCS 格式	121
§5.2.2 单元法	122
§5.2.3 混合型格式	122
§5.3 二维热传导方程	125
§5.3.1 加权差分格式	125
§5.3.2 Saul'yev 不对称格式	126
§5.3.3 Du Fort-Frankel 格式	127
§5.3.4 交替方向隐式 (ADI) 格式	128
§5.3.5 局部一维 (LOD) 法	130
§5.4 练习	131
第六章 双曲型方程	133
§6.1 线性对流方程	133
§6.1.1 迎风格式	133
§6.1.2 Lax-Friedrichs 格式	134
§6.1.3 Lax-Wendroff 格式	137
§6.1.4 MacCormack 格式	138
§6.1.5 Wendroff 隐式格式	139
§6.1.6 Crank-Nicolson 格式	140
§6.2 特征线与差分格式	140
§6.3 数值耗散和数值频散	144
§6.3.1 偏微分方程的频散和耗散	144

§6.3.2 差分格式的频散与耗散	145
§6.4 一阶双曲型方程组	152
§6.4.1 特征形式	152
§6.4.2 差分格式	155
§6.5 一阶二维双曲型方程	158
§6.5.1 典型差分格式	158
§6.5.2 交替方向隐式 (ADI) 格式	161
§6.5.3 非线性方程	165
§6.6 波动方程	166
§6.6.1 一维波动方程	166
§6.6.2 二维波动方程	173
§6.7 练习	177
第七章 流体力学方程	179
§7.1 流体力学的控制方程	179
§7.2 二维非定常可压黏性流方程	183
§7.2.1 Lax-Wendroff 格式	183
§7.2.2 MacCormack 格式	184
§7.3 二维非定常不可压黏性流	186
§7.4 一维守恒律方程的差分格式	189
§7.5 高分辨率格式	196
§7.5.1 通量限制器法	197
§7.5.2 斜率限制器法	200
§7.6 守恒形式方程的矢通量分裂法	201
第八章 椭圆型方程	205
§8.1 两点边值问题的差分格式	205
§8.1.1 差分近似	206
§8.1.2 有限体积法	207
§8.2 基于变分原理的差分格式	210
§8.2.1 基于 Ritz 方法的差分近似	213
§8.2.2 基于 Galerkin 方法的差分近似	218
§8.3 Laplace 方程的五点差分格式	222
§8.4 有限体积法	231
§8.5 Poisson 方程基于 Ritz 方法的差分格式	232
§8.5.1 二维椭圆型边值问题的变分形式	232

§8.5.2 差分格式推导	235
§8.6 正三角形和正六边形网格	238
§8.7 边界条件的处理	240
§8.7.1 Dirichlet 边界条件	240
§8.7.2 Neumann 边界条件	242
§8.7.3 Robbins 边界条件	244
§8.8 差分格式的收敛性分析	247
§8.9 极坐标下 Poisson 方程的差分格式	250
§8.10 练习	256
第九章 有限元方法	258
§9.1 Sobolev 空间	258
§9.2 迹定理	262
§9.3 变分边值问题	264
§9.3.1 边值问题的变分形式	264
§9.3.2 解的存在性和唯一性	265
§9.4 Galerkin 方法	268
§9.5 Galerkin 近似解的误差与收敛性	270
§9.6 Rayleigh-Ritz 方法	273
§9.7 有限元离散	274
§9.7.1 一维问题	275
§9.7.2 二维问题	278
§9.7.3 三维问题	283
§9.8 Hermite 插值基函数	285
§9.9 Gauss 求积公式	288
§9.9.1 一维求积公式	288
§9.9.2 四边形单元求积公式	288
§9.9.3 三角形单元求积公式	290
§9.10 误差分析	292
§9.10.1 二阶问题的误差	298
§9.11 等参元和数值积分影响	299
§9.11.1 等参变换	299
§9.11.2 数值积分影响	301
第十章 边界元方法	302
§10.1 位势问题	302

§10.2 广义 Green 公式	303
§10.3 Laplace 方程的基本解	304
§10.4 区域积分方程	306
§10.5 边界积分方程	309
§10.5.1 推导方法一	309
§10.5.2 推导方法二	311
§10.6 积分方程的离散	313
§10.6.1 常数元	314
§10.6.2 线性元	317
§10.6.3 等参二次元	320
§10.7 三维弹性问题	322
§10.7.1 基本方程	322
§10.7.2 区域积分方程	323
§10.7.3 边界积分方程	325
§10.7.4 积分方程的离散	327
第十一章 离散方程的求解	329
§11.1 残量校正法	329
§11.1.1 迭代格式	329
§11.1.2 收敛性分析	330
§11.1.3 迭代中止准则	333
§11.2 基本迭代法	334
§11.2.1 Jacobi 迭代格式	335
§11.2.2 Gauss-Seidel 迭代格式	338
§11.2.3 逐次超松弛 (SOR) 迭代格式	342
§11.2.4 对称与反对称超松弛迭代格式	343
§11.2.5 其他迭代格式	345
§11.3 预条件迭代方法	348
§11.3.1 预条件 Richardson (PR) 法	349
§11.3.2 预条件 Richardson 极小残量 (PRMR) 法	352
§11.3.3 预条件 Richardson 最速下降 (PRSD) 法	353
§11.3.4 共轭梯度 (CG) 法	354
§11.3.5 预条件共轭梯度 (PCG) 法	360
§11.3.6 预条件子	361

§11.4 Krylov 子空间迭代方法	363
§11.4.1 共轭梯度法方程残量 (CGNR) 法	363
§11.4.2 共轭梯度法方程误差 (CGNE) 法	364
§11.4.3 广义共轭残量 (GCR) 法	364
§11.4.4 Orthodir 方法	365
§11.4.5 广义极小残量 (GMRES) 法	366
§11.4.6 极小残量 (MINRES) 法	370
§11.4.7 双共轭梯度 (Bi-CG) 法	374
§11.4.8 拟极小残量 (QMR) 法	377
§11.4.9 共轭梯度平方 (CGS) 法	378
§11.4.10 双共轭梯度稳定化 (BiCGSTAB) 法	379
§11.5 多重网格法	381
§11.5.1 低频分量与高频分量	381
§11.5.2 网格变换	381
§11.5.3 粗网格校正	384
§11.6 练习	386
参考文献	389
索引	392

第一章 基础知识

§1.1 偏微分方程基本概念

许多物理现象或过程受多个因素的影响而按一定规律在变化, 描述这种现象或过程的数学形式常导致偏微分方程. 偏微分方程的一般形式是

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0,$$

其中 x, y, \dots 是自变量, u 是未知函数, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$ 是 u 的偏导数. 一个偏微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数, 称为该方程的阶, 最高阶导数的幂次称为该方程的次数. 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = 2xy$$

是二阶一次偏微分方程, 而

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

是一阶二次偏微分方程. 当遇到的是相互依赖的几个偏微分方程时, 先把所有方程合并成一个单独方程再确定. 例如下列方程中虽然每个都含有一阶导数, 但是二阶的, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$v = \frac{\partial w}{\partial y},$$