“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

自动控制原理题海与考研指导

（第三版）

胡寿松　主编

科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

自动控制原理题海与考研指导

（第三版）

胡寿松　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为胡寿松主编的《自动控制原理》、《自动控制原理基础教程》的学习指导性教学配套用书。本书构建了一个系统且完整的自动控制原理题库，其内容包括解题的数学基础及450道多内涵母题的详解。这些母题包含了概念题、一般题、设计题、技巧题、证明题、考研题以及难题7类，便于配制满足各种基本要求的试卷内容。

本书在解题过程中，给出了科学、完善的解题步骤，并注重一题多解，以便相互校核。特别是，书中大部分题目给出MATLAB验证程序，便于研究系统参数的不同选择及不同结构的改变对系统性能的影响，从而丰富了解题内容，可进一步升华读者对自动控制理论的掌握和应用，并便于生成数量不限的试题。

本书可作为高等学校自动化、电气工程及其自动化、机械设计制造及其自动化、电子信息工程、测控技术与仪器等专业的自动控制原理课程的教学配套用书，并可供广大学生考研、提高学习质量和教师出题之用。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理题海与考研指导/胡寿松主编．—3版．—北京：科学出版社，2019．3

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-03-060141-4

Ⅰ.①自…　Ⅱ.①胡…　Ⅲ.①自动控制理论-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①TP13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第284559号

责任编辑：匡　敏　余　江　刘俊来／责任校对：郭瑞芝

责任印制：霍　兵／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

天津文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008年3月第　一　版　　开本：787×1092 1/16

2013年5月第　二　版　　印张：34 1/2

2019年3月第　三　版　　字数：818 000

2019年3月第17次印刷

定价：98.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是与胡寿松教授主编的《自动控制原理》、《自动控制原理基础教程》(科学出版社)相配套的学习指导性教学用书,同时兼容于其他各种自动控制原理教材。

为了满足广大读者深入掌握自动控制技术的需求,适应广大学生考研和教师出题的需要,我们编著和出版了这本《自动控制原理题海与考研指导》,从而填补了相关书籍的出版空白。经多年使用后,本着"海纳百川,有容乃大"的宗旨,我们对本书进行了再次修订。

本书系统地给出了自动控制原理各类题目的详解,这些题目包含了概念题、一般题、设计题、技巧题、证明题、考研题以及难题7类,便于配制满足各种基本要求的试卷内容。

本书在解题过程中,给出了科学而完善的解题步骤,并注重一题多解,以便相互校核。特别是,书中大部分题目给出MATLAB验证程序,除可核实求解结果的正确性外,还便于修改系统参数,完善控制系统设计性能,同时在时域、复域和频域中直观地展示平行设计结果,以更好地满足实际控制系统的设计需求,进一步升华读者对自动控制理论的掌握和应用。

我们深信,通过学习和应用本书,读者会在定性分析、定量计算、知识综合运用、解题技巧、MATLAB掌握以及数形结合等能力方面,得到进一步提高。

本书由胡寿松教授主编,张军峰副教授、陶洪峰副教授参加编著。在本书编著过程中,得到了姜周曙、文成林、孙新柱、田建艳、夏良正、费树岷、王执铨、胡维礼、王永、张敏、何亚群、刘亚、李小平、王凤如、丁勇、王从庆、方华京、冯江等教授的支持和帮助,在此深致谢忱。

对于本书存在的疏漏和不妥之处,恳请广大读者不吝指正。

胡寿松

2016年6月

目 录

第一章　数学基础

1-1　拉普拉斯变换

拉普拉斯变换法是一种求解线性常微分方程的简便运算方法。拉普拉斯变换可以将许多普通函数，如正弦函数、阻尼正弦函数和指数函数，转变为复变量 s 的代数函数，从而将复杂的线性常微分方程求解问题，转化为简单的复变量 s 的代数方程求解问题。

1. 拉普拉斯变换

设 $f(t)$ 为时间 t 的函数，且当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则 $f(t)$ 的拉普拉斯变换定义为

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

相应的拉普拉斯反变换则为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

式中，收敛横坐标 c 为实常量，其实部应大于 $F(s)$ 所有奇点的实部。

1）拉普拉斯变换的存在性

如果拉普拉斯积分收敛，则函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在。若存在一个正实常数 σ，使得函数 $\mathrm{e}^{-\sigma t}|f(t)|$ 在 t 趋于无穷大时趋于零，则称函数 $f(t)$ 为指数级的。

