



“十三五” 科学技术专著丛书

本书得到国家自然科学基金（项目编号：11801441）

陕西省教育厅科学研究计划（项目编号：18JK0623）

西安石油大学博士助推计划项目资助

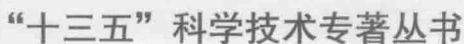
有限群的幂图与Cayley图

Power Graphs and Cayley Graphs of
Finite Groups

马儗龙 著



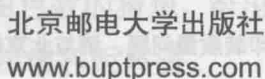
北京邮电大学出版社
www.buptpress.com



西安石油大学博士助推计划项目资助

有限群的幂图与Cayley图

马僊龙 著



内 容 简 介

本书主要讲述定义在有限群上的幂图与 Cayley 图的相关性质。第 1 章是综述部分, 主要介绍了一些背景知识、预备知识及本书的主要结果。第 2 章介绍了整 Cayley 图的相关知识, 描述了所有的三度整 Cayley 图。第 3 章和第 4 章研究 Cayley sum 图, 具体地, 分类了所有的 Cayley sum 整群及确定了交换群上的 Cayley sum 图的子群完美码。第 5 章至第 9 章给出了群的幂图的一些结果。例如确定了幂图的彩虹连通数; 分类了亏格为 2 的幂图; 给出幂图强度量维数的计算公式等。

本书是关于群的元素特性及图结构方面的一本专著, 适合群与图方向的高校在读学生及科研工作者阅读。

图书在版编目(CIP) 数据

有限群的幂图与 Cayley 图/马侃龙著. -- 北京: 北京邮电大学出版社, 2018.12
ISBN 978-7-5635-5646-5

I. ①有… II. ①马… III. ①有限群-研究②Cayley 图-研究 IV. ①O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 281842 号

书 名: 有限群的幂图与 Cayley 图

责任编辑: 孔 玥

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编: 100876)

发行部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京九州迅驰传媒文化有限公司

开 本: 720 mm×1 000 mm 1/16

印 张: 9.25

字 数: 187 千字

版 次: 2018 年 12 月第 1 版 2018 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5646-5

定价: 47.00 元

• 如有印装质量问题, 请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

字或序列上的组合问题在数学的各个领域中都扮演着重要的角色,使用这些组合性质,可以解决一些困难的数学问题。研究定义在群上的图其本质是研究群中元素的组合性质,其不仅跟自动化理论相关,而且在大型网络的构造、互连网络设计、数据挖掘、组合优化等领域都有广泛的应用。在 1989 年,为了研究图的直径与特征值之间的关系,美国艺术与科学院院士金芳蓉首次引入了交换群上的凯莱和图,该图也被称为凯莱图的双胞胎图。该论文发表在 *Journal of the American Mathematical Society* 上。在 2000 年,作为群上的一个组合性质,Kelarve 和 Quinn 首次提出了群的有向幂图。之后,Chakrabarty, Ghosh 和 Sen 引入了群的(无向)幂图。近十年来,关于幂图的研究十分活跃。群的 Cayley 图一直是代数组组合论方向的一个热门研究课题。

本书是关于群的 Cayley 图和幂图方面的一本专著,是作者在这两个研究领域的一些最新研究成果。主要内容包括下面的两部分内容:

第一部分(第 2 章至第 4 章)研究群的整 Cayley 图和整 Cayley sum 图。具体地,这部分描述了任意三度 Cayley 图为整的有限群,分类了任意 Cayley sum 图为整的交换群。此外,一些 Cayley sum 图的子群完美码被确定。

第二部分(第 5 章至第 9 章)研究群的幂图。首先,本书确定了幂图的彩虹连通数及部分幂图的强彩虹连通数。其次,分类了具有(非)定向亏格为 2 的幂图;描述了幂图的强度量维数且计算了一些图的幂指数。最后,本书否定了关于幂图色数的猜想,给出了幂图独立数的一些上下界并且得到了强幂图的邻接谱和距离谱。

本书的大部分内容已以论文的形式正式发表在 *European Journal of*

*Combinatorics, Discrete Applied Mathematics, Graphs and Combinatorics*等国际著名的 SCI 期刊上, 其中第 6 章的内容已经被 *Communications in Algebra* 接受发表 (DOI:10.1080/00927872.2018.1476522)。

书中涉及一些未解决的问题, 比如描述任意幂图的幂指数问题, 确定非交换群的 Cayley sum 的子群完美码问题等。对于这些问题, 作者将在以后的科研工作中继续研究。

本书得到国家自然科学基金 (项目编号: 11801441)、陕西省教育厅科学研究计划 (项目编号: 18JK0623) 和西安石油大学博士助推计划项目的资助, 特此表示感谢!

