



数学 大世界

李毓佩◎著

COLLECTIONS OF
LI YUPEI'S WORKS ON
POPULAR SCIENCE IN
THE FIELD OF MATHEMATICS

李毓佩
数学科普文集

 长江出版传媒
Changjiang Publishing & Media
 湖北科学技术出版社
HUBEI SCIENCE & TECHNOLOGY PRESS

他是大学教授却执着于儿童数学科普创作。在他笔下，种种抽象的数学问题变成了一个有趣的童话故事：零王国的公民都剃光头，无理数变成有血有肉的人物，一位叼着大烟斗的X探长……数学怪侠猪八戒、酷酷猴等，让无数孩子畅游在庞大而有趣的数学王国。

李毓佩数学科普文集

Collections of Li YuPei's Works
on Popular Science in
the Field of Mathematics

李毓佩 ● 著

数学 大世界

长江出版传媒
Changjiang Publishing & Media

湖北科学技术出版社
HUBEI SCIENCE & TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

数学大世界 / 李毓佩著. -- 武汉: 湖北科学技术出版社, 2019.1

(李毓佩数学科普文集)

ISBN 978-7-5706-0379-4

I. ①数… II. ①李… III. ①数学 - 青少年读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第143559号

数学大世界

SHUXUE DASHIJIE

选题策划: 何 龙 何少华

执行策划: 彭永东 罗 萍

责任编辑: 彭永东

特约编辑: 刘健飞

封面设计: 喻 杨

出版发行: 湖北科学技术出版社

电话: 027-87679468

地 址: 武汉市雄楚大街 268 号

邮编: 430070

(湖北出版文化城 B 座 13-14 层)

网 址: <http://www.hbstp.com.cn>

印 刷: 武汉市金港彩印有限公司

邮编: 430023

710×1000 1/16

19 印张

4 插页

242 千字

2019 年 1 月第 1 版

2019 年 1 月第 1 次印刷

定价: 68.00 元

本书如有印装质量问题 可找本社市场部更换

2

目录

< CONTENTS >

1. 数的畅想曲	001
2. 形形色色的数学题	034
3. 解题动画片	063
4. 数学 ABC	086
5. 数学中的“迪斯尼乐园”	119
6. “代数学”的发现	166
7. 代数的威力	202
8. 方程博览会	228
9. 闯关纵横谈	268
10. 代数万花筒	281

1. 数的畅想曲

古人对数的认识

早在文字出现之前，人类祖先就已经形成了数的概念。他们在很早以前就利用结绳或在木头上刻痕的办法来记数。比如美国纽约博物馆就藏有古代秘鲁用有颜色的绳子编的一种叫“基普”的东西，绳子打了许多结，它是一种记数的工具。我国古书《周易》上也有“上古结绳而治”的记载。

5000 多年前，古埃及人把数字写在一种纸草上；古巴比伦人把数字刻在泥板上；我们祖先把数字刻在乌龟甲和牛骨上。下图是古人 1 到 5 的写法：

古埃及数字	I	II	III	IIII	⋮
古巴比伦数字	∨	∨∨	∨∨∨	∨∨∨∨	∨∨∨∨∨
中国甲骨文数字	—	==	≡	≡≡	⊗
现代阿拉伯数字	1	2	3	4	5

随着数字越来越大,用不断加画道道的方法不行了,需要创造出能表示大数的数字。3000 多年前出现了罗马数字,至今还有人在使用。比如钟表上就仍能见到罗马数字。



据研究, I、II、III 是表示 1、2、3 根手指, V 表示一只手 4 指合并、大拇指张开的形状,这和我国广东话有时将 5 说成“一巴掌”是一个道理。10 写成 X,表示两只手掌。6 就是在 5 的右边加一道写成 VI,意思是 $5+1=6$,而 4 是在 5 的左边加一道写成 IV,意思是 $5-1=4$ 。

罗马数字、古埃及数字以及中国的筹算,都采用同一符号重复若干次之后再引入新的符号,防止重复次数太多。在罗马数字中同一符号最多写三次,比如 30 写成 XXX,而 40 则写成 XL,这里 L 是罗马数字 50。又如 80 写成 LXXX,而 90 则写成 XC,这里 C 是罗马数字 100。在古埃及数字中同一符号可以重复 9 次,比如 9 写成 IIIIIIIII。罗马数字显然比古埃及数字进步了。

在许多民族中,古代的数字常用一些名词来表示。比如,2 用“耳朵”“手”“翅膀”表示;4 用“鸵鸟的脚趾”(鸵鸟 4 趾)表示。古代有些数字是用象形文字来写的。比如古埃及数字,见下图:

1	10	100	1000	10000	100000
	∩	☉	☸	☞	🐦
杖	面包	蛇	忘忧树	指着东西的手指	鸟

生活在中美洲中部的古代玛雅人,只用三个符号:点、横和椭圆,就可以表示任何自然数。用点和横可以从1写到19,在任何数下面加上一个椭圆,就把那个数放大20倍。

玛雅数字:

•	••	•••	••••	—	•	••	•••	••••
1	2	3	4	5	6	7	8	9
二	•	••	•••	••••	•	••	•••	••••
10	20	40	100	140	200			



这里,·表示1,大概是石子;—表示5,代表一根小棒;⊖是零,大概是贝壳,20就在⊖上加一点•表示。

现在通行的阿拉伯数码并不是阿拉伯人创造的,而是印度人发明的。古印度人把一些横划刻在石板上表示数,一横表示1,两横表示2。后来,他们改用棕榈树叶作为书写材料,就把笔画连起来写,把二写成 $\mathbf{2}$,三写成 $\mathbf{3}$ 。后来又经过长时间的演变,才变成现在的样子。

公元8世纪,印度记数法由商人带入阿拉伯首都巴格达城。一位叫堪克的人带着数学书和天文图表,拜见了阿巴斯王朝的统治者哈里法。哈里法对此很感兴趣,下令把这些数学书和天文图表译成阿拉伯文,印度数码很快在阿拉伯流传开来。

公元12世纪初,欧洲人开始将阿拉伯文的数学书译成拉丁文。意大利的斐波那契写成《算盘书》,这本书被学校作为教材使用了200多年,影响很大。《算盘书》一开始就写道:“印度的九个数目字是9,8,7,6,5,4,3,2,1,用这九个数字以及阿拉伯人叫作零的记号0,任何数都可以表示出来。”

数字0,据英国史学家李约瑟考证,最初出现于中印边界,可能是两国人民共同创造的。数字0通过阿拉伯商人传入西欧,却受到罗马教会的反对。教皇尤斯提尼昂宣布:“罗马数字是上帝创造的,不允许0存在,这个邪物加进来会玷污神圣的数。”有位罗马学者偷偷传播0,被教会发现。罗马教皇把这位学者投入监狱,施以酷刑,用夹子把他的10根手指紧紧夹住,

使他两手残废不能再握笔写字,最后将该学者害死在监狱中。

数进位制的由来

十进位制的产生,与人长有 10 根手指有关。“屈指可数”,说明手指是人记数时最方便的工具。10 根手指都数完,就要考虑进位了。

南美的古玛雅人,数完了 10 根手指头,再数 10 根脚趾,他们使用二十进位制。

介于澳大利亚北部的约克角半岛与伊利安之间的海峡,叫托列斯海峡。这个海峡附近的群岛上居住着一些部落。他们只靠两个数进行计算,“一”——“乌拉勃”和“二”——“阿柯扎”。遇到“三”就用“阿柯扎、乌拉勃”表示,“四”是“阿柯扎、阿柯扎”,“五”是“阿柯扎、阿柯扎、乌拉勃”,他们使用的是二进位制。

五进位制的手指记数法,最早起源于美洲。这种五进位制至今还在波利尼西亚群岛的居民中使用着。

1 小时等于 60 分,1 分等于 60 秒;圆周角为 360° ,每度 $60'$,每分 $60''$ 。最早采用六十进位制的是古巴比伦人。他们为什么要用六十进位制呢?现在有两种不同的看法:有的人认为古巴比伦人最初以 360 天为一年,将圆周分为 360° ,太阳每天行一度。而圆内接正六边形的每边都等于圆的半径,每边所对的圆心角恰好等于 60° ,六十进位制由此而来。另一些人认为古巴比伦人早就知道一年有 365 天,选择 60 这个数是因为它是 2,3,4,5,6,10,12 等简单数字的倍数。 $60=12\times 5$,12 是一年包含的月数,而 5 是一只手的手指数。



古代各地区的进位制各不相同,连数的写法也不一样。我国继甲骨文和金文(铸在铜器上的文字,也叫钟鼎文)之后,开始用更方便的算筹来记数。“筹”就是竹质或骨质的小棍。我国古代数学家就使用这些小棍,摆成不同的

形式来表示不同的数,并进行计算。1971年8月在陕西千阳县的一座西汉墓中,首次出土了骨质算筹,估计算筹的使用不会晚于公元前3世纪。

用算筹表示数目,有纵横两种方法:

纵式

Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ Ⅴ Ⅵ Ⅶ Ⅷ Ⅸ

横式

— = ≡ ≡ ≡ 上 下 左 右

上,下,左,右三个数字,从前商人记账时还经常用到。

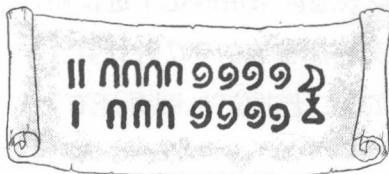
用算筹摆数的原则在《孙子算经》中有记载:“凡算之法,先识其位,一纵十横,百立千僵(百位是纵式,千位又是横式),千十相望,万百相当。”意思是:个位、百位、万位都用纵式;十位、千位都用横式。高位在左,低位在右,比如378,就摆成Ⅲ—ⅦⅢ。遇到零时,就留个空位,比如6708就摆成上Ⅶ—Ⅲ。

古巴比伦人使用六十进位制,书写时也是低位在右,高位在左,比如Ⅴ表示1,Ⅳ表示10。

$$\begin{array}{c} \text{Ⅴ} \text{ Ⅳ} \text{ Ⅲ} \\ 1 \ 21 \ 16 \end{array} = 1 \times 60^2 + 21 \times 60 + 16 = 4876$$



古埃及数字的排列次序,和我们的习惯恰好相反,他们把高位放在右边,低位放在左边。比如,1873就写成



据史书记载,由于错误地翻译了古埃及的记数体系,而产生了一个令人困惑不解的问题,这个问题直到不久以前才得到解决。原来,古希腊哲学家柏拉图曾经根据雅典的伟大政治家和诗人梭伦的回忆录,讲述了一个关于阿特兰蒂斯岛(大西岛)的故事。梭伦曾经游历过许多地方,这个故事是一些博学的古埃及祭司告诉他的。这个故事说:在比梭伦那个时代早大约 9000 年的时候,有一次,巨大的灾难降临到阿特兰蒂斯岛,这个岛连同它的全体居民突然沉没到海里去了。据说,这个岛的面积是 800000 平方英



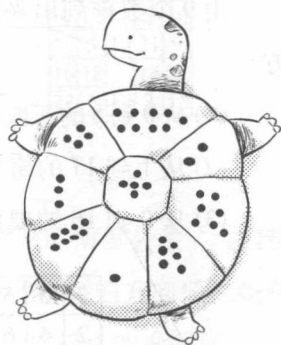
里,因此,柏拉图不得不把它的位置安排到大西洋里去(大西洋这个名称就是这样得来的),因为整个地中海也容纳不下这么大的一个岛。近代对地中海海床所进行的地质考察表明,在地中海里确实曾

经发生过一次非常巨大的火山爆发,它使米诺斯文化突然被毁灭掉了。但是,这个事件大约发生在公元前 1500 年,也就是说,只比梭伦那个时代早大约 900 年,而不是早 9000 年。不仅如此,柏拉图在他写的《克里蒂亚篇》一书中描述的那个四面环山的肥沃平原,原来说是长 3000 斯达提亚(古希腊的长度单位,1 斯达提亚=600 英尺,即不到 200 米),宽 2000 斯达提亚。但是,如果把把这个大小减为 300×200 ,那就正好同克里特岛上的梅萨拉平原相符了。可见,使许多古代学者迷惑的大西岛之谜,是由于读错了古埃及数字而产生的,是把位值提高了一位(把 100 读成 1000 等),使梭伦因数量相差 10 倍而犯了错误。其实,大西岛就是希腊南部的克里特岛。

据考查,世界大多数地区采用的是十进制制。美国数学家易勒斯曾做过调查,美国原始亚美利加各族的 307 种计数系统中,有 146 种是十进位的,有 106 种是五进位或二十进位的,另外还有别的进位制。

乌龟背上的数

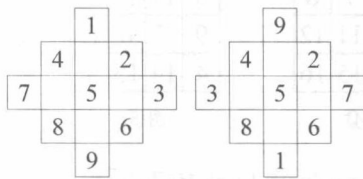
传说在很久以前,夏禹治水来到洛水。洛水中浮起一只大乌龟,乌龟背上有一个奇怪的图,图上有许多圈和点。这些圈和点表示什么意思呢?大家都弄不明白。一个人好奇地数了一下龟甲上的点数,再用数字表示出来,发现这里有非常有趣的关系。