如果 $f(t)$ 在 $t>0$ 范围内的每一个有限区间上分段连续，且当 t 趋于无穷大时函数 $f(t)$ 为指数级的，则 $f(t)$ 的拉普拉斯积分是收敛的。

如果 $\sigma>\sigma_c$，函数 $\mathrm{e}^{-\sigma t}|f(t)|$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}|f(t)|\to 0$，且有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\ |\ f(t)\ |\to\infty,\quad \forall\sigma<\sigma_c$$

则 σ_c 的值称为收敛横坐标。

对于函数 $f(t)=A\mathrm{e}^{-\alpha t}$，若

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\ |\ A\mathrm{e}^{-\alpha t}\ |\to\infty,\quad \forall\sigma>-\alpha$$

则收敛横坐标 $\sigma_c=\alpha$。只有当 s 的实部 σ 大于收敛横坐标 σ_c 时，积分 $\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ 才是收敛的。因此，必须将算子 s 选定为一个能使上述积分收敛的常数。

从函数 $F(s)$ 的极点来看，收敛横坐标 σ_c 相当于 s 平面内 $F(s)$ 最右边的极点的实部。例如

$$F(s)=\frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

则 $\sigma_c=-1$。可以看出，对于 t，$\sin\omega t$ 和 $t\sin\omega t$ 这样一些函数，其收敛横坐标为零；对于 $\mathrm{e}^{-\sigma t}$，$t\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin\omega t$ 这样一些函数，其收敛横坐标为 $-\sigma$。但是，对于那些比指数函数增加得更快的函数，不可能找到合适的收敛横坐标值。因此，像 e^{t^2} 和 $t\mathrm{e}^{t^2}$ 这类函数，不能进

行拉普拉斯变换。

应当指出，在物理上可以实现的信号，总是可以进行拉普拉斯变换的。

2）指数函数

考虑下列指数函数：

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ Ae^{-\alpha t}, & t\geqslant 0\end{cases}$$

式中，A 和 α 为常数，则指数函数的拉普拉斯变换可以求得如下：

$$F(s)=\int_0^{\infty}Ae^{-\alpha t}e^{-st}\,dt=\frac{A}{s+\alpha}$$

3）阶跃函数

考虑下列阶跃函数：

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ A, & t>0\end{cases}$$

式中，A 为常数，当 $A=1(t)$ 时，则为单位阶跃函数。

阶跃函数的拉普拉斯变换为

$$F(s)=\int_0^{\infty}Ae^{-st}\,dt=\frac{A}{s}$$

4）斜坡函数

考虑下列斜坡函数：

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ At, & t\geqslant 0\end{cases}$$

式中，A 为常数。

斜坡函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^{\infty}At\,e^{-st}\,dt=At\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{Ae^{-st}}{-s}\,dt\\&=\frac{A}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}\,dt=\frac{A}{s^2}\end{aligned}$$

5）正弦函数

考虑下列正弦函数：

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ A\sin\omega t, & t\geqslant 0\end{cases}$$

式中，A 和 ω 为常数。由于

$$\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$$

故正弦函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}F(s)&=\mathscr{L}[A\sin\omega t]=\frac{A}{2j}\int_0^{\infty}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})e^{-st}\,dt\\&=\frac{A}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

类似地，$A\cos\omega t$ 的拉普拉斯变换可导出为

$$F(s)=\mathscr{L}[A\cos\omega t]=\frac{As}{s^2+\omega^2}$$

6）平移函数

设函数为 $f(t)$，当 $t<0$ 时 $f(t)=0$；平移函数为 $f(t-\alpha)1(t-\alpha)$，其中 $\alpha\geqslant 0$，且 $t<\alpha$ 时 $f(t-\alpha)1(t-\alpha)=0$，则平移函数的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[f(t-\alpha)1(t-\alpha)]=\int_0^{\infty}f(t-\alpha)1(t-\alpha)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

令 $\tau=t-\alpha$，有

$$\int_0^{\infty}f(t-\alpha)1(t-\alpha)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_{-\alpha}^{\infty}f(\tau)1(\tau)\mathrm{e}^{-s(\tau+\alpha)}\,\mathrm{d}\tau$$