回想写本书的整个过程, 虽有不易, 却让我学会静下心来思考, 也更加深了对该领域研究的兴趣以及理解。由此, 我倍感珍惜, 但求以后的科研道路不会停滞!

马偁龙

2018 年 11 月

目 录

第 1 章 综述	1
1.1 背景介绍	1
1.1.1 整 Cayley 图和整 Cayley sum 图	1
1.1.2 图的度量维数	3
1.1.3 图的完美码	3
1.1.4 图的彩虹连通	4
1.1.5 图的嵌入、图的亏格	4
1.1.6 群的幂图	5
1.2 预备知识	7
1.2.1 群	7
1.2.2 图	10
1.3 主要结果和结构安排	12
第 2 章 整 Cayley 图	15
2.1 A_2 和 A_3	16
2.2 G_3	20
2.3 G_k 的分类, $k \geq 4$	21
第 3 章 整 Cayley sum 图	25
3.1 引理和主要结果	25
3.2 主要结果的证明	27
第 4 章 Cayley sum 图的子群完美码	32
4.1 一些引理	32
4.2 交换群	34
4.3 二面体群和广义四元数群	37
4.3.1 定理 4.3.1 的证明	38

4.3.2 定理 4.3.2 的证明	42
第 5 章 群幂图的 (强) 彩虹连通数	44
5.1 彩虹连通数	44
5.1.1 $M_G \neq \emptyset$	44
5.1.2 $M_G = \emptyset$	47
5.2 强彩虹连通数	53
5.2.1 界	54
5.2.2 例子	56
第 6 章 群幂图的 (非) 定向亏格	57
6.1 一些引理	57
6.2 定向亏格为 1 的群幂图	60
6.3 (非) 定向亏格为 2 的群幂图	62
6.3.1 具有阶为 6 的循环子群的有限群	62
6.3.2 定理 6.3.1 的证明	67
6.3.3 定理 6.3.2 的证明	72
第 7 章 群幂图的强度量维数	75
7.1 Reduced 图	75
7.2 $\mathcal{R}_G$ 的团数	76
7.3 定理 7.2.1 和 7.2.2 的证明	78
7.4 一些特殊幂图的强度量维数	81
第 8 章 图的幂指数	84
8.1 完全图	85
8.2 完全二部图	87
8.3 1-因子	90
第 9 章 群幂图的色数、独立数及谱	94
9.1 染色	94
9.1.1 幂图是分裂的有限群	99
9.1.2 幂图是单圈的有限群	102

9.2 独立数	102
9.2.1 界	103
9.2.2 循环群	105
9.2.3 独立数为 2 的幂图	110
9.2.4 独立数为 3 的幂图	111
9.3 强幂图的谱	113
参考文献	121

本章, 我们首先介绍相关背景知识, 然后给出一些关于强幂图的基本知识, 最后介绍本书的主要结论和结构安排。

1 背景介绍

本节我们介绍一些背景知识, 具体地, 我们首先介绍 Cayley 图, 强 Cayley 图, 图的度量维数, 图的关联矩阵和图的强连通性, 图的结构以及图的不连通性等背景。

1.1.1 强 Cayley 图和强 Cayley sum 图

如果一个图的邻接矩阵的所有非对角线元素都是 1, 则称这个图是一个强图。在 1974 年, Harary 和 Schwach^[1] 首次介绍了强图的概念。

在 1976 年, 程中计算机将正交对称阵的情况, Aronson^[2] 和 Chaitin^[3] 证明恰好存在 12 个连通的三度强图。首先, Aronson^[2] 证明了 12 个连通的三度强图, 事实上他已经列出了 12 个连通的三度强图。Chaitin^[3] 的这项工作启发和激励了 Schwach 的工作^[4], Schwach 对剩下的 4 个图做了证明并且得到了完整且独立的解。最后, 没有使用计算机且独立地, Schwach^[5] 也证明了恰好存在 12 个连通的三度强图。

