

2020

全国各大考研辅导机构通用教材

李永乐·王式安 考研数学系列

概率论与数理统计 辅导讲义

主 编 © 王式安

★ 本书特点 ★ 名师教学内容集结，多年经验积累，体系结构不断丰富完善

用微信扫码看视频

微信扫书中二维码观看重难点视频讲解 (获取方式详见封二使用说明)

★ 讲义，纸质的课程，追求化繁为简
★ 承载着每一位学生的美好期望

专属
福利

金榜图书 7大礼包

详见封三

关注公众号
回复关键字
“2020考研数学”
可免费获取
复习规划视频课程
不定期
还会更新小福利哟



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



2020

全国各大考研辅导机构通用教材

李永乐·王式安考研数学系列

概率论与数理统计

辅导讲义



RFID

主 编 ◎ 王式安

内容简介

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内,帮助同学们搞清基本概念,掌握基本理论和方法,了解重点和难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。全书在结构上共八章及一个附录,每章均由考试内容,考试要求,基本概念、基本理论和基本方法,典型例题分析选讲,练习题,练习题答案,练习题提示七部分组成。为了方便同学们总结归纳以及更好地掌握考试的知识要点,本书的章节顺序安排和内容讲解程度上与《考试大纲》保持一致。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导讲义 / 王式安主编. — 西安:西安交通大学出版社,2017.12
ISBN 978-7-5605-7193-5

I. ①概… II. ①王… III. ①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料 ②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 002412 号

书 名 概率论与数理统计辅导讲义
主 编 王式安
策划编辑 张瑞娟
责任编辑 聂 燕

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传 真 (029)82668280
印 刷 三河市燕山印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 10.5 字数 256 千字
版次印次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-7193-5
定 价 49.80 元

读者购书、书店添货,如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

版权所有 侵权必究



金榜图书天猫官方店
店名:时代巨流图书专营店
(<http://sdjits.tmall.com>)



西安交通大学出版社
天猫官方店



西安交通大学出版社
官方微信店

前言

本书是为准备考研的学生复习“概率论与数理统计”而编写的一本辅导讲义,由编者近年来的辅导班笔记改写而成。本书也可作为在校大学生学习“概率论与数理统计”时的参考书。

全书在结构上共八章及一个附录,每章均由考试内容,考试要求,基本概念、基本理论和基本方法,典型例题分析选讲,练习题,练习题答案,练习题提示七部分组成。为了方便同学们总结归纳以及更好地掌握考试的知识要点,本书的章节顺序安排和内容讲解程度上与《考试大纲》保持一致。

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内,帮助同学们搞清基本概念,掌握基本理论和方法,了解重点和难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。一方面,通过对精选典型例题的分析讲评,帮助同学们理清解题思路,熟悉常用的方法、技巧。题后的评注,希望同学们能认真多读两遍,这是重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题。另一方面,精编适量的练习题,帮助同学们更好地理解 and 掌握基本内容、基本解题方法,达到巩固、悟新与提高的目的。每一道练习题都配有答案,并对解题过程中的难点给出了提示。

在考研数学中,数学一和数学三考概率论与数理统计,占 5 个考题(2 个选择,1 个填空,2 个解答),分值为 34 分。相对于高等数学丰富多变的题型与方法,概率论与数理统计这门学科考查的题型较固定、解题方法单一、解题技巧较少。所以,把握“概率论与数理统计”的考点,重视基本功的训练,持之以恒,那么概率复习起来是不会觉得很困难,考试中有关概率的题目也是容易得分的。附录中提供了最近几年的“概率论与数理统计”的考题,希望同学们在使用本书时,能随时翻看,体会考研概率题型的类型和特点。

总之,希望本书能对同学们的复习备考有所帮助。由于编者水平有限,疏漏之处在所难免,欢迎批评指正。

编者

2019 年 1 月

内容简介

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内,帮助同学门理清基本概念,掌握基本方法,重点难点并掌握一些常见的错误与疏漏。全书在结构上按八章及一个附录,每章末由考试题型、考试要求、基本概念、基本理论和基本方法、典型例题分析精讲、练习題、综合题、习题解答七大部分组成。为了便于同学们查阅,附录中列出了考试大纲的要求,本书的编写力求做到内容和讲解程度上与《考试大纲》保持一致。

如果你想免费看名师视频,
就关注“金榜图书考研”微信号。



回复「福利」,领取
20G 新人大礼包

公 司 简 介

北京时代巨流文化有限公司,出版图书涉及研究生考试、公务员考试、教师资格考试、执业医师资格考试、文学名著、中小学作文、童话故事、英语口语等,旗下拥有“金榜图书”图书出版品牌,深受广大考研学生好评!

