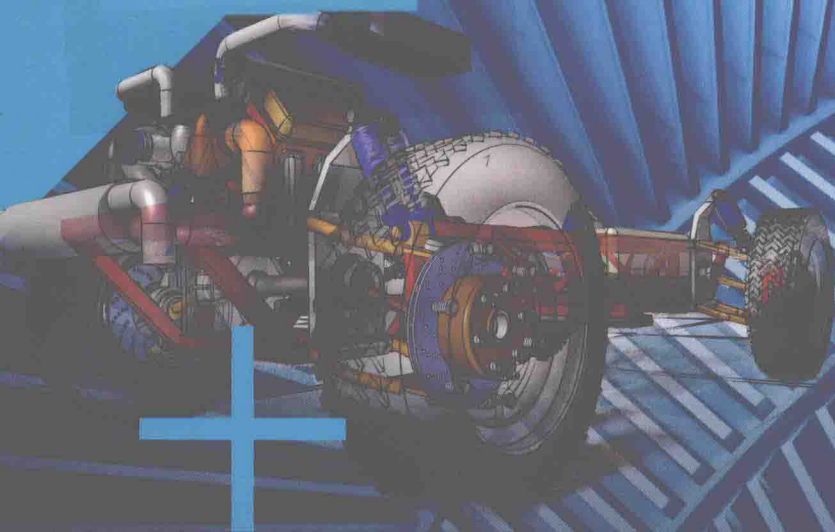


“互联网+”
新形态教材

普通高等教育“十三五”精品规划教材



机械设计制造及其自动化专业课程群系列

机械动力学 (修订版)

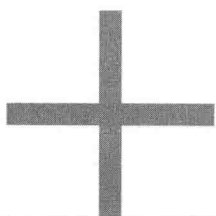
主 编 石端伟

- ◎ “互联网+”时代，让学习可以移动互联
- ◎ 扫二维码，链接海量资源，随时随地学习
- ◎ 提供教学课件和习题答案，方便教与学



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十三五”精品规划教材



机械设计制造及其自动化专业课程群系列

机械动力学

主编 石端伟

编写 刘 照 王晓笋 张志强

主审 郭应龙



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

·北京·

内 容 提 要

本书是集作者团队 20 多年“机械动力学”课程教学经验,根据教学改革需求和读者使用反馈,在作者出版的《机械动力学》(第二版)基础上进行内容调整、更新、扩充与完善而成的。

本书阐述了机械振动分析基础、机械系统响应的数值计算方法、工程实践中典型机械系统的动力学分析方法。全书共十章,主要包括:单自由度系统的振动、多自由度系统的振动、机械系统响应的数值计算、连续系统的振动、刚性构件组成的机械系统动力学、弹性构件组成的机械系统动力学、起重机械动力学、行走式机械动力学、有限单元法、非线性振动基础。为了帮助学生复习和检查对课程内容的理解,各章配有丰富的习题并给出了参考答案。

本书可作为高等院校机械类专业本科生和硕士研究生教材,也可作为相关专业高年级本科生、研究生及教师的参考书,还可供从事机械设计和研究的技术人员参考。

本书提供的免费教学课件可以到中国水利水电出版社网站下载,网址为:<http://www.waterpub.com.cn/>。

图书在版编目(CIP)数据

机械动力学 / 石端伟主编. —北京:中国水利水电出版社, 2018. 7

ISBN 978-7-5170-6632-3

I. ①机… II. ①石… III. ①机械动力学—高等学校—教材 IV. ①TH113

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 149408 号

书 名	普通高等教育“十三五”精品规划教材 机械动力学 JIXIE DONGLIXUE
作 者	主编 石端伟 编写 刘 照 王晓笋 张志强 主审 郭应龙
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010)68367658(营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010)88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京智博尚书文化传媒有限公司
印 刷	三河市龙大印装有限公司
规 格	184mm×260mm 16 开本 14 印张 345 千字
版 次	2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷
印 数	0001—3000 册
定 价	38.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前言

FOREWORD

传统的机械设计方法中,对机械的运动分析与载荷计算一般是建立在刚性假设的基础上(即按刚性构件来分析机构的运动),按静力学或刚体动力学方法来分析机械的载荷。

随着工业和科学技术的迅速发展,各行业迫切需要大量新型、高效率、高速度、高精度和自动化的机械和技术装备。由于机械速度的提高,机械振动和平衡问题已成为某些机械设计中的关键问题之一,尤其是机器人及精密机械,除了动载,还涉及运动精度。在设计这些高速度、高精度的机械时,要涉及到各种动力学因素,要精确计算各部件的真实运动情况以及考虑构件的弹性、运动副中间隙等因素对构件运动的影响,才能使各部件动作协调,机械正常运转。

