

数学游戏与 数学文化

主编 ◎ 彭康青
副主编 ◎ 杨 明



普通高等院校“十三五”规划教材

数学游戏与数学文化

主 编 彭康青

副主编 杨 明

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

内容简介

本书主要介绍了可用于义务教育阶段数学教学中的游戏或趣味性问题，及其求解原理和简单应用。全书共分 12 章，内容涉及算术、代数、数论、逻辑、运筹、几何、拓扑等方面问题。内容的选取既注重趣味性和知识性的统一，又注重通俗性和思想性的统一，贴近教学实际。

本书可作为高职高专院校数学文化类选修课教材，也可作为大学生的课外读物和中小学数学教师的教学参考用书，还适合具有中学以上文化水平的数学爱好者阅读。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学游戏与数学文化 / 彭康青主编. —成都：西南交通大学出版社，2019.1
普通高等院校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5643-6642-1

I. ①数… II. ①彭… III. ①数学—文化—高等学校—教材 IV. ①O1-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 284091 号

普通高等院校“十三五”规划教材

Shuxue Youxi yu Shuxue Wenhua
数学游戏与数学文化

主编 彭康青

责任编辑 孟秀芝
封面设计 严春艳

出版发行 西南交通大学出版社
(四川省成都市二环路北一段 111 号
西南交通大学创新大厦 21 楼)

邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533
网址 <http://www.xnjdcbs.com>
印刷 四川煤田地质制图印刷厂

成品尺寸 170 mm×230 mm
印张 9.5
字数 180 千
版次 2019 年 1 月第 1 版
印次 2019 年 1 月第 1 次
定价 28.00 元
书号 ISBN 978-7-5643-6642-1

课件咨询电话：028-87600533

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话：028-87600562

前 言

数学，是整个科学技术的基础，它广泛应用于人类日常生活和生产实践中。随着社会的进步，它已不再单纯是人类生活的工具，它的思想和方法成为解决许多重大社会科学难题的关键，它的成果正在悄悄改变人们的生活方式。同时数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志，数学素养成为每一位公民必须具备的素养，每个人都需要学习数学、了解数学和运用数学。

数学如此重要，但是很多同学害怕学数学，因为数学通常以冷峻和严肃的面目出现。为了改变数学教材“板着面孔说话”的方式，《义务教育数学课程标准（2011年版）》中专门指出：“数学文化作为教材的组成部分，应渗透在整套教材中。为此，教材可以适时地介绍有关背景知识，包括数学在自然与社会中的应用，以及数学发展史的有关材料，帮助学生了解在人类文明发展中数学的作用，激发学习数学的兴趣，感受数学家治学的严谨，欣赏数学的优美。”

为了贯彻新课标的理念和要求，现阶段，数学文化已渗透到各年级数学教材中，有些内容还以专题形式呈现。比如，七巧板、抽屉原理、莫比乌斯带、简易逻辑问题等都以不同的形式纳入不同版本的教材中。作为数学教师或未来的数学教师，有必要全面了解、掌握这方面的知识，学会设计与组织数学游戏活动，这对高效地开展数学教学是十分必要的。作者围绕这个目的，参阅了不同版本的义务教育阶段数学教材，精心选取了教材涉及的数学文化部分内容，以专题的形式进行介绍。

本书主要介绍了可用于义务教育阶段数学教学中的数学游戏或趣味性问题，及其求解原理和简单应用。大多数游戏看似简单，其中却蕴含着深刻数学思想。全书共分12章，内容包括：扑克牌中的数学游戏，与进位制有关的几个游戏，美的密码，猴子分苹果与递推问题，抢板凳与抽屉原理，逻辑问题，机灵的小白鼠与约瑟夫斯问题，趣味对策问题，七巧板，