我们已经知道一个直径是 d 的连通的正则图的顶点个数最大是 $\frac{d(d-1)^{d-1}+1}{2}$

(见参考文献 [6])。在参考文献 [7] 中也证明, 如果我们知道一个直径是 d 的连通图不是正则的, 那么 $d \geq 2$ 。这是因为这个图最多有 $d(d-1)^{d-1}+1$ 个不同的特征值。因此, 一个直径是 d 的正则图的顶点个数最大是 $\frac{d(d-1)^{d-1}+1}{2}$ 。

第1章 综 述

本章, 我们首先介绍相关背景知识, 然后给出一些关于群与图的预备知识, 最后介绍本书的主要结论和结构安排。

1.1 背景介绍

本节我们介绍一些背景知识。具体地, 我们依次介绍整 Cayley 图, 整 Cayley sum 图, 图的度量维数, 图的完美码与图的彩虹连通, 图的嵌入、图的亏格以及群的幂图等一些背景。

1.1.1 整 Cayley 图和整 Cayley sum 图

如果一个图的邻接矩阵的所有特征值均是整数, 则我们称这个图是一个整图。在 1974 年, Harary 和 Schwenk^[1] 首次介绍了整图的定义。

在 1976 年, 利用计算机验证所有可能的情况, Bussemaker 和 Cvetković^[2] 证明恰好存在 13 个连通的三度整图。首先, Cvetković^[3] 尝试去发现连通的三度整图, 事实上他已经列出了 12 个连通的三度整图。Cvetković 的这项工作启发和鼓舞了 Schwenk 的工作^[4], Schwenk 对剩下的有可能的 95 个谱做了限制并且得到了完整且独立的解。最后, 没有使用计算机且独立地, Schwenk^[4] 也证明了恰好存在 13 个连通的三度整图。

我们已经知道一个直径是 d 的连通的 k -正则图的顶点个数最大是 $\frac{k(k-1)^d - 2}{k-2}$ (见参考文献 [5])。在参考文献 [3] 中已表明, 如果我们知道一个直径是 d 的连通的 k -正则图是整的, 则 $d \leq 2k$; 这是因为这个图最多有 $2k+1$ 个不同的特征值。因此, 一个连通的 k -正则整图的顶点个数最大是 $\frac{k(k-1)^{2k} - 2}{k-2}$ 。

借助于计算机, 现在我们知道总共有 263 个 11 个顶点之内的连通整图 (见参考文献 [6] [7])。在 2009 年, Ahmadi, Alon, Blake 和 Shparlinski^[8] 证明具有 n 个顶点的整图的可能性小于等于 $2^{-\frac{n}{400}}$, 其中 n 是个充分大的数。对于整图的一些其他背景知识和一些已知的结果, 读者可参考参考文献 [9] 这篇综述性的文章。

描述整图的问题, 从已经有一些工作来看, 是非常困难的。因此我们往往会研究一些整的特殊图类。例如, de Abreu 等人^[10] 分类了最大度为 4 且没有 ± 1 作为特征值的非正则连通的二部整图。Indulal^[11] 研究了两类新的图的和并且构造了一些新的无限族的整图。Chung, Koolen, Sano 和 Taniguchi^[12] 分类了具有谱半径 3 的连通的非二部整图。

到目前为止, 关于整的 Cayley 图已经有很多工作。在 1979 年, Bridges 和 Mena^[13] 确定了循环群的整 Cayley 图。在 2009 年, Abdollahi 和 Vatandoost^[14] 确定了所有的有限群使得在这个群上存在一个三度 Cayley 图是整的, 并且获得了一些无限族的整 Cayley 图。之后, 在参考文献 [15] 中, 他们两人找到了交换群上所有四度整的 Cayley 图。Klotz 和 Sander^[16] 研究了交换群的整 Cayley 图并且猜想如果 Cayley 图 $\text{Cay}(G, S)$ 是整的, 则 $S \in \mathbb{B}(G)$, 其中 G 是个交换群且 $\mathbb{B}(G)$ 是由 G 的子群生成的布尔代数。Alperin 和 Peterson^[17] 研究了整集合生成的布尔代数和有限交换群的子群生成的布尔代数之间关系。特别地, 他们证明了参考文献 [16] 中的猜想。在参考文献 [18] 中, Klotz 和 Sander 研究了通过最大公因子定义的整 Cayley 图。在 2013 年, Abdollahi 和 Jazaeri^[19] 研究了除了完全多部图之外, 没有其他整 Cayley 图的有限群。