现代的机械设计方法正在由传统的静态设计向动态设计过渡,机械动力学日益受到重视。

由于计算机的发展和广泛应用,机械动力学的研究也有了显著的进展,对多自由度系统的动力学研究、考虑构件弹性和运动副中间隙等的动力学问题时,都引入了数值计算方法。大量的商业软件问世,尤其是 MATLAB、ADAMS、ANSYS、CAITA、UG、Pro/E 等,大大促进了机械动力学的发展。各种刊物中有关机械动力学的论文很多,并且新成就正在逐步反映到国内外的教材中去。在机械原理、机械设计、有限元分析、测试技术等课程中,机械动力学内容也得到了充实。但是,目前国内在机械动力学方面的教材不多,远不能适应机械设计教学和有关工程技术人员需要。

2001 年以来,我们在《机械动力学》(讲义)使用过程中,对各章节内容进行了反复调整。学生在学习中,对理论力学、材料力学、机械原理、机械设计有了更深的理解,也了解部分数值分析方法,对 MATLAB、ADAMS、ANSYS 等软件的应用产生了浓厚的兴趣。2007 年和 2012 年作者相继出版了《机械动力学》(第一版)和《机械动力学》(第二版)。

本书是集作者团队 20 多年“机械动力学”课程教学经验,根据教学改革需求和读者使用反馈,在作者前两版教材基础上进行内容调整、更新、扩充与完善而成的。

全书共十章,阐述了机械振动分析基础、机械系统响应的数值计算方法、工程实践中典型机械系统的动力学分析方法。第一章单自由度系统的振动,是机械振动的基础。第二章多自由度系统的振动,是有限自由度系统(或离散系统)振动问题的基础与关键。第三章机械动力系统响应的数值计算方法,主要包括线性加速度法、纽马克 β 法、威尔逊 θ 法和龙格-库塔法。第一、二、三章给出了相关的 MATLAB 程序。第四章连续系统的振动,主要讨论弦的横向振动、杆的轴向振动、圆轴的扭转振动和梁的横向振动等问题。第五章刚性构件组成的机械系统动力学,以曲柄连杆机构、差动轮系和五杆机构等为例,主要讨论了第二类拉格朗日方程在机械系统中的应用,简略介绍了 ADAMS 软件的运用。第六章弹性构件组成的机械系统动力学,

主要讨论了轴与轴系、凸轮机构、齿轮传动系统和带传动系统的动力学问题。第七章起重机械动力学,主要讨论了起升机构和运行机构的动力学问题。第八章行走式机械动力学,主要讨论了车辆的传动系统的扭转和弯曲振动以及行驶系统的振动问题。第九章有限单元法,介绍了有限单元法在动力学中应用的基本思想和 ANSYS 软件的动力学分析方法。第十章介绍了非线性振动基础。为了帮助学生复习和检查对课程内容的理解,各章配有习题与答案。

本书的主体对象是机械,核心是动力学分析方法,分析工具是数学/力学/计算机软件。

本书可以作为机械类专业机械动力学教材,也可作为相关专业高年级本科生、研究生及教师的参考书。

本书第一章、第二章由刘照编写,第四章由张志强、刘照共同编写,第五章、第十章由王晓筭编写,第九章由张志强编写,其余由石端伟编写,全书由石端伟统稿并由石端伟任主编。武汉大学郭应龙教授对本书进行了认真细致的审稿,提出了很多宝贵意见。编写过程得到了肖晓晖、郭菁两位副教授以及武汉工业学院张永林教授、湖北工业大学华中平教授的指导和热情帮助,在此一并表示衷心感谢。

由于我们水平有限,误漏欠妥之处在所难免,竭诚欢迎读者批评指正。

编者

2018年4月于武汉

目录

CONTENTS

前言	
绪论	1
第一节 机械动力学研究的意义	1
第二节 机械动力学研究的主要内容	1
第一章 单自由度系统的振动	4
第一节 概述	4
第二节 单自由度系统的振动	5
第三节 等效力学模型	13
第四节 隔振原理	16
第五节 等效黏性阻尼	18
第六节 非简谐周期激励的响应	19
第七节 单位脉冲的响应	21
第八节 任意激励的响应	22
第九节 任意支承激励的响应	23
第二章 多自由度系统的振动	27
第一节 多自由度系统的自由振动	27
第二节 动力减振器	35
第三节 多自由度系统的模态分析方法	36
第四节 确定系统固有频率与主振型的方法	41
第三章 机械系统响应的数值计算	57
第一节 欧拉法及其改进	57
第二节 线性加速度法	60
第三节 纽马克 β 法	64
第四节 威尔逊 θ 法	65
第五节 龙格-库塔法	68
第四章 连续系统的振动	73
第一节 弦的横向振动	73
第二节 杆的轴向振动	77
第三节 圆轴的扭转振动	82
第四节 梁的横向振动	84