金榜图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐 王式安 章纪民	2018 年 6 月
经济类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2019 年 1 月
农学门类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2019 年 1 月
数学基础过关 660 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2018 年 12 月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥 季文铎	2018 年 12 月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥 季文铎	2019 年 1 月
数学历年真题全精解析·试卷版(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥 季文铎	2019 年 2 月
数学公式的奥秘	单立波	2019 年 1 月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2019 年 1 月
线性代数辅导讲义	李永乐	2019 年 1 月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2019 年 1 月
高等数学(微积分)辅导讲义	曹显兵、刘喜波	2019 年 3 月
概率论与数理统计辅导讲义	曹显兵	2019 年 3 月
数学强化通关 330 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2019 年 6 月
李永乐数学决胜冲刺 6+2(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2019 年 11 月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐 刘喜波 章纪民	2019 年 11 月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018 年 12 月
大学数学高等数学辅导	武忠祥 章纪民	2019 年 3 月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2019 年 3 月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2019 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2019 年 5 月

思想政治理论大串讲	米鹏	2019 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2019 年 10 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语水平自测 3 套卷:英语一	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语水平自测 3 套卷:英语二	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 1 月
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 1 月
考研英语阅读理解精雕细刻 80 篇	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 5 月
考研英语历年真题精析及复习思路:英语一(试卷版)	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语历年真题精析及复习思路:英语二(试卷版)	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语写作的奥秘:英语一	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语写作的奥秘:英语二	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
你还在背“单”词吗?	刘晓艳	2019 年 1 月
不就是语法和长难句吗?	刘晓艳	2019 年 1 月
就这样征服阅读和完形	刘晓艳	2019 年 5 月
写作和翻译不过如此	刘晓艳	2019 年 5 月
考研词伙	李超	2019 年 1 月
考研句伙	李超	2019 年 1 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 12 月
考研英语语法长难句抓分攻略	欧阳栾天	2018 年 9 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上册)	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(下册)	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试题及精析	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上册)试题	贺银成	2018 年 11 月

贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(下册)答案及精析	贺银成	2018年11月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2018年11月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义	贺银成	2018年11月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2018年11月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2018年11月
乡村全科执业助理医师资格考试考点精编	高鑫	2018年12月
乡村全科执业助理医师资格考试实践技能应试指南	高鑫	2018年12月
乡村全科执业助理医师资格考试考点精练精析	王大群 刘恩钊	2018年12月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2019年1月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2019年1月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2019年1月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2019年1月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
逻辑复习指南	房文学	2019年1月
写作复习指南	房文学	2019年5月
数学复习指南	罗瑞	2019年1月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018年12月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018年12月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018年12月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018年12月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018年12月
老人与海	[美]海明威	2018年12月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018年12月

呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018年12月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018年12月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019年3月
哈姆雷特	[英]威廉·莎士比亚	2019年3月
李尔王	[英]威廉·莎士比亚	2019年3月
仲夏夜之梦	[英]威廉·莎士比亚	2019年3月
皆大欢喜	[英]威廉·莎士比亚	2019年3月
罗密欧与朱丽叶	[英]威廉·莎士比亚	2019年3月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018年4月
呼兰河传	萧红	2018年4月
骆驼祥子	老舍	2018年4月
我这一辈子	老舍	2018年4月
茶馆	老舍	2018年4月

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准,均属北京时代巨流文化有限公司!

金榜图书编辑部电话:(010)51906740

金榜图书天猫官方店店名:时代巨流图书专营店

新浪微博:@金榜图书官方微博

微信公众号:金榜图书考研



@金榜图书官方微博



时代巨流图书专营店



目 录

第一章 随机事件和概率

一、考试内容	(1)
二、考试要求	(1)
三、基本概念、基本理论和基本方法	(1)
1. 随机事件与样本空间	(1)
2. 事件间的关系与运算	(2)
3. 概率、条件概率、事件独立性和五大公式	(4)
4. 古典型和几何型概率、伯努利试验	(5)
四、典型例题分析选讲	(7)
五、练习题	(19)
六、练习题答案	(21)
七、练习题提示	(21)

第二章 随机变量及其分布

一、考试内容	(24)
二、考试要求	(24)
三、基本概念、基本理论和基本方法	(24)
1. 随机变量及其分布函数	(24)
2. 离散型随机变量	(25)
3. 连续型随机变量	(26)
4. 常用分布	(26)
5. 常用性质	(29)
6. 泊松定理	(29)
7. 随机变量函数的分布	(29)
四、典型例题分析选讲	(31)