因 $\tau<0$ 时 $f(\tau)1(\tau)=0$，故有

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\infty}f(\tau)1(\tau)\mathrm{e}^{-s(\tau+\alpha)}\,\mathrm{d}\tau&=\int_0^{\infty}f(\tau)1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{-\alpha s}\int_0^{\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{-\alpha s}F(s)\end{aligned}$$

式中

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

于是

$$\mathscr{L}[f(t-\alpha)1(t-\alpha)]=\mathrm{e}^{-\alpha s}F(s),\quad \alpha\geqslant 0$$

7）脉动函数

考虑下列脉动函数：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{t_0}, & 0<t<t_0\\ 0, & t<0,\quad t_0<t\end{cases}$$

式中，A 和 t_0 为常数。由于

$$f(t)=\frac{A}{t_0}1(t)-\frac{A}{t_0}1(t-t_0)$$

故脉动函数的拉普拉斯变换

$$F(s)=\mathscr{L}\left[\frac{A}{t_0}1(t)\right]-\mathscr{L}\left[\frac{A}{t_0}1(t-t_0)\right]=\frac{A}{t_0 s}(1-\mathrm{e}^{-st_0})$$

8）脉冲函数

考虑下列脉冲函数：

$$g(t)=\begin{cases}\lim\limits_{t_0\to 0}\dfrac{A}{t_0}, & 0<t<t_0\\ 0, & t<0,\quad t_0<t\end{cases}$$

则脉冲函数的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[g(t)]=\lim_{t_0\to 0}\left[\frac{A}{t_0 s}(1-\mathrm{e}^{-st_0})\right]=\lim_{t_0\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}[A(1-\mathrm{e}^{-st_0})]}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}(t_0 s)}$$

$$=\lim_{t_0\to 0}\frac{As}{s}=A$$

9) $f(t)$与 $e^{-\alpha t}$ 相乘

若 $f(t)$可拉普拉斯变换，且其拉普拉斯变换为 $F(s)$，则 $e^{-\alpha t}f(t)$的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}f(t)]=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}dt = F(s+\alpha)$$

类似地，若有

$$\mathscr{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = F(s), \qquad \mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} = G(s)$$

则有

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}\sin\omega t] = F(s+\alpha) = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}\cos\omega t] = G(s+\alpha) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

10) 时间比例尺

设函数 $f(t)$的拉普拉斯变换为 $F(s)$，改变时间比例尺的函数为 $f(t/\alpha)$，其中 α 为正常数，则 $f(t/\alpha)$的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[f(t/\alpha)] = \int_0^{\infty} f(t/\alpha)e^{-st}dt$$

令 $t/\alpha=t_1$，$\alpha s=s_1$，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t/\alpha)] &= \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-s_1t_1}d(\alpha t_1)\\ &= \alpha\int_0^{\infty} f(t_1)e^{-s_1t_1}dt_1\\ &= \alpha F(s_1) = \alpha F(\alpha s)\end{aligned}$$

例如，考虑 $f(t)=e^{-t}$，$f(t/5)=e^{-0.2t}$，由于

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1} = F(s)$$

因此

$$\mathscr{L}[f(t/5)]=\mathscr{L}[e^{-0.2t}]=5F(5s)=\frac{5}{5s+1}$$

11) 拉普拉斯变换的积分下限

在某些情况下，若函数 $f(t)$在 $t=0$ 处有一个脉冲函数，这时必须明确指出拉普拉斯积分下限是 0_- 还是 0_+，因为对这两种下限，$f(t)$的拉普拉斯变换是不同的。设

$$\mathscr{L}_+[f(t)] = \int_{0_+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathscr{L}_-[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathscr{L}_+[f(t)]+\int_{0_-}^{0_+} f(t)e^{-st}dt$$