一笔画，莫比乌斯带，拓扑学拾趣等。

本书由彭康青执笔撰写并统稿，杨明进行了补充修改。

本书通俗易懂，可作为高职高专院校数学文化类选修课程的教材，也可作为大学生的课外读物和中小学数学教师的教学参考用书，还适合具有中学以上文化水平的数学爱好者阅读。

陇南市科学技术局、陇南师范高等专科学校对本书的出版给予了极大的帮助，在此编者致以衷心的感谢。

限于作者水平，书中错误、缺点在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

2018年9月

目 录

第 1 章 扑克牌中的数学游戏	1
1.1 抢牌游戏	1
1.2 24 点游戏	1
1.3 速算 24 点比赛	2
1.4 常见扑克牌数学游戏介绍	5
1.5 扑克牌魔术时间	6
第 2 章 与进位制有关的几个游戏	15
2.1 盘子装箱问题	15
2.2 砝码问题	16
2.3 神猜妙算	20
第 3 章 美的密码	22
3.1 黄金分割	22
3.2 斐波那契数列	29
3.3 黄金分割与优选法	41
第 4 章 猴子分苹果与递推问题	51
4.1 猴子分苹果	51
4.2 世界末日的传说	52
4.3 分割问题	54
4.4 纸牌覆盖	56
第 5 章 抢板凳与抽屉原理	59
5.1 抢板凳游戏	59
5.2 脑筋急转弯	59
5.3 抽屉原理	60
5.4 抽屉原理的推广	62
5.5 构造抽屉的常用方法	63

第 6 章 趣味逻辑问题	68
6.1 逻辑推理必须遵循的逻辑规律	68
6.2 逻辑推理常用方法	70
6.3 逻辑推理挑战时间	74
第 7 章 机灵的小白鼠与约瑟夫斯问题	85
7.1 机灵的小白鼠	85
7.2 约瑟夫斯问题介绍	88
7.3 约瑟夫斯问题有关的趣题	90
第 8 章 趣味对策问题	93
8.1 渡河问题	93
8.2 尼姆游戏及类似的游戏	96
第 9 章 有趣的七巧板	102
9.1 七巧板的由来	102
9.2 欣赏由七巧板拼成的各种图案	104
9.3 七巧板的游戏规则	107
9.4 制作一副七巧板	108
9.5 玩一玩七巧板	108
第 10 章 一笔画	113
10.1 哥尼斯堡七桥问题	113
10.2 图与一笔画定理	114
10.3 图的应用	117
第 11 章 神奇的莫比乌斯带	121
11.1 初识“魔带”	121
11.2 探寻莫比乌斯带性质	122
11.3 莫比乌斯带在实际生活中的应用	125
第 12 章 拓扑学拾趣	131
12.1 拓扑学简介	131
12.2 趣味拓扑游戏	134
思考练习题答案或提示	139
参考文献	144

第1章

扑克牌中的数学游戏

玩扑克牌是大家喜闻乐见的一种游戏活动. 扑克牌既是一种娱乐工具, 同时也是数学课程的一种教学资源. 许多常见扑克牌游戏都可作为帮助学生认识数、提高运算能力、激发学习兴趣、开发智力的有效载体. 本章我们介绍有关扑克牌的数学游戏活动.

1.1 抢牌游戏

游戏规则:

- (1) 每4人一组, 每组一副扑克牌, 去掉大小王和J, K, Q, 还剩40张, 轮流揭牌, 揭完为止.
- (2) 同时单张出牌, 谁最先算出前面所出牌点数之和时, 把这些牌抢入手中再用; 算错抢错者, 从手里牌中取出与欲抢牌的点数相同的牌.
- (3) 逐个淘汰无牌者, 最后把40张牌抢到手者赢.

此外, 还可将此游戏改造成求和、差、积、商方面的数学游戏.

1.2 24点游戏

有一种叫“24点”的游戏曾经风靡美国、日本等许多国家, 深受青少年朋友的喜爱. 这种游戏首先将大小王去掉, 把A, J, Q, K分别看作1点、11点、12点、13点, 或者将它们均看作1点或10点, 其余牌面是几,

就是几点。玩的规则不尽相同，其中有一种玩法是：

(1) 每4人一组，每组一副扑克牌。去掉大小王，还剩52张，除了数字牌外，A, J, Q, K分别看作1点、11点、12点、13点。轮流揭牌，每人手上13张牌。

(2) 参加游戏的4个人每人从手中任意出1张牌，然后用这4张牌分别代表的正整数思考算法，要求将这4个数通过加、减、乘、除运算，而且每个数用且只用一次，可加括号，谁最先想出结果是24的算法，谁就获得这4张牌。都算不出来，牌入底。