如果一个群上的每个 Cayley 图都是整的, 则这个群被称为是一个 Cayley 整群。Klotz 和 Sander^[16] 首次引入了这个概念并且确定了所有交换的 Cayley 整群。在 2014 年, Abdollahi 和 Jazaeri^[20] 确定了所有非交换的 Cayley 整群, 并且独立地, Ahmady 等人^[21] 也得到了所有非交换的 Cayley 整群。在 2014 年, Estélyi 和 Kovács^[22] 引入了群类 $\mathcal{G}_k$, 其中 $\mathcal{G}_k$ 是这些有限群使得在它们上的每个度数小于等于 k 的 Cayley 图是整的组成的集合。这推广了 Cayley 整群的概念。在参考文献 [22] 中, 对每个 $k \geq 4$, $\mathcal{G}_k$ 被完全分类了。

作为 Cayley 图的双胞胎图, Cayley sum 图在历史上被介绍得却不多。Alon^[23] 研究了 Cayley sum 图的谱以及它的小的非平凡的特征值。此外, 在一些条件的限制下, Cayley sum 图的独立数的上界被给出。Cheyne, Gupta 和 Wheeler^[24] 主要研究了 Cayley sum 图的哈密顿性的一些结果。例如, 他们证明如果一个阶为 $2p^n$ 的交换群 (其中 p 是素数) 上的某个 Cayley sum 图是连通的二部图, 那么这个 Cayley sum 图是哈密顿的; 如果一个具有阶是 8 的倍数的交换群上的某个 Cayley sum 图是连通的, 那么这个 Cayley sum 图是哈密顿的。特别地, 他们还研究了 Cayley sum 图的一些基本性质以及同 Cayley 图的一些关系。Lev^[25] 也研究了 Cayley sum 图

的哈密顿性并且 Chung^[26] 研究了 Cayley sum 图的直径。Green^[27] 研究了随机 Cayley sum 图的团数。在 2009 年, Gryniewicz, Lev 和 Serra^[28] 决定了任一 Cayley sum 图的顶点连通度, 并且若这个图不是完全的, 则它具有一个非常明确的极小的切点集。利用几何表示, DeVos 等人^[29] 重新识别了 Cayley sum 图; 特别地, 他们完整地给出了 Cayley sum 图的谱。Amooshahi 和 Taeri^[30] 研究了 Cayley sum 图的控制数和总控制数; 特别地, 他们给出了循环群的 Cayley sum 图控制数好的上下界。

最近, Amooshahi 和 Taeri^[31] 把 Cayley sum 图推广到非交换群, 并且他们得到了这时 Cayley sum 图是连通的充分必要条件和这个图的谱的计算方法; 特别地, 他们证明在某个非交换群 G 上, 有一个三度连通整的 Cayley sum 图的充分必要条件是 G 是三次对称群 S_3 。Afkhani 等人^[32] 把群的 Cayley sum 图推广到交换环上, 并且他们研究了这类 Cayley sum 图的一些基本性质, 例如连通度、围长和团数等。此外, 他们描述了环 Cayley sum 图亏格为 1 的交换环的结构。

1.1.2 图的度量维数

在 20 世纪 70 年代, Harary 和 Melter^[33] 给出了图度量维数的概念。独立地, Slater^[34] 也给出了这个参数的定义。此后, 该参数引起了许多学者的注意, 对于更多的关于该参数的信息请读者见参考文献 [35] [36]。在 2004 年, Sebő 和 Tannier^[37] 引入了图的强度量维数且给出了强可解集在组合数学方面的一些应用。Corona 积图、Rooted 积图和强积图的强度量维数分别在论文^[38, 39, 40] 中进行了研究。根据参考文献 [40], 计算图强度量维数的问题是 NP-困难的。此外, 读者在参考文献 [41] 中能找到关于图强度量维数的一些基本性质, 计算方法及最新的研究进展。

在 2016 年, Feng, Ma 和 Wang^[42] 已经对幂图的度量维数进行了研究。他们刻画了任一幂图的度量维数且给出了循环群的幂图的度量维数的具体计算公式。

1.1.3 图的完美码

在图论里面, 图的完美码也被称为一个有效控制集^[43], 或者一个独立完美控制集^[44]。根据 Biggs^[45] 的工作, 我们能发现完美码的概念得到了迅速的发展。此外从编码理论的发展中可以看出, 完美码有非常重要的应用。从参考文献 [46] 开始, 研究一般图的完美码收到了很多学者的关注, 例如参考文献 [47]。