第五节	连续系统固有频率的其他求解方法	93
第五章	刚性构件组成的机械系统动力学	102
第一节	曲柄连杆机构动力学	102
第二节	差动轮系动力学	107
第三节	五杆机构动力学	109
第六章	弹性构件组成的机械系统动力学	116
第一节	轴与轴系的振动	117
第二节	凸轮机构动力学	127
第三节	齿轮传动系统动力学	132
第四节	带传动系统动力学	138
第七章	起重机械动力学	144
第一节	概述	144
第二节	起升机构动力学	145
第三节	运行机构动力学	149
第八章	行走式机械动力学	156
第一节	概述	156
第二节	传动系统的扭转振动	159
第三节	传动系统的弯曲振动	166
第四节	行驶系统的振动	173
第九章	有限单元法	178
第一节	基本思想	178
第二节	ANSYS 动力学分析	186
第十章	非线性振动基础*	193
第一节	非线性振动特性	193
第二节	非线性振动实例	194
第三节	相平面	197
第四节	平衡的稳定性及奇点的性质	202
第五节	相轨线的性质与作图方法	207
参考文献		217

第一节 机械动力学研究的意义

现代化的工业、农业、交通等各个部门的发展,要求设计出更多生产率高、性能良好的机械设备,由此而导致机械产品市场的激烈竞争。

随着机械运转速度的不断提高,动力学的分析方法从静力分析发展到动态静力分析,又发展到动力分析和弹性动力分析,其考虑的因素越来越多,越来越符合客观真实情况,分析复杂程度越来越高。例如,汽车的高速化推动了对整车振动和噪声的研究,内燃机和各种自动化机械的高速化推动了高速凸轮机构动力学的研究。

结构、材质的轻型化是现代机械设计的另一特征。能源与资源的危机向机械产品提出了节能、节材的要求,而材质的改善和最小重量优化方法的发展促使机械产品的轻型化成为可能。机械弹性动力学的发展直接与轻型化相联系。

对于精密机械,分析误差时必须尽可能考虑各种因素,如间隙、弹性、制造误差等。精密机械在高速运转下的精度与静态时有很大的差别。精密机床的动态特性研究和高速间歇机构的动态定位精度研究就是这样发展起来的。

长期以来,机械设计普遍采用静态设计方法,动态设计方法是近些年提出的新设计方法。用静态设计方法设计机械时,只考虑静态载荷和静特性,待产品试制出来以后再作动载荷和动态特性测试,发现问题时再采取补救措施。动态设计方法在设计、制造和管理等各阶段,采取综合性技术措施,早期直接地考虑动力学问题。例如,高速旋转机械可以用静态方法设计,制造出来以后通过动平衡减小振动,还要使运转速度避开共振的临界转速。但是随着转速的提高和柔性转子的出现,不仅在设计时要进行动态分析,而且在运行的过程中还要进行状态监测和故障诊断,并及时维护,排除故障,避免发生重大事故。例如,汽车、飞机的设计早就应用了动态设计方法。动态设计的基础就是动力学分析。

第二节 机械动力学研究的主要内容

机械动力学是研究机械在力的作用下的运动和机械在运动中产生的力的一门学科。机械动力学研究的内容概括起来,主要有如下几个方面。



■ 一、共振分析

随着机械设备的高速重载化和结构、材质的轻型化,现代化机械的固有频率下降,而激励频率上升,有可能使机械的运转速度进入或接近机械的“共振区”,引发强烈的共振。所以,对于高速机械装置(如高速皮带、齿轮、高速轴等)的支承结构件乃至这些高速机械本身,均应进行共振验算。

这种验算在设计阶段进行,可避免机械的共振事故发生;而在分析故障时进行,则有助于找到故障的根源和消除故障的途径。

■ 二、振动分析与动载荷计算

现代的机械设计方法正在由传统的静态设计向动态设计过渡,并已产生了一些专门的学科分支。如机械弹性动力学就是考虑机械构件的弹性来分析机械的精确运动规律和机械振动载荷的一个专门学科。

■ 三、计算机与现代测试技术的运用

计算机与现代测试技术已成为机械动力学学科赖以腾飞的两翼。它们相互结合,不仅解决了在振动学科中许多难以用传统方法解决的问题,而且开创了状态监测、故障诊断、模态分析、动态模拟等一系列有效的实用技术,成为生产实践中十分有力的现代化手段。

机械动力学的各个分支领域,在运用计算机方面取得了丰硕成果,如 MATLAB、ADAMS、CATIA、ANSYS 等软件得到了广泛的运用。

■ 四、减振与隔振

高速与精密是现代机械与仪器的重要特征。高速易导致振动,而精密设备却又往往对自身与外界的振动有极为严格的限制。因此,对机械的减振、隔振技术提出了越来越高的要求。所以,隔振设备的设计、选用与配置以及减振措施的采用,也是机械动力学的任务之一。

机械动力学在近年来虽然得到了迅速的发展,但仍有大量的理论问题与技术问题等待人们去探索,其中主要包括以下几个方面:

1. 振动理论问题

这类问题主要是指非线性振动理论问题。工程上的非线性问题常常采用简化的线性化处理,或在计算机上进行分段线性化处理。在这方面还有待进一步探索。

工程中的大量自激振动(如导线舞动、机床颤振、车轮振摆、油缸与导轨的爬行等),目前还缺乏统一成熟的理论方法,许多问题尚待研究。

2. 虚拟样机技术

机械系统动态仿真技术又称为机械工程中的虚拟样机技术,是 20 世纪 80 年代随着计算机技术的发展而迅速发展起来的一项计算机辅助工程(CAE)技术。运用这一技术,可以大大简化机械产品的开发过程,大幅度缩短产品的开发周期,大量减少产品的开发费用和成本,明显提高产品的质量,提高产品的系统及性能,获得最优化和创新的设计产品。因此,该技术一出现,就受到了人们的普遍重视和关注,而且相继出现了各种软件,如 MATLAB、ADAMS、ANSYS、CATIA、UG、Pro/E、SolidWORKS 等。对于这方面的工作,目前我国还有相当大的差距。

3. 振动疲劳机理的研究

许多机械零件的疲劳破坏是由振动产生的。如何把振动理论与振动疲劳机理结合起来仍是一个热门课题。

4. 有关测试技术理论和故障诊断理论的研究

适用、有效、廉价的测试诊断设备与技术,离生产亟需尚有相当大的距离。

5. 流固耦合振动

流体通过固体时会激发振动,而固体的振动如导线舞动、卡门涡振动、轴承油膜振荡等,又会反过来影响流体的流场和流态,从而改变振动的形态。

6. 乘坐动力学

对于交通机械(如汽车、工程机械、舰船等),其结构设计、悬挂设计、座椅设计以及减振设计等都需要引入随机振动理论,是一个广阔且重大的课题。

7. 微机械动力学问题

微机械并非传统意义下的宏观机械的几何尺寸的缩小。当系统特征尺寸达到微米或纳米的量级时,许多物理现象与宏观世界的情况有很大差别。例如,在微机械中,构件材料本身的物理性质将会发生变化;一些微观尺度的短程力所具有的长程效应及其引起的表面效应会在微观领域内起主导作用;在微观尺度下,系统的摩擦问题会更加突出,摩擦力则表现为构件表面间的分子和原子的相互作用,而不是由载荷的正压力产生,并且当系统的特征尺寸减小到某一程度时,摩擦力甚至可以和系统的驱动力相比拟;在微观领域内,与特征尺寸 L 的高次方成比例的惯性力、电磁力等的作用相对减小,而与特征尺寸的低次方成比例的黏性力、弹性力、表面张力、静电力等的作用相对增大;此外,微构件的变形与损伤机制与宏观构件也不尽相同等。

针对微机械的研究中呈现出的新特征,传统的机械动力学理论与方法已不再适用。微机械动力学研究微构件材料的本构关系、微构件的变形方式和阻尼机制、微机构的弹性动力学方程等主要科学问题,揭示微构件材料的分子(或原子)成分和结构、材料的弹性模量和泊松比、微构件的刚度和阻尼以及微机构的弹性动力学特性等之间的内在联系,从而保证微机电系统在微小空间内实现能量传递、运动转换和调节控制功能,以规定的精度实现预定的动作。因此,机械动力学的研究将会取得多方面的创新成果,这些成果不仅有重要的科学意义和学术价值,而且有很好的应用前景。



伽利略·伽利莱(Galileo Galilei, 1564—1642), 意大利物理学家、数学家、天文学家、哲学家, 比萨(Pisa)大学和帕度亚(Padua)大学的数学教授, 1609年成为发明望远镜的第一人。1590年完成了现代动力学的第一篇论文; 其对单摆和弦的振动的研究奠定了振动理论的基础。

第一章

单自由度系统的振动

第一节 概 述

机械振动是工程中常见的物理现象。悬挂在弹簧上的物体在外界的干扰下所作的往复运动就是最简单直观的机械振动。广义地说, 各种机器设备及其零部件都可以看成是不同程度的弹性系统。例如, 桥梁在车辆通过时产生的振动, 汽轮机、发电机由于转子的不平衡引起的振动等。因此, 机械振动就是在一定的条件下, 振动体在其平衡位置附近所作的往复性的机械运动。

实际中的振动系统是很复杂的。为了便于分析研究和运用数学工具进行计算, 需要在满足工程要求的条件下, 把实际的振动系统简化为力学模型。例如图 1-1(a)是最简单的单自由度系统, m 为振动物体质量, k 为弹簧刚度; 图 1-1(b)为单自由度扭转系统, k_t 为无质量轴的扭转刚度, J 为无弹性圆盘的转动惯量; 图 1-1(c)为复摆; 图 1-1(d)为质量块—简支梁横向振动系统。