把龟甲上的数填入正方形的方格中,不管是把横着的三个数相加,还是把竖着的三个数相加,或者把斜着的三个数相加,其和都等于 15。

有许多别的民族也很早就知道这个神奇的方图。印度人和阿拉伯人认为这个方图具有一种魔力,能够避邪恶驱瘟疫。直到现在,还可以在印度看见有人在脖子上挂着印有方图的金属片。犹太人认为方图中的 1、3、9 和希伯来文的字母对应,刚好写出“耶和華”(上帝)这个词。

传说、宗教当然是不足为信的。但是,这种方图却反映了正整数的一种性质。我国古代把这种方图叫“纵横图”或者“九宫图”。国外把它叫作“幻方”。



纵横图是怎样排出来的?靠碰运气行吗?不行。下面介绍我国南宋数学家杨辉创造的排列方法。

先画一个图,把1到9从小到大斜着排进图中。然后把最上面的1和最下面的9对调;最左边的7和最右边的3对调;最后把最外面的四个数,填进中间的空格中,就得到了乌龟背上的图了。

由9个数排列出来的是三阶幻方,下面再来看几个有代表性的三阶幻方:

- (1) 从0到8的三阶幻方。它的横、竖、斜行的三个数之和都是12(图①);
- (2) 从1到17的奇数构成的三阶幻方(图②);
- (3) 从0到16的偶数构成的三阶幻方(图③)。

7	0	5
2	4	6
3	8	1

图①

11	1	15
13	9	5
3	17	7

图②

14	0	10
4	8	12
6	16	2

图③

幻方阶数越高,排起来越困难。如不掌握一定的方法,简直别想排出来。下面排一个四阶幻方:把1到16从左到右依次排进方格中(图④);再把外正方形的两组对角上的两个数分别对调,内正方形的两组对角上的两个数分别对调,其余的数不动,得到图⑤。它的每一横行、每一纵列及两条对角线上的四个数之和都等于34。四阶幻方的排法不止一种,总共可以排出880种不同的四阶幻方。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

图④

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图⑤

利用杨辉创造的方法,可以把奇数阶幻方排出来,下面以五阶幻方为例来排一下:

首先把1到25按顺序斜着填进格中(图⑥),然后把上、下、左、右各三对数对调得图⑦,最后再填入中间相应的空格中,就得到一个五阶幻方(图

⑧)。电子计算机计算结果表明,5阶幻方共有 275305224 种,也就是两亿七千多万种排法,可真不少!

			1		
		6	7	2	
	11			3	
16		12	8		4
21	17		13	9	5
	22	18		14	10
		23	19		
			24	20	
				25	

图⑥

			25		
		24	20		
	11		7	3	
4		12	8		16
5	17		13	9	21
	10	18		14	22
		23	19		
			6	2	
				1	

图⑦

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图⑧

科学家把幻方看成是人类智慧的结晶。在一次国际博览会上,人们惊奇地发现地面的方砖上都写着数字。不论你按着横、竖、斜的方向任意找四个相邻的数,加起来都等于 34。原来这是由许多四阶幻方组成的地面(图⑨)。

7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4
7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4

图⑨

为了探索别的星球上是否有宇宙人,人类发射了能飞出太阳系的飞船。飞船上有照片、音乐,还有一幅四阶幻方图。图上没有写数字,而是画的点点来代表数。啊,幻方已飞出地球啦!

奇妙的反幻方

认识了三阶幻方,现在介绍三阶反幻方。什么是反幻方呢?前面见到的三阶幻方的主要特点是:在任意一行或任意一列或任意一条对角线上的 3 个数的和都相等,都等于 15。而反幻方的特点是:在任意一行或任意一列或任意一条对角线上的 3 个数的和都不相等!反幻方和幻方就是背道

而驰!



有,不但有,而且比幻方还要多。不信,举一个例子:用1到9这九个数字填写(图⑩)就是一个反幻方。

8	9	1
7	2	3
6	5	4

图⑩

它的3行的和分别是:

$$8+9+1=18, \quad 7+2+3=12,$$

$$6+5+4=15;$$

它的3列的和分别是:

$$8+7+6=21, \quad 9+2+5=16,$$

$$1+3+4=8;$$

它的两条对角线的和分别是:

$$8+2+4=14, \quad 1+2+6=9.$$

你看,8个数都不相等。

由于反幻方比较多,人们就想找出具有特殊性质的反幻方。功夫不负有心人,还真找到两个螺旋反幻方。这种反幻方的特点是:填进方格里的自然数必须由小到大,按顺序连接,成为螺旋的形状。