如果 $f(t)$在 $t=0$ 处包含一个脉冲函数，则因$\int_{0_-}^{0_+} f(t)e^{-st}dt \neq 0$，故有

$$\mathscr{L}_+[f(t)] \neq \mathscr{L}_-[f(t)]$$

显然，如果在 $t=0$ 处不具有脉冲函数，则有

$$\mathscr{L}_+[f(t)] = \mathscr{L}_-[f(t)]$$

常用函数的拉普拉斯变换对照表，如表 1-1 所示。

表 1-1　常用函数拉普拉斯变换对照表

序号	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	$1(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	t
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
6	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}(e^{-at}-e^{-bt})$
7	$\frac{s+a_0}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}[(a_0-a)e^{-at}-(a_0-b)e^{-bt}]$
8	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab(a-b)}[be^{-at}-ae^{-bt}]$
9	$\frac{s+a_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{a_0}{ab}+\frac{a_0-a}{a(a-b)}e^{-at}+\frac{a_0-b}{b(b-a)}e^{-bt}$
10	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{a_0}{ab}+\frac{a^2-a_1a+a_0}{a(a-b)}e^{-at}-\frac{b^2-a_1b+a_0}{b(a-b)}e^{-bt}$
11	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
12	$\frac{s+a_0}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{a_0-a}{(b-a)(c-a)}e^{-at}+\frac{a_0-b}{(a-b)(c-b)}e^{-bt}+\frac{a_0-c}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$
13	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{a^2-a_1a+a_0}{(b-a)(c-a)}e^{-at}+\frac{b^2-a_1b+a_0}{(a-b)(c-b)}e^{-bt}+\frac{c^2-a_1c+a_0}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$
14	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$
15	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
16	$\frac{s+a_0}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}(a_0^2+\omega^2)^{1/2}\sin(\omega t+\varphi)$，$\varphi=\arctan\frac{\omega}{a_0}$
17	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
18	$\frac{s+a_0}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{a_0}{\omega^2}-\frac{(a_0^2+\omega^2)^{1/2}}{\omega^2}\cos(\omega t+\varphi)$，$\varphi=\arctan\frac{\omega}{a_0}$
19	$\frac{s+a_0}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{a_0-a}{a^2+\omega^2}e^{-at}+\frac{1}{\omega}\left(\frac{a_0^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}\right)^{1/2}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\omega}{a_0}-\arctan\frac{\omega}{a}$
20	$\frac{1}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{-at}\sin\omega t$

序 号	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$
21	$\dfrac{s+a_0}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}[(a_0-a)^2+\omega^2]^{1/2}\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\dfrac{\omega}{a_0-a}$
22	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t$
23	$\dfrac{1}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+\omega^2}+\dfrac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}\omega}\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t-\varphi)$ $\varphi=\arctan\dfrac{\omega}{-a}$
24	$\dfrac{s+a_0}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\dfrac{a_0}{a^2+\omega^2}+\dfrac{[(a_0+a)^2+\omega^2]^{1/2}}{\omega(a^2+\omega^2)^{1/2}}\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\dfrac{\omega}{a_0-a}-\arctan\dfrac{\omega}{-a}$
25	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\dfrac{a_0}{a^2+\omega^2}+\dfrac{[(a^2-\omega^2-a_1a+a_0)^2+\omega^2(a_1-2a)^2]^{1/2}}{\omega(a^2+\omega^2)^{1/2}}\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\dfrac{\omega(a_1-2a)}{a^2-\omega^2-a_1a+a_0}-\arctan\dfrac{\omega}{-a}$
26	$\dfrac{1}{(s+c)[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-ct}}{(c-a)^2+\omega^2}+\dfrac{\mathrm{e}^{-at}}{\omega[(c-a)^2+\omega^2]^{1/2}}\sin(\omega t-\varphi)$ $\varphi=\arctan\dfrac{\omega}{c-a}$
27	$\dfrac{s+a_0}{(s+c)[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\dfrac{a_0-c}{(a-c)^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-ct}+\dfrac{1}{\omega}\left[\dfrac{(a_0-a)^2+\omega^2}{(c-a)^2+\omega^2}\right]^{1/2}\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\dfrac{\omega}{a_0-a}-\arctan\dfrac{\omega}{c-a}$
28	$\dfrac{1}{s(s+c)[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\dfrac{1}{c(a^2+\omega^2)}-\dfrac{\mathrm{e}^{-ct}}{c[(a-c)^2+\omega^2]}+\dfrac{\mathrm{e}^{-at}}{\omega(a^2+\omega^2)^{1/2}[(c-a)^2+\omega^2]^{1/2}}\sin(\omega t-\varphi)$ $\varphi=\arctan\dfrac{\omega}{-a}+\arctan\dfrac{\omega}{c-a}$
29	$\dfrac{s+a_0}{s(s+c)[(s+a)^2+\omega^2]}$	$\dfrac{a_0}{c(a^2+\omega^2)}+\dfrac{(c-a_0)\mathrm{e}^{-ct}}{c[(a-c)^2+\omega^2]}+\dfrac{\mathrm{e}^{-at}}{\omega(a^2+\omega^2)^{1/2}}\left[\dfrac{(a_0-a)^2+\omega^2}{(c-a)^2+\omega^2}\right]^{1/2}\sin(\omega t-\varphi)$ $\varphi=\arctan\dfrac{\omega}{a_0-a}-\arctan\dfrac{\omega}{c-a}-\arctan\dfrac{\omega}{-a}$
30	$\dfrac{1}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-at}+at-1}{a^2}$
31	$\dfrac{s+a_0}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{a_0-a}{a^2}\mathrm{e}^{-at}+\dfrac{a_0}{a}t+\dfrac{a-a_0}{a^2}$
32	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{a^2-a_1a+a_0}{a^2}\mathrm{e}^{-at}+\dfrac{a_0}{a}t+\dfrac{a_1a-a_0}{a^2}$
33	$\dfrac{s+a_0}{(s+a)^2}$	$[(a_0-a)t+1]\mathrm{e}^{-at}$
34	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{-at}$
35	$\dfrac{1}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1-(1+at)\mathrm{e}^{-at}}{a^2}$
36	$\dfrac{s+a_0}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{a_0}{a^2}+\left(\dfrac{a-a_0}{a}t-\dfrac{a_0}{a^2}\right)\mathrm{e}^{-at}$