(3) 再次每人任意出1张牌，继续按规则(2)进行。最后谁手中牌最多谁就赢。

例如，抽出的四张牌为3、4、7、11，可以这样计算：

$$(7-4) \times (11-3) = 3 \times 8 = 24$$

或

$$(7+11) \div 3 \times 4 = 18 \div 3 \times 4 = 6 \times 4 = 24.$$

1.3 速算24点比赛

例1 把A, J, Q, K分别看作1点、11点、12点、13点。假设每次抽出4张牌得到下面4个正整数，你能对下面几组数通过加、减、乘、除运算算出24吗？

(1) 2, 3, 4, 5; (2) 3, 4, 5, 10;

(3) 1, 3, 9, 10; (4) K, 7, 9, 5;

(5) J, 6, Q, 5; (6) Q, 10, Q, 1.

解 (1) $2 \times (3+4+5) = 24$;

(2) $3 \times (10 \div 5 \times 4) = 24$;

(3) $(1+10) \times 3 - 9 = 24$;

(4) $(13-7) \times (9-5) = 24$;

(5) $(11-5)+(6+12) = 24$;

$$(6) 12 \times (12 - 10) \times 1 = 24.$$

说明：上面各题的解法不一定是唯一的，如依据 $4 \times 6 = 24$ ，也可得第(2)组为

$$4 \times (10 \times 3 \div 5) = 24.$$

要想比赛获胜，必须有一些技巧。那就是，要非常清楚 24 可以由怎样的 2 个数求得，如 $2 \times 12 = 24$ ， $4 \times 6 = 24$ ， $3 \times 8 = 24$ ， $18 + 6 = 24$ ， $30 - 6 = 24$ ，……，这样就可以把问题转化成怎样使用 4 个数凑出 2 个数的问题。其中有一点值得大家注意，就是 4 个数的顺序可以依据需要任意安排。

例 2 在“24 点”游戏中，抽出了下面 4 组牌，你能算出 24 吗？

$$(1) 3, 3, 7, 7; (2) 1, 5, 5, 5;$$

$$(3) 4, 4, 7, 7; (2) 3, 3, 8, 8.$$

分析 你试几次后会发现，这几个题求解并不容易。如 $3, 3, 7, 7$ ，很容易得出 $3 \times 7 + 3 = 24$ ，但这时只用到 $3, 3, 7$ ，还有一个 7 没用到。于是，我们可以换一种思路：对等式 $3 \times 7 + 3 = 24$ 左边进行恒等变形，从 3×7 和 3 这两项提取“公因子 7”得到

$$3 \times 7 + 3 = 24 \Rightarrow 7 \times \left(3 + \frac{3}{7}\right) = 24.$$

这就在保持 24 不变的前提下让左边算式中多出一个 7，得到了由 $3, 3, 7, 7$ 算 24 的合法算式。

对 $1, 5, 5, 5$ 和 $4, 4, 7, 7$ 可以做类似操作。

$$5 \times 5 - 1 = 24 \Rightarrow 5 \times \left(5 - \frac{1}{5}\right) = 24,$$

$$4 \times 7 - 4 = 24 \Rightarrow 7 \times \left(4 - \frac{4}{7}\right) = 24.$$

对 $3, 3, 8, 8$ 的操作稍有不同。两个数 $3, 8$ 相乘已得 24，剩下两个数 $3, 8$ 怎么处理？但如果将用过的 3 再用一次，由 $3, 3, 8$ 可以得到 $3 \times 3 - 8 = 1$ ，于是有

$$\frac{3 \times 8}{3 \times 3 - 8} = 24,$$

其中 3 被多用了一次。将分子分母同除以 3 就可减少一个 3，得到符合要求

的算式：

$$\frac{3 \times 8}{3 \times 3 - 8} = 24 \Rightarrow \frac{8}{3 - \frac{8}{3}} = 24.$$

解 (1) $7 \times (3 + 3 \div 7) = 24$;

(2) $5 \times (5 - 1 \div 5) = 24$;

(3) $7 \times (4 - 4 \div 7) = 24$;

(4) $8 \div (3 - 8 \div 3) = 24$.