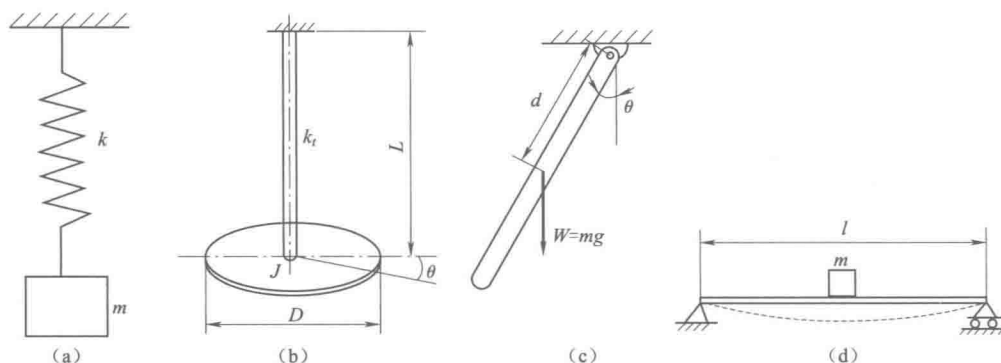


图 1-1 单自由度系统

(a) 单自由度弹簧-质量系统; (b) 单自由度扭转系统; (c) 复摆; (d) 质量块—简支梁横向振动系统

如果实际系统很复杂,要求的精度较高,简化的力学模型也就比较复杂。

振动系统和参数的动态特性,可以用常数线性微分方程来描述的,称为线性振动。但工程实际中也有很多振动系统是不能线性化的,如果勉强线性化,就会使系统的性质改变,所以这类系统只能按非线性振动系统处理,这将在第十章讨论。

机械振动的分析方法很多。对于简单的振动系统,可以直接求解其微分方程的通解。由于计算机进行数值计算非常方便,所以振动仿真是一种最直接的方法。

由于振动模型中尤其是多自由度振动模型,能很方便地用矩阵微分方程来描述,所以 MATLAB 在振动仿真中表现出十分优越的特性。

本章介绍单自由度机械的振动基础,然后通过 MATLAB 来实现仿真计算。

第二节 单自由度系统的振动

一、无阻尼自由振动

图 1-1(a)所示的单自由度系统可以用如下的微分方程描述

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1-1)$$

式中,质量 m 的单位为 kg,刚度 k 的单位为 N/m,位移 x 的单位为 m。

令 $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, 方程的通解为

$$x = a\sin\omega_n t + b\cos\omega_n t \quad (1-2)$$

式(1-2)表示了图 1-1(a)中质量块 m 的位置随时间而变化的函数关系,反映了振动的形式与特点,称为振动函数。

式(1-2)中, a 、 b 为积分常数,它们决定于振动的初始条件。

如假定 $t=0$ 时,质量块的位移 $x=x_0$,其速度 $\dot{x}=\dot{x}_0=v_0$,则 $a=v_0/\omega_n$, $b=x_0$,即

$$x = \frac{v_0}{\omega_n} \sin\omega_n t + x_0 \cos\omega_n t \quad (1-3)$$

或写成

$$x = A\sin(\omega_n t + \varphi) \quad (1-4)$$

其中

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2}, \varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_n}{v_0} \quad (1-5)$$

式中, A 为振幅,单位为 mm; φ 为相位角,单位为°; ω_n 为固有频率,单位为 rad/s;固有频率也可表示为 $f_n = \omega_n / (2\pi)$,单位为 1/s(或 Hz,赫兹)。固有频率与系统的刚度 k 和质量 m 有关,与外界赋予的初始条件无关,它是系统本身所具有的一种重要特性。

不难得出,图 1-1(b)的动力学微分方程为

$$J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$$

在数学,上式与式(1-1)完全相同。

【例 1-1】 承受集中载荷的简支梁如图 1-2(a)所示。梁的跨度 $l=3500$ mm,截面尺寸如



图 1-2(b)所示(单位为 mm)。梁的材料为铝,弹性模量 $E=7 \times 10^4$ MPa,密度 $\rho=2700$ kg/m³。设有一重物 $G_1=2400$ N 从 $h=25$ mm 的高处落下,落于梁跨度的中点。求梁的固有频率和最大动挠度。

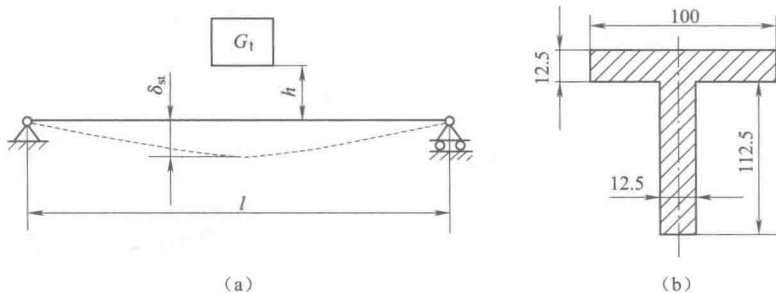


图 1-2 简支梁的振动

解 由图 1-2(b)可计算出梁的截面面积,从而可算出梁自身的重力为 $G_0=251$ N。与重物 G_1 相比,梁的质量可以忽略不计。重物可视为一个集中的质量块,而梁则可视为一个没有质量的弹簧。重物落在梁上以后可将此系统视为一个单自由度的振动系统。用来计算重物振动位移的坐标原点取在其静力平衡位置。那么,梁在重物作用下的静挠度即为这一自由振动的初始位移,而重物下落所获得的速度即为自由振动的初始速度。