序号	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$
37	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{a_0}{a^2}+\left(\dfrac{a_1a-a_0-a^2}{a}t+\dfrac{a^2-a_0}{a^2}\right)e^{-at}$
38	$\dfrac{1}{s(s+a)}$	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$
39	$\dfrac{s+a_0}{s(s+a)}$	$\dfrac{1}{a}[a_0-(a_0-a)e^{-at}]$
40	$\dfrac{s}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_nt}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\varphi),\varphi=\arctan(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$
41	$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$	$\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_nt}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$
42	$\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2)}$	$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_nt}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi),\quad \varphi=\arctan(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$

2. 拉普拉斯变换定理

1）实微分定理

设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，则应用分部积分法求拉普拉斯变换积分，有

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\frac{e^{-st}}{-s}dt=\frac{f(0)}{s}+\frac{1}{s}\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]$$

从而

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

同理可证

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

2）终值定理

如果函数 $f(t)$ 和 $df(t)/dt$ 是可拉普拉斯变换的，象函数 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，并且极限 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 存在，则有

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$$

为了证明该定理，在 $df(t)/dt$ 的拉普拉斯变换中，令 s 趋于零，即

$$\lim_{s\to0}\int_0^\infty\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]e^{-st}dt=\lim_{s\to0}[sF(s)-f(0)]$$

因为 $\lim\limits_{s\to0}e^{-st}=1$，所以得

$$\int_0^\infty\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt=f(t)\Big|_0^\infty=f(\infty)-f(0)=\lim_{s\to0}sF(s)-f(0)$$

从而

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$$

应当指出，当且仅当 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 存在，才能应用终值定理，这意味着当 $t\to\infty$ 时，$f(t)$ 将稳定到确定值。如果 $sF(s)$ 的所有极点均位于左半 s 平面，则 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 存在；如果 $sF(s)$ 有极点位于虚轴或位于右半 s 平面内，$f(t)$ 将分别包含振荡的或按指数规律增长的时间函数分量，因而 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 将不存在。显然，如果 $f(t)$ 是正弦函数 $\sin\omega t$，则 $sF(s)$ 将有位于虚轴上

的极点 $s=\pm j\omega$，因此$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$不存在，所以终值定理不适用于这类函数。

3）初值定理

初值定理是终值定理的对偶定理。如果函数 $f(t)$和 $\mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$ 均可拉普拉斯变换，并且$\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在，则有

$$f(0_+) = \lim_{s\to\infty}sF(s)$$

为了证明该定理，利用 $\mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$ 的 $\mathscr{L}_+$ 变换

$$\mathscr{L}_+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]= sF(s) - f(0_+)$$

由于
$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{e}^{-st}\to 0,\qquad \forall\, t\in[0_+,\infty)$$

因此
$$\lim_{s\to\infty}\int_{0_+}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - f(0_+)] = 0$$