我们看到，“24点”游戏虽然所用的数学知识只是简单的算术，但要算得又快又正确也不容易，并且不时有难题出现。

例 3 抽出的 4 张牌恰好是 1~9 中从大到小连续排列的 4 张，这样的牌能算出 24 吗？

解 符合要求的组合有六组，即

9, 8, 7, 6; 8, 7, 6, 5; 7, 6, 5, 4;

6, 5, 4, 3; 5, 4, 3, 2; 4, 3, 2, 1.

(1) 依据 $4 \times 6 = 24$ 得， $8 \div (9 - 7) \times 6 = 24$;

(2) 依据 $2 \times 12 = 24$ 得， $(8 - 6) \times (7 + 5) = 24$;

(3) 依据 $2 \times 12 = 24$ 得， $(6 - 4) \times (7 + 5) = 24$;

(4) 依据 $4 \times 6 = 24$ 得， $(5 - 4 + 3) \times 6 = 24$;

(5) 依据 $2 \times 12 = 24$ 得， $2 \times (3 + 4 + 5) = 24$;

(6) 依据 $4 \times 6 = 24$ 得， $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

这个例子告诉我们，不论从大到小还是从小到大，取 1~9 中任意连续 4 个数均可算出 24。

读者可能会问，是否任意 4 个数字都可通过添加“+、-、×、÷”四则运算符号（可加括号），算出 24 呢？不一定。经过计算机准确计算，一副扑克牌（52 张），任意抽取 4 张可有 1820 种不同组合，其中有 458 个牌组算不出 24。如 4 个 1, 4 个 2，由于数太小，无法算出 24；而 4 个 7, 4 个 8, 4 个 9，由于数太大，也无法算出 24。若扩大运算范围，增加乘方、开方、阶乘等运算，有些也可以算出来。如 4 个 1 和 4 个 2，我们分别可以这样算：

$$(1+1+1+1)! = 24, \quad (2+2)!+2-2 = 24.$$

从网上我们还看到，网友给出的任意四个数 a, b, c, d 算出 24 的公式为

$$[(a')!+(b')!+(c')!+(d')!]!=24,$$

这里利用了 $a'=0, 0!=1$.

1.4 常见扑克牌数学游戏介绍

扑克牌已有几百年的变迁史。小小的扑克牌，一种简单的游戏，却蕴藏着无尽的智慧。通过小学生玩扑克牌，可以渗透分类集合思想，提高他们的数学运算能力，锻炼他们的大脑，提升他们的智力，对学生学习数学有很好的帮助。

以下是适合小学低年级学生的几个游戏。

1.4.1 比大小

每 2 人一组，每组一副扑克牌，去掉大小王，还剩 52 张，轮流揭牌，揭完为止。每一局游戏中，每位同学出牌前不许看牌，同时出一张牌，比大小，大吃小，即点数大者获得这 2 张牌，最后谁手中牌最多谁就赢。

1.4.2 接龙游戏

每 2~4 人一组，每组一副扑克牌，去掉大小王，还剩 52 张，轮流揭牌，揭完为止。红桃 A 先出，接着轮流单张出牌，出牌者必须分别按四种不同花色，依照牌上的数字，从 A 开始由小往大依次接起来，若手中没有和前面牌数字接上的牌，则后一个人接着出牌。先出完牌者赢，最后出完牌者输。

1.4.3 抢 10 游戏

每 4 人一组，每组一副扑克牌，去掉大小王和 J, K, Q，还剩 40 张，

轮流揭牌，揭完为止。出牌前不许看牌，轮流单张出牌，发现前面所出牌点数之和为 10, 20, 30 等 10 的倍数时，最后出牌者赢得这些牌。逐个淘汰无牌者，最后把 40 张牌抢到手者赢。