根据材料力学可知,简支梁在重物作用下的中点静挠度为

$$\delta_{st} = \frac{G_1 l^3}{48EI}$$

式中, I 为梁的截面惯性矩, $I=4.0844 \times 10^6$ (mm⁴)。

$$\text{由此可得出 } x_0 = \delta_{st} = \frac{2400 \times 3500^3}{48 \times 7 \times 10^4 \times 4.0844 \times 10^6} = 7.50 \text{ (mm)}$$

梁的刚度为

$$k = \frac{G_1}{\delta_{st}}$$

固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{G_1/\delta_{st}}{G_1/g}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{9800}{7.50}} = 36.15 \text{ (rad/s)}$$

重物与梁接触瞬间的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9800 \times 25} = 700 \text{ (mm/s)}$$

系统自由振动的振幅为

$$A = \sqrt{\delta_{st}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{7.50^2 + \left(\frac{700}{36.15}\right)^2} = 20.77 \text{ (mm)}$$

梁的最大动挠度为

$$\delta_{\max} = A + \delta_{st} = 20.77 + 7.50 = 28.27 \text{ (mm)}$$

可以看出动挠度比静挠度大得多,动挠度与静挠度之比称为放大系数,用 β 表示,此处有

$$\beta = \frac{28.27}{7.50} \approx 3.77$$

【例 1-2】 如图 1-3 所示,起重机以速度 v_0 使重物 G 下降时,突然紧急制动,求此时提升

机构所受的最大的力。已知 $v_0 = 600 \text{ mm/s}$, $G = 20000 \text{ N}$, 钢丝绳的截面积 $A = 251 \text{ mm}^2$, 长度 $l = 16000 \text{ mm}$, 弹性模量 $E = 1.78 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。

解 在起重机设计中, 钢丝绳选型十分重要, 往往需要根据钢丝绳的实际拉力与所要求的安全系数来决定钢丝绳的型号。本题的目的是阐述起重机钢丝绳的动拉力。

紧急制动时, 钢丝绳突然停止, 但此时重物具有速度 v_0 , 从制动的瞬间开始吊在绳上作自由振动。显然, 初始位移 $x_0 = 0$, 初始速度为 v_0 , 由式(1-5)可知, 最大位移 $x_{\max} = \frac{v_0}{\omega_n}$, 由此, 钢丝绳最大的拉伸量为

$$\delta_{\max} = \delta_{\text{st}} + \frac{v_0}{\omega_n} = \frac{G}{k} + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

式中, k 为钢丝绳刚度。

由材料力学可知

$$k = \frac{EA}{l} = \frac{1.78 \times 10^5 \times 251}{16000} = 2792 \text{ (N/mm)}$$

钢丝绳中最大的拉力为

$$\begin{aligned} F_{\max} &= k\delta_{\max} = k \left(\frac{G}{k} + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \right) = G \left(1 + v_0 \sqrt{\frac{k}{Gg}} \right) \\ &= 20000 \times \left(1 + 600 \sqrt{\frac{2792}{20000 \times 9800}} \right) = 65290 \text{ (N)} \end{aligned}$$

定义动拉力与静拉力之比为动力放大系数 β , 则 $\beta = \frac{F_{\max}}{G} = \frac{65290}{20000} = 3.2645$ 。由此可以看出, 当紧急制动时, 起重机钢丝绳中的动拉力是正常提升时的 3.2645 倍。

■ 二、有阻尼自由振动

在图 1-1(a)所示的保守系统中, 系统的能量守恒。如果振动一旦发生, 它就会持久地、等幅地一直进行下去。但是, 实际上所有的自由振动都是逐渐衰减而最终停止的, 即系统存在阻尼。阻尼的存在形式包括相对运动表面的干摩擦阻尼、液体与气体的黏性阻尼、电磁阻尼和结构阻尼等。

图 1-4 所示为考虑了黏性阻尼的单自由度振动系统模型, 阻尼系数用 c 表示, 单位为 $\text{N} \cdot \text{s/m}$, 其运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1-6)$$

令 $\frac{c}{m} = 2n$, $\frac{k}{m} = \omega_n^2$, 则

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1-7)$$

其通解为

$$x = e^{-nt} (c_1 e^{t\sqrt{n^2 - \omega_n^2}} + c_2 e^{-t\sqrt{n^2 - \omega_n^2}}) \quad (1-8)$$