因为 Hamming 图 $H(n, q)$ 是 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n$ 上关于某个子集的 Cayley 图, 所以 Cayley 图的完美码是完美码在经典集合论中的一种推广。在最近几年, 许多学者已经研究了 Cayley 图的完美码。看最近的文章^[48], Huang, Xia 和 Zhou 引入了

群的子群完美码的概念, 它被定义为群 G 的一个子群且是 G 上的某一个 Cayley 图的完美码。同时他们在参考文献 [48] 中得到了二面体群和一些交换群的子群完美码。

1.1.4 图的彩虹连通

Chartrand, Johns, McKeon 和 Zhang^[49] 首次介绍了图 Γ 的 (强) 彩虹连通数的概念并且完全决定了一些特殊图类的 (强) 彩虹连通数, 例如, 长度为 n 的圈, 轮图以及完全多部图。特别地, 他们证明存在一个连通图使得它的彩虹连通数是 a 且强彩虹连通数是 b , 其中 $a \geq 4$ 且 $b \geq (5a - 6)/3$ 。在参考文献 [50] [51] 中证明计算 $rc(\Gamma)$ 是 NP-困难的。此外, 在参考文献 [51] 中已经证明对于任一固定的整数 $t \geq 2$, 决定是否 $rc(\Gamma) = t$ 也是 NP-完全的。Caro 等人^[52]、Kemnitz 和 Schiermeyer^[53] 研究了彩虹连通数为 2 的图。例如, 他们给出了几个充分条件使得图的彩虹连通数为 2; 对于具有彩虹连通数 2 的随机图, 他们得到了阈值函数; 利用某些大团数的图, 他们描述了具有彩虹连通数 2 的这些图。Krivelevich 和 Yuster^[54] 给任一图的彩虹连通数一个上界, 这个上界由图的顶点数和这个图的最小点度决定; 对于任一最小点度为 m 的 n 阶连通图, 它的彩虹连通数不超过 $\frac{20n}{m}$ 。之后, Schiermeyer^[55] 也讨论了对任一图给了彩虹连通数新的上下界并且达到界的图。特别地, 他证明如果某个图具有顶点数 n 且具有最小度 $m \leq 2$, 那么这个图的彩虹连通数不超过 $n - \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ 。

考虑到计算图的彩虹连通数是 NP-困难的, 一些作者开始考虑特殊类的图。例如下面的一些文章: 定向图^[56]、图积^[57]、超图^[58]、Corona 图^[59]、线图^[60]、Cayley 图^[61]、Dense 图^[62] 和 Sparse 随机图^[63, 64]。

作为彩虹连通数的一些推广, 一些新的定义出现了并且得到了广泛的研究。例如, 彩虹顶点连通数^[65]、彩虹连通度^[66]、彩虹控制数^[67] 和彩虹束缚数^[68] 等。大多数关于图的彩虹连通数的结果和论文能被发现在这篇综述文章^[69] 和这本专著^[70] 中。

1.1.5 图的嵌入、图的亏格

图的嵌入理论 (或者说是拓扑图论) 是一个古老且发展丰富的组合学的一个分支。这可能是因为这个分支跟图论里面经典的欧拉等式 (同顶点数、边数、图嵌入到表面形成的面数相关) 密切相关的原因, 最著名的一个例子是四色定理。在最

近的 40 年左右的时间里, 这个领域的发展十分活跃。这个领域发展的新趋势不仅保持在主流上, 而且很多体现在其他的应用上, 例如在伽罗华理论^[71] 和量子场模型^[72, 73]。一个非常简单的例子, 一个儿童会因为玩游戏而去“学习”有关图嵌入的知识, 这似乎是难以置信的, 有时甚至我们觉得是不可能的。

决定一个图的亏格的问题是 NP-困难的^[74]。到目前为止, 关于从代数结构构造的图的亏格的研究论文已经有很多了。例如, Wang^[75] 确定了所有的两类特殊形式的环, 使得它们的零因子图具有亏格最大为 1。Chiang-Hsieh 等人^[76] 描述了所有交换环使得它们的零因子图具有亏格为 1。最近, Rajkumar 和 Devi^[77] 分类了所有的有限群, 使得它们子群的交图有 (非) 定向的亏格为 1。Afkhami 等人^[78] 分类了平面的、环面的和射影平面的有限群的非交换图。