思考 以上游戏在小学数学教学中有什么作用？你还知道哪些可用于数学学习的扑克牌游戏？请互相交流。

1.5 扑克牌魔术时间

魔术，又称幻术，俗称“变戏法”。凡是呈现于视觉上不可思议的事，都可称之为魔术。许多魔术是用“障眼法”，即魔术师运用特制的道具、一些观众看不到的小秘密来迷惑观众，制造出种种让人不可思议、变幻莫测的假象，从而达到以假乱真的艺术效果。还有一类魔术，它不需要任何手法，不需要太多玄幻的道具，也能表现出神奇的效果，它依据的往往是数学原理。

无论什么魔术，扑克牌总是一个重要的道具，它的数理性更是为以它为道具的数学魔术增添了不少素材。下面我们介绍几个与数学有关的扑克牌魔术，希望你也能尽快变成小小魔术师。

1.5.1 魔术 1：预言牌

一幅牌，洗过之后（谁洗都行），魔术师装作手放到牌上去做“感应”，然后在纸上写下了一个牌点（比如红桃 7）。

接下来，他要求观众在 10~19 中间说一个数，比如 15。然后，他数出前 15 张牌。接下来，让观众把他所说的两位数的两个数字相加， $1+5=6$ 。请观众从前面 15 张牌中由后往前数出第 6 张牌。

魔术师把自己事先写好的纸片翻开，观众手里拿的那张牌，恰好就是他纸上写的“红桃 7”。

【魔术揭秘】

其实这个魔术背后的原理很简单。假设观众选的数字是 $10+a$ ， $0 \leq a \leq 9$ ，把此数个位数字和十位数字相加得 $1+a$ ，从 $10+a$ 张牌中由后往前数到这一张时，恰是整幅牌的第 $10+a-(1+a)+1$ 张，即第 10 张。因此不管观众选的是十几，当他把这两个数字相加，并从后往前数到这一张时，必定是整幅牌的第 10 张，魔术师只需要偷偷地看下第 10 张牌的数字，并抄下来就行。

1.5.2 魔术 2：猜扑克牌（1）

共有 27 张扑克牌，观众任选定一张，不要告诉魔术师。魔术师把 27 张牌按 1, 2, 3, 1, 2, 3, ……的顺序分成三行（列），每行（列）9 张牌，然后让观众指出他挑选的牌在哪一行（列）。

接下来，魔术师先把观众挑选的这一行（列）牌按顺序收起来，然后再依次收另外两行（列）。全部收好后，魔术师再次把这 27 张牌按 1, 2, 3, 1, 2, 3, ……的顺序分成三行（列），每行（列）9 张牌，然后让观众指出他挑选的牌在哪一行（列）。

这样重复三次，魔术师收好牌后，把最上面的那张交给观众，真是太神奇了，这张恰好就是观众前面选定的那张牌！

你能看出这个魔术的秘密在哪里吗？

【魔术揭秘】

其实道理很简单，既然把牌收起并重排是按一定规则，奥秘必在此“一收一排”之中。第一次收牌之后，那张秘密牌处于前 9 张牌中，而当你把它们又平均分成三行（列）之后，这 9 张牌也被分到三个不同的行（列）中，并且都在各自的行（列）中名列前三。当你再次收牌时，那张秘密牌就处于所有牌的前三名了。接下来，这三张再次被平均分成三行（列），并且都是“排头兵”。观众再次选择时，这张牌终于跑到了第一的位置上。

为什么观众选择三次就能确定一张牌呢？这与进位制有关，这里是三进制。

我们知道，数字有着各种各样的计数法。12是阿拉伯数字的计数法，而XII是罗马数字的计数法。无论采用哪种计数法，其所表达的含义并无二致。

阿拉伯数字的计数法中，我们平时使用的是十进制计数法，它是按照位值原则来计数的。使用的数字有0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9共10种，数的位置不同则意义也不同，从右往左分别表示个位、十位、百位、千位……。

如2635是由2、6、3、5这4个数字组成的，2表示“1000的个数”，6表示“100的个数”，3表示“10的个数”，5表示“1的个数”，即2635这个数是2个1000、6个100、3个10和5个1累加的结果。用式子表示就是

$$2635 = 2 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0.$$

除了十进制以外，按照位值原则来计数的计数法还有很多，如二进制、三进制、八进制和十六进制计数法等，其本质都是一样的。

三进制使用的数字有0, 1, 2共3种。如 102_3 ，和十进制计数法一样，数的位置不同则意义也不同，从左往右依次为：1表示“ 3^2 的个数”，0表示“ 3^1 的个数”，2表示“1的个数”，即

$$102_3 = 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0.$$

为什么27张牌发牌三次就能找出来？让我们把扑克牌从0到26编号按序排好并观察。

第一次发牌

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15 ^{**}	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26