证得
$$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

应当指出，在应用初值定理时，对 $sF(s)$的极点位置没有限制，因此对于正弦函数，初值定理是成立的。

4）积分定理

如果函数 $f(t)$是指数级的，且 $f(0_-)=f(0_+)=f(0)$，$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]&=\int_0^{\infty}\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}f(t)\,\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{s}\int f(t)\mathrm{d}t\,\Big|_{t=0} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s}\end{aligned}$$

如果 $f(t)$在 $t=0$ 处包含一个脉冲函数，则 $f^{-1}(0_+)\neq f^{-1}(0_-)$。此时，必须对积分定理作如下修改：

$$\mathscr{L}_+\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_+)}{s}$$

$$\mathscr{L}_-\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_-)}{s}$$

5）复微分定理

若函数 $f(t)$可拉普拉斯变换，则除了在 $F(s)$的极点之外，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[tf(t)]&= \int_0^{\infty}tf(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =-\int_0^{\infty}f(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{-st})\,\mathrm{d}t\\ &=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)\end{aligned}$$

类似地，令 $tf(t)=g(t)$，有

$$\mathscr{L}[t^2 f(t)] = \mathscr{L}[\tan(t)] =-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}G(s) =-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)\right]= (-1)^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F(s)$$

重复上述过程，可得

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s),\quad n = 1,2,3,\cdots$$

6）卷积定理

考虑下列卷积函数

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) \mathrm{d}\tau$$

由于 $\tau > t$ 时，有 $f_1(t-\tau)1(t-\tau)=0$，因此

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^\infty f_1(t-\tau) 1(t-\tau) f_2(\tau) \mathrm{d}\tau$$

于是
$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) \mathrm{d}\tau\right] = \mathscr{L}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) 1(t-\tau) f_2(\tau) \mathrm{d}\tau\right]$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) 1(t-\tau) f_2(\tau) \mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}t$$

令 $t-\tau=\lambda$，并改变积分次序，可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) \mathrm{d}\tau\right] &= \int_0^\infty f_1(t-\tau) 1(t-\tau) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t \int_0^\infty f_2(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) \mathrm{e}^{-s(\lambda+\tau)} \mathrm{d}\lambda \int_0^\infty f_2(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) \mathrm{e}^{-s\lambda} \mathrm{d}\lambda \int_0^\infty f_2(\tau) \mathrm{e}^{-s\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= F_1(s) F_2(s)\end{aligned}$$

式中

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \mathscr{L}[f_1(t)], \qquad F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \mathscr{L}[f_2(t)]$$

拉普拉斯变换的基本性质，如表 1-2 所示。

表 1-2　拉普拉斯变换的基本性质

序号	基本运算	$f(t)$	$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$
1	拉普拉斯变换定义	$f(t)$	$F(s)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$
2	位移(时间域)	$f(t-\tau_0)1(t-\tau_0)$	$\mathrm{e}^{-\tau_0 s}F(s)$，$\tau_0>0$
3	相似性	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$，$a>0$
4	一阶导数	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$sF(s)-f(0)$
5	n 阶导数	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
6	不定积分	$\int f(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{s}[F(s)+f^{-1}(0)]$
7	定积分	$\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{s}F(s)$
8	函数乘以 t	$tf(t)$	$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)$
9	函数除以 t	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_t^\infty F(s)\mathrm{d}s$
10	位移(s 域)	$\mathrm{e}^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
11	初始值	$\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)$	$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$
12	终值	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$
13	卷积	$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(s)F_2(s)$

3. 拉普拉斯反变换

求拉普拉斯反变换的简单方法是利用拉普拉斯变换表。如果某个变换式 $F(s)$在表中不能找到，那么可以把 $F(s)$展成部分分式，写成 s 的简单函数形式，再去查表。

应当指出，这种寻求拉普拉斯反变换的简单方法基于如下事实：对于任何连续的时间函数，它与其拉普拉斯变换之间保持唯一的对应关系。

一般，象函数 $F(s)$是复变量 s 的有理代数分式，可以表示如下：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

式中，系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 都是实常数；m 和 n 为正整数，通常 $m<n$。