1.1.6 群的幂图

对于某个代数结构 S , 在 S 上构造一个图, 利用这个图的图论性质来研究这个代数结构的代数性质是近些年来的一种新的研究方向。到目前为止, 结合一个图到环或群上并且根据图论性质研究代数性质的论文已经有很多。例如环的零因子图^[79, 80]、群的共轭类图^[81]、群的非交换图^[82], 当然群的 Cayley 图具有非常悠久的历史。

在 1999 年, Kelarev 和 Quinn^[83] 首次介绍了群的有向幂图, 由此研究群的一些组合性质。在接下来的几年里, Kelarev 等人^[84, 85, 86] 类似引入了一个半群的有向幂图, 用来研究半群的一些组合性质, 这推广了群的有向幂图的概念。在 2009 年, Chakrabarty, Ghosh 和 Sen^[87] 首次介绍了半群和群的无向幂图。例如, 在参考文献^[87] 中, 作者描述了其无向幂图是不连通的半群; 证明了一个有限群的无向幂图是完全的, 当且仅当这个群是素数方幂阶的循环群。特别地, 他们证明, 对于任一阶大于 2 的循环群, 这个循环群的无向幂图是哈密顿的。

在近 10 年之内, 对群幂图的研究是十分活跃的, 其中的群幂图指的是群的无向幂图。关于对群幂图的研究主要体现在下面四个方面。

首先是研究有限群幂图的性质。Chakrabarty 等人^[87] 给出了群幂图边数的计算公式并且研究了幂图的哈密顿性。Doostabadi, Erfanian 和 Jafarzadeh^[88] 证明了群的幂图是完美的, 并且他们计算了一类特殊的循环群的幂图的全自同构群。特别地, 他们猜测了循环群幂图的全自同构群的形式。Feng, Ma 和 Wang^[42] 证明了在参考文献^[88] 中关于循环群幂图的全自同构群的猜想是正确的, 并且也独立地证明了群的幂图是完美图。特别地, 他们得到了任一群幂图的全自同构群的形式, 给出了任一群的幂图的结构, 并描述了任一群的幂图的度量维数, 得到了循环群、二面体群以及广义四元数群的幂图的度量维数。Mirzargar 等人^[89] 研究了幂图的团

数和色数, 并且给出了循环群、二面体群以及半二面体群的幂图的团数计算公式。此外, 也研究了群幂图的连通度。在参考文献 [89] 中, 作者给出了群幂图的色数的一个猜想。最近, 在参考文献 [90] 中这个猜想被否定了。特别地, 在参考文献 [89] 中, 其作者也猜想在所有顶点数为 n 的群幂图中, 循环群的幂图具有最多的边数。在 2014 年, Curtin 和 Pourgholi^[91] 证明了这个猜想。Chelvam 和 Sattanathan^[92] 研究了交换群幂图的独立数并且得到了一些特殊群的幂图的结构。此外, 群幂图的欧拉性也被研究了。Chattopadhyay 和 Panigrahi^[93] 研究了循环群、二面体群以及双循环群的幂图的顶点连通度和平面性, 并且他们在参考文献 [94] 中研究了循环群和二面体群的幂图的拉普拉斯谱。特别地, 他们得到了这两类群幂图的代数连通度。Pourgholi 等人^[95] 研究了群幂图的哈密顿性。特别地, 他们用一些反例否定了参考文献 [87] 中关于哈密顿圈的一个猜想。

其次是描述或分类有限群以及它们的幂图的某些性质。Chakrabarty 等人^[87] 分类了幂图是完全图的有限群。Cameron 和 Ghosh^[96] 证明了仅仅有的有限群 G , 满足 $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\Gamma_G)$ 的是克莱因四元群。Cameron^[97] 分类了有限群, 使得它们的幂图中, 除了单位元以外, 还存在一个顶点跟其他所有的顶点相邻。Mirzargar 等人^[89] 分类了满足幂图是二部图的有限群, 并且描述了幂图是平面图的有限群。Doostabadi 等人^[98] 分类了幂图不存在以完全二部图 $K_{1,3}$ 和 $K_{1,4}$ 作为其诱导子图的有限群, 并且描述了有限群, 使得它们的幂图不存在以完全二部图 $K_{2,2}$ 作为其诱导子图。Ma 和 Feng^[90] 分类了幂图是单圈图或唯一可染图的有限群, 并且描述了有限群, 使得它们的幂图是分裂的或者具有色数 3。Pourgholi 等人^[95] 完整分类了幂图是一些完全图共用单位元的并的有限群, 并且描述了幂图是 2-连通的 p -群。