螺旋反幻方有两个。一个是从左上角开始,顺时针旋转(图⑪),它的8个和数分别是:6,21,18,16,17,12,15,19;另一个是从中心开始,逆时针

旋转(图⑫),它的8个和数分别是:24,9,12,14,13,18,15,11。

1	2	3
8	9	4
7	6	5

图⑪

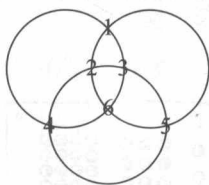
9	8	7
2	1	6
3	4	5

图⑫

有了幻方,又有了反幻方。有正就有反,有方就有圆嘛!世界上还会有“幻圆”呢?世界上还真有“幻圆”,不过它不叫“幻圆”这个名字,而是叫“魔圆”。

其实在100多年前,我国把幻方就叫作“魔方”。后来,匈牙利的罗毕克发明了“魔方”玩具,这种玩具传入我国以后,风靡一时,“魔方”这个名字就被这种玩具抢走了。没法子,数学的“魔方”就只好改名叫幻方了。

最简单的“魔圆”是由3个圆和1到6这六个数组成(图⑬),每个圆上都有4个数。把每个圆上的4个数相加:

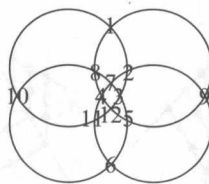


图⑬

$$1 + 3 + 6 + 4 = 14, 1 + 2 + 6 + 5 = 14, 4 + 2 + 3 + 5 = 14,$$

都相等。

再复杂一点的就是由4个圆和从1到12这十二个数组成的“魔圆”(图⑭)。

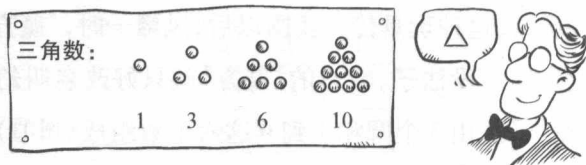


图⑭

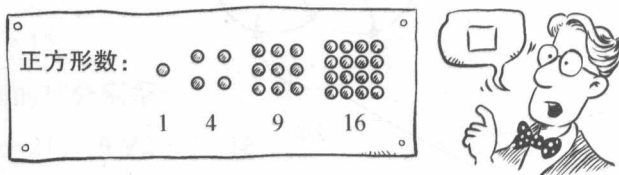
有形状的数

公元前6世纪,古希腊的毕达哥拉斯学派常把数描绘成沙滩上的小石子,又按小石子所能排列的形状,将数分类,叫作“形数”。

用3个石子可以摆成一个正三角形。同样用6个石子,或10个石子可以摆成更大的正三角形。因此,毕达哥拉斯学派把1,3,6,10等叫作“三角数”或“三角形数”。

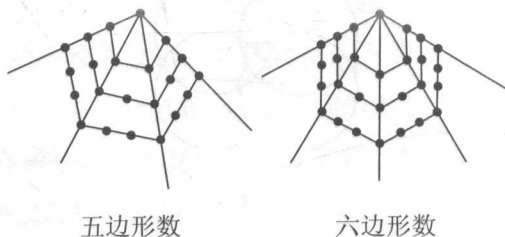


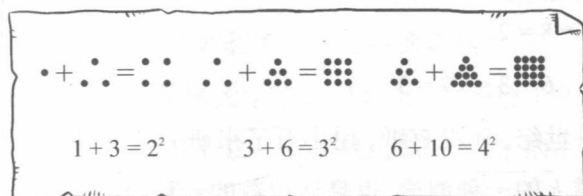
用4个、9个或16个石子都能摆成正方形,因此把1,4,9,16等叫作“正方形数”。



他们还摆出了五边形数、六边形数和其他多边形数。

毕达哥拉斯学派还进一步发掘了各种数间的内在联系。比如,任意两个相邻的三角形数相加,必然是一个数的平方,也就是必须是一个正方形数。



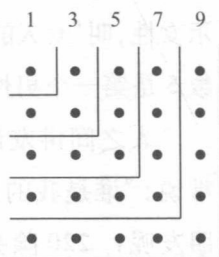


反过来,每个正方形数都可以分成相邻的两个三角形数。

利用正方形数可以造出一个奇数表:1,3,5,7,9,...



他们在正方形格子里放上石子,放法是最上面一行和最左边一列都按1,2,3,...来放石子。其他空格中的石子数,等于对应的最上面一行和最左边一列两格子数之积。他们把这种拐角形叫磬折形。



每一个磬折形中所有数之和是一个立方数。