式中, c_1 、 c_2 为积分常数, 由振动初始条件确定。

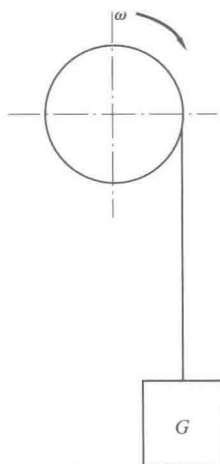


图1-3 起重机制动状态

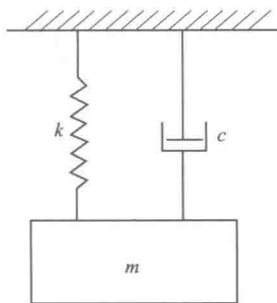


图1-4 有阻尼的单自由度振动系统



令 $\frac{\eta}{\omega_n} = \xi$, ξ 称为相对阻尼系数或阻尼比, 是无量纲参数。则式(1-8)可写为

$$x = e^{-\xi\omega_n t} (c_1 e^{\omega_n t \sqrt{\xi^2 - 1}} + c_2 e^{-\omega_n t \sqrt{\xi^2 - 1}}) \quad (1-9)$$

由此可以讨论阻尼对系统的自由振动产生的影响。

当 $\xi < 1$ 时, 称为弱阻尼状态。此时, $\xi^2 - 1$ 为虚数, 式(1-9)变为

$$x = e^{-\xi\omega_n t} (c_1 e^{i\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2}} + c_2 e^{-i\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2}}) \quad (1-10)$$

利用欧拉公式, 式(1-10)可写为

$$x = Ae^{-\xi\omega_n t} (b\cos\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + a\sin\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (1-11)$$

式(1-11)的括号内为两个简谐振动相加, 则其可写为

$$x = Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \quad (1-12)$$

其中

$$A = \sqrt{\frac{(v_0 + \xi\omega_n x_0)^2 + x_0^2 \omega_n^2 (1 - \xi^2)}{\omega_n^2 (1 - \xi^2)}}, \varphi = \arctan\left(\frac{x_0 \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{v_0 + \xi\omega_n x_0}\right)$$

由式(1-12)可以看出, 弱阻尼自由振动具有如下几种特性: 它是一个简谐振动, 振动的频率为 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, 而 ω_n 为无阻尼时系统的固有频率。一般情况下, ξ 常在 0.1 左右, 因此对固有频率的影响不大, 即认为 $\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \approx \omega_n$ 。振动的振幅为 $Ae^{-\xi\omega_n t}$, 其中 A, ξ, ω_n 皆为定值。所以振幅随时间变化的规律是一条指数递减曲线, 如图 1-5 所示。

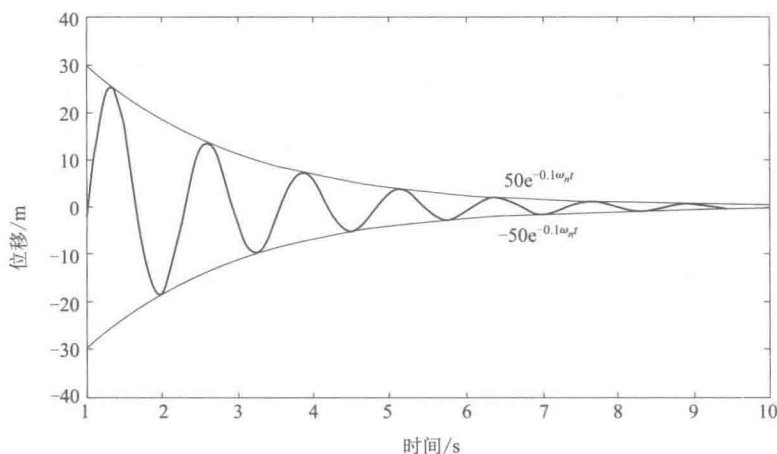


图 1-5 弱阻尼状态响应曲线

当 $\xi > 1$ 时, 称为强阻尼状态。此时, 式(1-9)可写成

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + c_2 e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \\ c_1 &= \frac{v_0 + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \\ c_2 &= \frac{-v_0 + (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

由于 $\xi^2 - 1 > 0$, 故式(1-13)中的二项指数皆为实数, 又因为 $\xi > \sqrt{\xi^2 - 1}$, 故二项指数皆为负值。所以, 式(1-13)所表示的是一条指数递减的曲线。这表示系统将不再产生前面所述的振动, 而是一条按指数规律衰减的曲线。

当 $\xi = 1$ 时, 称为临界阻尼状态。由于 $\xi = \frac{n}{\omega_n} = 1, n = \omega_n$, 则有

$$c_c = 2m\omega_n = 2m\sqrt{k/m} = 2\sqrt{km} \quad (1-14)$$

这里 c_c 为临界阻尼状态下的阻尼系数, 称为临界阻尼系数。显然它是系统本身所具有的特性之一。

由 $\xi = \frac{n}{\omega_n} = \frac{c}{2m\omega_n}$ 及 $c_c = 2m\omega_n$, 有 $\xi = \frac{c}{c_c}$ 。也就是说, 相对阻尼系数 ξ (阻尼比) 反映了系统的实际阻尼与临界阻尼的关系。