再次是研究那些具有同构的幂图的有限群之间的关系。可以确定, 对于两个不同构的有限群, 它们的幂图或者幂有向图可以是同构的。Cameron 和 Ghosh^[96] 证明如果两个有限交换群的幂图是同构的, 则这两个群是同构的。他们也证明如果两个有限交换群的有向幂图是同构的, 那么对于某个给定元素的阶, 这两个群有相同数量的元素具有这个阶数; 他们猜想对于无向幂图这个结论也是正确的。之后, Cameron^[97] 证明了这个猜想。Moghaddamfar, Rahbariyan 和 Shi^[99] 证明了如果一个群的幂图跟某个有限单群的幂图同构, 那么这个群同构于这个有限单群, 并且对于循环群、二面体群、 n 次对称群以及广义四元数群也是成立的。

最后是研究群幂图的一些推广。受到幂图的影响, Singh 和 Manilal^[100] 定义了有限群的强幂图并且研究了它的图论性质, 例如连通性、欧拉性以及平面性等。Bhuniya 和 Bera^[101] 继续研究了强幂图, 他们分类了强幂图是线图的有限群, 并且得到了强幂图的顶点连通度和色数。特别地, 得到了强幂图的拉普拉斯谱。注意

到在幂图中, 群的单位元跟其他任一顶点均是相邻的。因此, 往往研究幂图中除去单位元跟其相关联的所有边后得到的那个图的一些性质, 这类图被称之为真幂图。Curtin 等人^[102] 证明群的真幂图有直径最多为 2 的充分必要条件是这个群是个幂零群, 且它的每一个 Sylow 子群要么是一个循环群, 要么是一个广义四元数 2-群。此外, 他们也证明如果有限群的真幂图有直径 3, 则这个群不是单群; 群的真幂图是欧拉的充分必要条件是: 这个群要么是一个循环的 2-群, 要么是一个广义四元数 2-群。Moghaddamfar 等人^[99] 给出了群的真幂图是强正则的、二部图或者平面图的充分必要条件。此外, 他们得到了一些无限族的有限群使得它们的真幂图包含一些切边。

在 2013 年, Abawajy, Kelarev 和 Chowdhury^[103] 写了关于群的真幂图的一些已知结果和公开问题的综述文章。

1.2 预备知识

在这一部分, 我们介绍一些有关群和图的基本定义、符号以及结论。

1.2.1 群

本小节我们介绍一些与群有关的基本概念、常用符号及结论。

设 G 是群, $x \in G$ 且 $M \subseteq G$ 。 G 的自同构群记为 $\text{Aut}(G)$ 。若集合 G 是有限的, 则称 G 为有限群。本书所涉及的群均为有限群。群 G 中元素的个数称为 G 的阶, 记作 $|G|$ 。如果 m 是使得 $x^m = e$ 成立的最小的正整数, 则称 m 为 x 的阶, 记作 $|x| = m$ 。如果 $|x| = 2$, 则元素 x 称为是 G 的一个对合。如果包含 x 的 G 的循环子群是唯一的且是 $\langle x \rangle$, 则在 G 中一个对合 x 称为是极大的。此外, 记所有包含 M 的 G 的子群的交为 $\langle M \rangle$, 称为是由 M 生成的 G 的子群。如果一个群的阶是 p 的一个方幂, 其中 p 是一个素数, 则称这个有限群为一个 p -群。

下面我们介绍几类特殊群例。

例 1.2.1(四元数群) Hamilton 四元数单位 $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ 在乘法之下构成一个 8 阶群, 称为四元数群, 记作 Q_8 。即

$$Q_8 = \langle i, j, k \rangle, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji.$$

例 1.2.2(二面体群) 记一个正 n 边形 ($n \geq 3$) 绕它的中心沿逆时针方向旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 的变换为 a , 沿某条指定的对称轴 l 作的反射变换为 b 。于是由 a, b 可构成一

个阶为 $2n$ 的群, 由这个正 n 边形所有的对称组成, 称为二面体群, 记作 D_{2n} 。即

$$D_{2n} = \langle a, b \rangle, \quad a^n = b^2 = e, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

例 1.2.3 (广义四元数群) 设 $n \geq 2$, 下面定义的群是四元数群的推广, 称为广义四元数群, 记作 Q_{4n} :

$$Q_{4n} = \langle a, b \rangle, \quad a^{2n} = e, \quad b^2 = a^n, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