五、练习题	(40)
六、练习题答案	(42)
七、练习题提示	(42)

第三章 多维随机变量及其分布

一、考试内容	(46)
二、考试要求	(46)
三、基本概念、基本理论和基本方法	(46)
1. 二维随机变量及其分布	(46)
2. 随机变量的独立性	(49)
3. 二维均匀分布和二维正态分布	(49)
4. 两个随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布	(50)
四、典型例题分析选讲	(52)
五、练习题	(69)
六、练习题答案	(71)
七、练习题提示	(71)

第四章 随机变量的数字特征

一、考试内容	(75)
二、考试要求	(75)
三、基本概念、基本理论和基本方法	(75)
1. 随机变量的数学期望	(75)
2. 随机变量的方差	(76)
3. 常用随机变量的数学期望和方差	(77)
4. 矩、协方差和相关系数	(77)
四、典型例题分析选讲	(79)

五、练习题	(92)
六、练习题答案	(94)
七、练习题提示	(94)

第五章 大数定律和中心极限定理

一、考试内容	(100)
二、考试要求	(100)
三、基本概念、基本理论和基本方法	(100)
1. 切比雪夫不等式和依概率收敛	(100)
2. 大数定律	(100)
3. 中心极限定理	(101)
四、典型例题分析选讲	(102)
五、练习题	(104)
六、练习题答案	(105)
七、练习题提示	(105)

第六章 数理统计的基本概念

一、考试内容	(109)
二、考试要求	(109)
三、基本概念、基本理论和基本方法	(109)
1. 总体和样本	(109)
2. 统计量和样本数字特征	(110)
3. 常用统计抽样分布和正态总体的抽样分布	(110)
四、典型例题分析选讲	(114)
五、练习题	(119)
六、练习题答案	(121)
七、练习题提示	(122)

第七章 参数估计

一、考试内容	(126)
--------	-------

二、考试要求	(126)
三、基本概念、基本理论和基本方法	(126)
1. 点估计	(126)
2. 估计量的求法和区间估计	(127)
四、典型例题分析选讲	(130)
五、练习题	(136)
六、练习题答案	(138)
七、练习题提示	(139)

第八章 假设检验 (仅数学一要求)

一、考试内容	(144)
二、考试要求	(144)
三、基本概念、基本理论和基本方法	(144)
1. 实际推断原理	(144)
2. 假设检验	(144)
3. 两类错误	(144)
4. 显著性检验	(144)
5. 正态总体参数的假设检验	(145)
四、典型例题分析选讲	(147)
五、练习题	(148)
六、练习题答案	(149)
七、练习题提示	(150)

附录

2016 年概率论与数理统计考题	(151)
2017 年概率论与数理统计考题	(153)
2018 年概率论与数理统计考题	(155)
2019 年概率论与数理统计考题	(157)

第一章 随机事件和概率

一、考试内容

随机事件与样本空间 事件的关系与运算 完备事件组 概率的概念 概率的基本性质 古典型概率 几何型概率 条件概率 概率的基本公式 事件的独立性 独立重复试验

二、考试要求

1. 理解 随机事件、概率、条件概率、事件的独立性、独立重复试验。
2. 了解 样本空间(基本事件)。
3. 掌握 事件的关系及运算,概率的基本性质,概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式,用事件独立性进行概率计算,计算独立重复试验有关事件概率的方法。
4. 会 计算古典型概率和几何型概率。

三、基本概念、基本理论和基本方法

1. 随机事件与样本空间

(1) 随机试验

定义 对随机现象进行观察或实验称为随机试验,简称试验,记作 E 。它具有如下特点:

- 1° 可以在相同条件下重复进行;
- 2° 所得的可能结果不止一个,且所有可能结果都能事前已知;
- 3° 每次具体实验之前无法预知会出现哪个结果。

(2) 样本空间

定义 随机试验的每一可能结果称为样本点,记作 ω 。由所有样本点全体组成的集合称为样本空间,记作 Ω 。

显然,样本点是组成样本空间的元素,于是有 $\omega \in \Omega$ 。

(3) 随机事件

定义 样本空间的子集称为随机事件,简称事件,常用字母 A, B, C 等表示.

随机事件是由样本空间中的元素即样本点组成,由一个样本点组成的子集是最简单事件,称为基本事件.随机事件既然由样本点组成,因此,也可将随机事件看成是由基本事件组成.