在临界阻尼状态下, 有

$$\begin{aligned} x &= e^{-\omega_n t} (c_1 + c_2 t) \\ c_1 &= x_0, c_2 = v_0 + \omega_n x_0 \end{aligned} \quad (1-15)$$

显然, 在这种状态下不能形成振动。

根据式(1-12)、式(1-13)、式(1-15), 有阻尼自由振动响应的 MATLAB 程序如下:

```
function VTB1(m,c,k,x0,v0,tf)
%VTB1 用来计算单自由度有阻尼自由振动系统的响应
%VTB1 绘出单自由度有阻尼自由振动系统的响应图
%m 为质量;c 为阻尼;k 为刚度;x0 为初始位移;v0 为初始速度;tf 为仿真时间
%VTB1(zeta,w,x0,v0,tf)绘出单自由度有阻尼自由振动系统的响应图
%程序中 z 为阻尼比 xi;wn 为固有频率 omega_n;A 为振动幅度;phi 为初相位 theta
clc
wn=sqrt(k/m);           %固有频率 omega_n
z=c/2/m/wn;           %阻尼比 xi
wd=wn * sqrt(1-z^2);   %计算 omega_d = sqrt(1-xi^2) * omega_n
fprintf('固有频率为%.3g rad/s.\n',wn);
fprintf('阻尼比为%.3g.\n',z);
fprintf('有阻尼的固有频率为%.3g rad/s.\n',wd);
t=0:tf/1000:tf;
if z<1
    A=sqrt(((v0+z * wn * x0)^2+(x0 * wd)^2)/wd^2);
    phi=atan2(x0 * wd,v0+z * wn * x0);
    x=A * exp(-z * wn * t). * sin(wd * t+phi);
    fprintf('A=%.3g\n',A);
    fprintf('phi=%.3g\n',phi);
elseif z==1
    a1=x0;
    a2=v0+wn * x0;
```




```

fprintf('a1=%.3g\n',a1);
fprintf('a2=%.3g\n',a2);
x=(a1+a2*t). * exp(-wn*t);
else
a1=(-v0+(-z+sqrt(z^2-1))*wn*x0)/2/wn/sqrt(z^2-1);
a2=(v0+(z+sqrt(z^2-1))*wn*x0)/2/wn/sqrt(z^2-1);
fprintf('a1=%.3g\n',a1);
fprintf('a2=%.3g\n',a2);
x=exp(-wn*t). *(a1*exp(-wn*sqrt(z^2-1)*t)+a2*exp(wn*sqrt(z^2-1)*t));
end
plot(t,x),grid
xlabel('时间(s)')
ylabel('位移(m)')
title('位移相对时间的关系')

```

运行该程序时,只需要给出相应的参数,例如:

```

>>VTB1(1,0.05,1,1,1,100)

```

显示固有频率为 $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, 阻尼比 $\xi = 0.03$, $A = 1.43$, $\phi = 0.773 \text{ rad}$ 。响应曲线如图 1-6 所示。

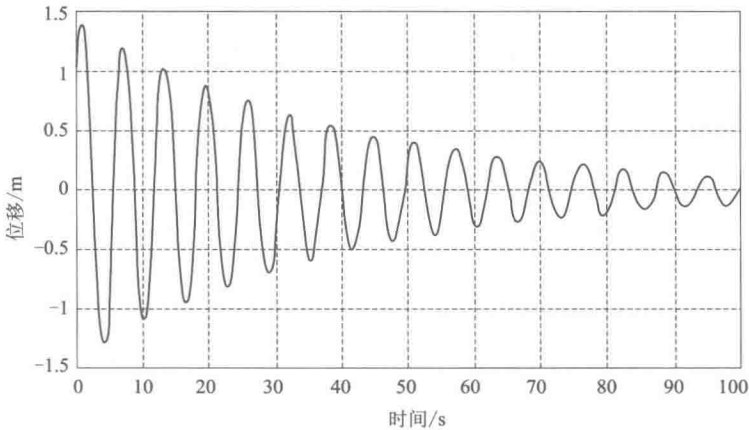


图 1-6 阻尼比 $\xi = 0.03$ 的响应曲线

程序中的 if 语句就是判断 ξ 大小的,即判断是弱阻尼状态、强阻尼状态还是临界阻尼状态。

如果运行 `>>VTB1(1,2,1,0.1,1,20)`,则显示固有频率为 $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, 阻尼比 $\xi = 1$ 。其响应曲线如图 1-7 所示。如果要想求出振动的速度 \dot{x} ($= \dot{x}_d$) 和加速度 \ddot{x} ($= \ddot{x}_d$), 只要对式(1-12)、式(1-13)、式(1-15)分别进行求导,在程序中加入相应的内容,最后增加 `plot(t,xd)`, `plot(t,xdd)` 语句,即可给出速度和加速度图。