第二次发牌

9	12	15 ^{**}	0	3	6	18	21	24
10	13	16	1	4	7	19	22	25
11	14	17	2	5	8	20	23	26

第三次发牌

9	0	18	10	1	19	11	2	20
12	3	21	13	4	22	14	5	23
15*	6	24	16	7	25	17	8	26

下面我们将 0 ~ 26 这 27 个数化成三进制.

第一次发牌

000	001	002	010	011	012	020	021	022
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
100	101	102	110	111	112	120	121	122
(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)
200	201	202	210	211	212	220	221	222
(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)

观察三位数的第一位 (左起), 第一行的全是 0, 第二行全是 1, 第三行全是 2, 魔术师第一次提问就相当于问三位数的第一位是几.

第二次发牌

100	110	120	000	010	020	200	210	220
(9)	(12)	(15)	(0)	(3)	(6)	(18)	(21)	(24)
101	111	121	001	011	021	201	211	221
(10)	(13)	(16)	(1)	(4)	(7)	(19)	(22)	(25)
102	112	122	002	012	022	202	212	222
(11)	(14)	(17)	(2)	(5)	(8)	(20)	(23)	(26)

注意观察三位数的第三位 (最右边) 的规律, 魔术师第二次提问就相当于问三位数的第三位是多少.

第三次发牌

100	000	200	101	001	201	102	002	202
(9)	(0)	(18)	(10)	(1)	(19)	(11)	(2)	(20)
110	010	210	111	011	211	112	012	212
(12)	(3)	(21)	(13)	(4)	(22)	(14)	(5)	(23)
120	020	220	121	021	221	122	022	222
(15)	(6)	(24)	(16)	(7)	(25)	(17)	(8)	(26)

注意观察三位数的第二位的规律, 魔术师第三次提问就相当于问三位

数的第二位是多少。经三次提问，这个三位数就明确了，牌也就找出来了。

利用三进制，还可以让这个魔术变得更复杂神奇一些，魔术师可以让观众选定的牌出现在任意指定的位置。看下面的魔术。

1.5.3 魔术 3：猜扑克牌（2）

共有 27 张扑克牌，观众任选定一张，不要告诉魔术师。同时观众在 1 至 27 的范围内挑选一个自己喜欢的数字，并告诉魔术师，如 5。

魔术师把 27 张牌按任意方式洗牌后，按下面的方法，即 1, 2, 3, 1, 2, 3, ……的顺序分成三列（或三摞），每列（摞）9 张牌，然后让观众指出他选定的牌在哪一列（摞）。

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9
⋮	⋮	⋮

接下来，魔术师将这三列（摞）牌按一定顺序收起来。全部收好后，魔术师再次把这 27 张牌按 1, 2, 3, 1, 2, 3, ……的顺序分成三列（摞），每列（摞）9 张牌，然后让观众第二次指出他挑选的牌在哪一列（摞）。

这样重复三次，魔术师按一定顺序收好牌后，从最上面往下数，数到第 5 张，把这张展示给观众。这张恰好就是观众选定的那张牌！

【魔术揭秘】

这个魔术的秘密仍然存在于收牌发牌之中。观众喜欢数字 5，如何让观众所选定的牌出现在第 5 个位置上呢？发牌的方式是确定的，按什么顺序将三列（摞）牌收起来是关键。收牌顺序可以按以下办法操作：

首先，将 5 减去 1 得到 4，将 4 化为三进制数，即

$$4_{10} = 011_3.$$

三进制数只涉及 0, 1, 2 三个数字，“0”代表将观众所选一列（摞）牌放最上面（即下次先发的位置），“1”代表将观众所选一列（摞）牌放中间，“2”代表将观众所选一列（摞）牌放最下面。