如果一次试验的结果为某一基本事件出现,就称该基本事件出现或发生.如果组成事件 A 的一个基本事件出现或发生,也称事件 A 出现或发生.

把 Ω 看成一事件,则每次试验必有 Ω 中某一基本事件(即样本点)发生,也就是每次试验 Ω 必然发生,称 Ω 为必然事件.

把不包含任何样本点的空集 $\emptyset$ 看成一个事件.每次试验 $\emptyset$ 必不发生,称 $\emptyset$ 为不可能事件.

2. 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间为 Ω ,而 $A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 事件的包含

定义 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A ,或称事件 A 包含于事件 B ,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

从集合关系来说, $A \subset B$ 就是 A 中的每一个样本点都属于 B .

(2) 事件的相等

定义 如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$.

$A = B$ 表示事件 A 与事件 B 有完全相同的样本点.

(3) 事件的交

定义 如果事件 A 与事件 B 同时发生,则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交或积,记为 $A \cap B$ 或 AB .

集合 $A \cap B$ 是由同时属于 A 与 B 的所有公共样本点构成.

事件的交可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 A_2 \cdots A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = A_1 A_2 \cdots A_n \cdots.$$

(4) 互斥事件

定义 如果事件 A 与事件 B 满足关系 $AB = \emptyset$,即 A 与 B 同时发生是不可能事件,则称事件 A 和事件 B 互斥或互不相容.

互斥的两事件没有公共样本点.

事件的互斥可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形:

若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个事件均互斥,即 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$,则称这 n 个事件两两互斥或两两互不相容.

如果可数无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中任意两个事件均互斥,即 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n, \dots$,则称这可数无穷多个事件两两互斥或两两互不相容.

(5) 事件的并

定义 如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生,则称这样一个事件为事件 A 与事件 B 的并

或和,记为 $A \cup B$.

集合 $A \cup B$ 是由属于 A 与 B 的所有样本点构成.

事件的并可推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

(6) 对立事件

定义 如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生,则称事件 A 与事件 B 为对立事件或互逆事件,记为 $\bar{A} = B$ 或 $\bar{B} = A$.

如果 A 与 B 为对立事件,则 A, B 不能同时发生,且必有一个发生,即 A, B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$.

在样本空间中,集合 $\bar{A}$ 是由所有不属于事件 A 的样本点构成的集合.

(7) 完备事件组

定义 如果有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, 则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组或完全事件组.

可以推广完备事件组到可数无穷多个事件的情形:

$$A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n, \cdots, \text{ 且 } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

(8) 事件的差

定义 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A - B$.

在样本空间中集合 $A - B$ 是由属于事件 A 而不属于事件 B 的所有样本点构成的集合.显然 $A - B = A\bar{B}$.

(9) 文氏图

直观上常用几何图形表示集合.事件间的关系与运算也可以用几何图形直观表示.这类图形称文氏图,如图 1-1.

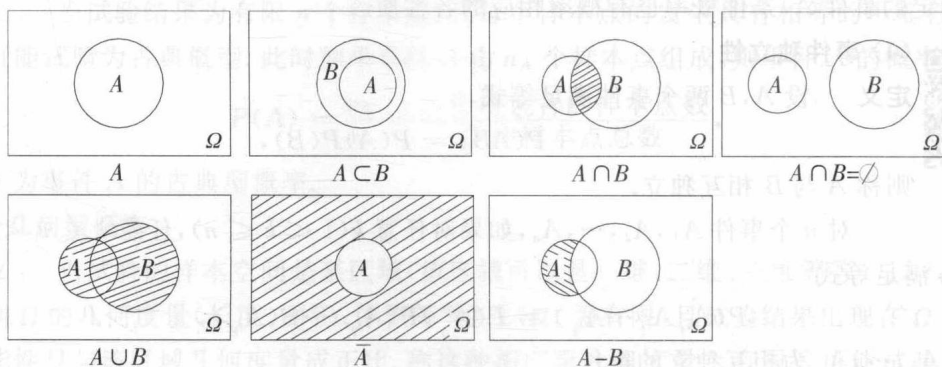


图 1-1

(10) 事件的运算规律

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i,$
 $\overline{A - B} = \overline{A \bar{B}} = \bar{A} \cup B.$

3. 概率、条件概率、事件独立性和五大公式

(1) 概率公理

设试验 E 的样本空间为 Ω , 称实值函数 P 为概率, 如果 P 满足如下三条件:

1° 对于任意事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;

2° 对于必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;

3° 对于两两互斥的可数无穷个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots.$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(2) 概率性质

1° $P(\emptyset) = 0$;

2° 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n);$$

3° $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

4° $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$;

5° $0 \leq P(A) \leq 1$.