为了把 $F(s)$展成部分分式，需要对 $A(s)$进行因式分解，得到

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

式中，$s_i(i=1,2,\cdots,n)$称为 $F(s)$的极点。

1) $F(s)$无重极点

$$F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-s_i}$$

式中，c_i 为待定常数，称为 $F(s)$在极点 s_i 处的留数，可按下式计算：

$$c_i=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)F(s)$$

于是，可方便求得原函数

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{e}^{s_it}$$

上式表明，有理代数分式函数的拉普拉斯反变换，可表示为若干指数项之和。

2) $F(s)$有多重极点

设 $A(s)=0$ 有 r 个重根 s_1，则 $F(s)$可写为

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{B(s)}{(s-s_1)^r(s-s_{r+1})\cdots(s-s_n)}\\&=\frac{c_r}{(s-s_1)^r}+\frac{c_{r-1}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_{r+1}}{s-s_{r+1}}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}\end{aligned}$$

式中，待定常数 $c_{r+1},\cdots,c_n$ 按 $F(s)$无重极点时的留数计算

$$c_i=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)F(s);\quad i=r+1,r+2,\cdots,n$$

而重极点对应的待定常数 $c_r,c_{r-1},\cdots,c_1$，则按下式确定：

$$\begin{aligned}c_r&=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)^rF(s)\\c_{r-1}&=\lim_{s\to s_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-s_1)^rF(s)]\\&\vdots\\c_{r-j}&=\frac{1}{j!}\lim_{s\to s_1}\frac{\mathrm{d}^{(j)}}{\mathrm{d}s^j}[(s-s_1)^rF(s)]\\&\vdots\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{s \to s_1} \frac{\mathrm{d}^{(r-1)}}{\mathrm{d}s^{r-1}} [(s-s_1)^r F(s)]$$

从而,原函数

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \left[\frac{c_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{c_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + c_2 t + c_1\right] \mathrm{e}^{s_1 t} + \sum_{i=r+1}^{n} c_i \mathrm{e}^{s_i t}$$

1-2 z 变 换

z 变换是从拉普拉斯变换直接引申出来的一种变换方法,它实际上是采样函数拉普拉斯变换的一种变形。因此,z 变换又称为采样拉普拉斯变换,是研究线性定常离散系统的重要数学工具。

1. z 变换定义

设连续函数 $e(t)$ 是可拉普拉斯变换的,则

$$E(s) = \int_0^{\infty} e(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

由于 $t<0$,有 $e(t)=0$,故上式又可表示为

$$E(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

对于 $e(t)$ 的采样信号

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t-nT)$$

其拉普拉斯变换为

$$E^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^*(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t\right]$$

由广义脉冲函数的筛选性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) f(t) \mathrm{d}t = f(nT)$$

故有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-snT}$$

于是采样拉普拉斯变换可表示为

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \mathrm{e}^{-snT}$$

令 $z=\mathrm{e}^{sT}$,其中 T 为采样周期,z 是复平面上定义的一个复变量,称为 z 变换算子。则采样信号 $e^*(t)$ 的 z 变换定义为

$$E(z) = E^*(s) \big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n}$$

记作

$$E(z)=\mathscr{Z}[e^*(t)]=\mathscr{Z}[e(t)]$$

注意,定义式中后一记号是为了书写方便,并不意味是连续信号 $e(t)$ 的 z 变换,而仍指采样信号 $e^*(t)$ 的 z 变换。

2. z 变换方法

1）级数求和法

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\cdots+e(nT)z^{-n}+\cdots$$

上式是离散时间函数 $e^*(t)$的无穷级数表达形式。通常，对于常用函数 z 变换的级数形式，都可以写出其闭合形式。

2）部分分式法

先求出已知连续时间函数 $e(t)$的拉普拉斯变换 $E(s)$，然后将有理分式函数 $E(s)$展成部分分式之和的形式，使每一个部分分式对应简单的时间函数，其相应的 z 变换是已知的，于是可以查 z 变换表，方便地求出 $E(s)$对应的 z 变换 $E(z)$。

常用时间函数的 z 变换表如表 1-3 所示。由表可见，这些函数的 z 变换都是 z 的真有理分式，且 $E(z)$分母 z 多项式的最高次数与 $E(s)$分母 s 多项式的最高次数相等。

表 1-3　z 变换表

序号	拉普拉斯变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z 变换 $E(z)$
1	e^{-snT}	$\delta(t-nT)$	z^{-n}
2	1	$\delta(t)$	1
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$
7	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{T^2ze^{-aT}}{2(z-e^{-aT})^2}+\frac{T^2ze^{-2aT}}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
12	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t-\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$
13	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})}+\frac{z}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})}+\frac{z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$