例 1.2.4 (广义双循环群) 设 A 是一个具体唯一对合 t 的交换群且 $|A| > 2$, 称 $\text{Dic}(A) = \langle A, x \rangle$ 为 A 上的广义双循环群, 其中 $x^2 = t$ 且对任一 $a \in A$, 有 $ax = a^{-1}x$ 。

阶为 n 的循环群记为 Z_n 。 n 元集合上所有的置换在映射的合成之下构成一个群, 称为 n 次对称群, 记为 S_n 。 n 元集合上所有的偶置换构成 S_n 的一个子群, 称为 n 次交错群, 记作 A_n 。显然, $|S_n| = n!$ 并且 $|A_n| = \frac{n!}{2}$ 。

给一个有限群 G , 它的所有元素的阶的最小公倍数称为群 G 的指数, 记作 $\exp(G)$ 。群 G 的中心记为 $Z(G)$, 即

$$Z(G) = \{z \in G : \text{对所有的 } g \in G, \quad zg = gz\}.$$

如果 K 是 G 的一个 (或真, 或正规子群) 子群, 则记 $K \leq G$ (或 $K < G$, 或 $K \trianglelefteq G$)。设 H 是群 G 的一个子集, 记 G 中能正规化 H 的所有元素组成的集合为

$$N_G(H) = \{g \in G : H^g = H\},$$

称为 H 在 G 中的正规化子。记 G 中能中心化 H 的所有元素组成的集合为

$$C_G(H) = \{g \in G : \text{对所有 } h \in H, \quad h^g = h\},$$

称为 H 在 G 中的中心化子。因此 $Z(G) = C_G(G)$ 。

定义 1.2.5 如果一个群 G 有一个群列

$$G = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = 1,$$

其中 $G_i \trianglelefteq G$, 且 $G_i/G_{i+1} \leq Z(G/G_{i+1})$, 则称 G 是一个幂零群。

定理 1.2.6(参考文献 [104] 定理 2.7) 设 G 是一个有限群, 则下面的等价:

- (a) G 是幂零的;
- (b) G 的 Sylow p -子群是唯一的, 因此 G 是它的各个 Sylow p -子群的直积。

定理 1.2.7(N/C 定理) 设 H 是群 G 的一个子群, 则 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $\text{Aut}(H)$ 的一个子群。

定理 1.2.8(参考文献 [105] 定理 5.4.10 (ii)) 设 P 是个具有唯一的一个 p -阶子群的 p -群, 则 P 要么是循环群, 要么是一个广义四元数 2-群。

对群 G 中的两个元素 a, b , 定义

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab,$$

称作这两个元素 a 和 b 的换位子。令

$$G' = \langle [a, b] : a, b \in G \rangle,$$

称为群 G 的换位子群或者导群。归纳的定义 n 次导群:

$$G^0 = G, \quad G^{(n)} = (G^{(n-1)})', \quad n \leq 1.$$

如果有一个正整数 n 使得 $G^n = 1$, 那么群 G 称为是一个可解群。

如果群 G 的每一个非单位元素的阶是某个素数, 则称群 G 是一个 EPO-群。本书中我们多次提到 EPO-群, 在参考文献 [106][107] 中有关于有限 EPO-群的描述, 下面是主要结果。

定理 1.2.9(参考文献 [106]) 设 G 是个 EPO-群, 则下面的某个条件发生:

- (a) G 是幂零的, 当且仅当 G 是个指数为 p 的 p -群;
- (b) G 是非幂零且可解的, 当且仅当 G 是个具有核为 P 的 Frobenius 群, 其中 P 是 G 的一个 Sylow p -子群, 并且指数为 p , 它的补是一个阶为 q 的 G 的 Sylow q -子群 Q , p, q 是素数。此外, 如果 $|G| = p^n q$, 那么 G 有一个主群列

$$G = C_0 > P = C_1 > C_2 > \cdots > C_k > C_{k+1} = 1$$

使得对每个 $1 \leq i \leq k$, 我们有 $C_i/C_{i+1} \leq Z(P/C_{i+1})$, Q 不可约的作用在 C_i/C_{i+1} 上且 $|C_i/C_{i+1}| = p^{b_i}$;

- (c) G 是非可解的, 当且仅当 $G \cong A_5$ 。