(3) 条件概率

定义 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

对固定的事件 A , 条件概率也有概率相应的各性质.

(4) 事件独立性

定义 设 A, B 两个事件满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立.

对 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 如果对任意 $k (1 \leq k \leq n)$, 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ 满足等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为相互独立的事件.

事实上, n 个事件相互独立需要 $C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - n - 1$ 个等式成立.

(5) 相互独立的性质

1° A 与 B 相互独立的充要条件是 A 与 $\bar{B}$ 或 $\bar{A}$ 与 B 或 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

将相互独立的 n 个事件中任何几个事件换成它们相应的对立事件, 则新组成的 n 个事件也相互独立.

2° 当 $0 < P(A) < 1$ 时, A 与 B 独立等价于 $P(B | A) = P(B)$ 或 $P(B | A) = P(B | \bar{A})$

成立.

3° 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 必两两独立. 反过来, 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立, 则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 不一定相互独立.

4° 当 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立时, 它们的部分事件也是相互独立的.

(6) 五大公式

1° 加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$.

2° 减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

3° 乘法公式 当 $P(A) > 0$ 时, $P(AB) = P(A)P(B | A)$;

当 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 时,

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

4° 全概率公式

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组, 则对任意事件 A , 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i).$$

5° 贝叶斯公式

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组, 则对任意事件 A , 且 $P(A) > 0$, 有

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A | B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)}, j = 1, 2, \dots, n.$$

4. 古典型和几何型概率、伯努利试验

(1) 古典型概率

定义 当试验结果为有限 n 个样本点, 且每个样本点的发生具有相等的可能性, 称这种有限等可能试验为古典概型. 此时如果事件 A 由 n_A 个样本点组成, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{A \text{ 中所包含的样本点数}}{\Omega \text{ 中样本点总数}},$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的古典型概率.

(2) 几何型概率

定义 当试验的样本空间是某区域(该区域可以是一维、二维、三维等等), 以 $L(\Omega)$ 表示样本空间 Ω 的几何度量(长度、面积、体积等等), $L(\Omega)$ 为有限, 且试验结果出现在 Ω 中任何区域的可能性只与该区域几何度量成正比. 称这种推广至几何度量上有限等可能试验为几何概型. 此时如果事件 A 的样本点表示的区域为 Ω_A , 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)} = \frac{\Omega_A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}},$$

称这种 $P(A)$ 为事件 A 的几何型概率.

(3) n 重伯努利试验

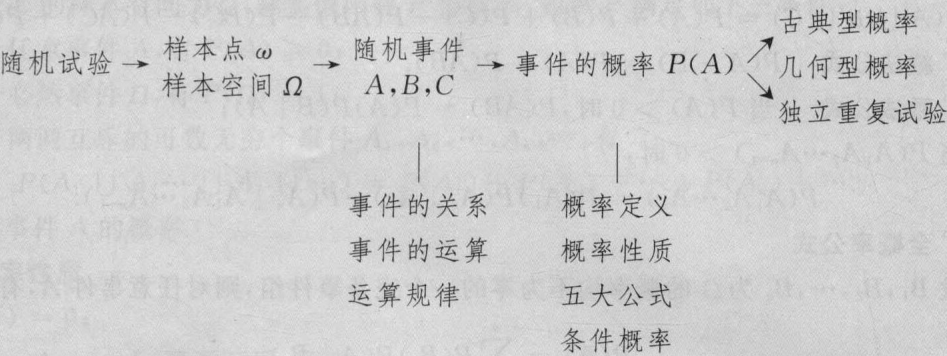
定义 把一随机试验独立重复作若干次, 即各次试验所联系的事件之间相互独立, 且同

一事件在各个试验中出现的概率相同,称为独立重复试验.

如果每次试验只有两个结果 A 和 $\bar{A}$, 则称这种试验为伯努利试验. 将伯努利试验独立重复进行 n 次, 称为 n 重伯努利试验.

设在每次试验中, 概率 $P(A) = p(0 < p < 1)$, 则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率, 又称为二项概率公式: $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$.

本章的知识结构可表示为



本章小结

本章的基本概念和知识点较多, 但重点应关注以下四个方面:

- (1) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}, A - B = \bar{A} \cup B$;
- (2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- (3) 五大公式;
- (4) 简单的古典型概率, 独立重复试验.