



普通高等教育“十三五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU “13·5” GUIHUA JIAOCAI

简明工程弹性力学与 有限元分析

周喻 王莉 编



冶金工业出版社
www.cnmp.com.cn



普通高等教育“十三五”规划教材

简明工程弹性力学与 有限元分析

周喻 王莉 编

北 京

冶金工业出版社

2019

内 容 提 要

本书结合采矿工程专业的特点,较为全面地介绍了弹性力学和有限元的基本概念、理论及其在采矿工程问题求解中的基本应用等相关知识。全书内容分为两个部分,第一部分是弹性力学,第二部分是 ANSYS 有限元分析。书中配有大量插图,便于读者学习理解;每章后均附有习题,便于读者巩固所学知识。

本书除可作为采矿工程专业教材外,还可供隧道工程、土木工程、水利工程、交通工程等专业的师生以及有关科技工作者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

简明工程弹性力学与有限元分析/周喻,王莉编. —北京:
冶金工业出版社, 2019. 1

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5024-8021-9

I. ①简… II. ①周… ②王… III. ①工程力学—弹性
力学—高等学校—教材 ②有限元分析—高等学校—教材
IV. ①TB125 ②O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 018242 号

出 版 人 谭学余

地 址 北京市东城区嵩祝院北巷 39 号 邮编 100009 电话 (010)64027926

网 址 www.cnmp.com.cn 电子信箱 yjcs@cnmp.com.cn

责任编辑 高娜 美术编辑 吕欣童 版式设计 禹蕊

责任校对 王永欣 责任印制 李玉山

ISBN 978-7-5024-8021-9

冶金工业出版社出版发行;各地新华书店经销;三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2019 年 1 月第 1 版, 2019 年 1 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16; 12 印张; 289 千字; 181 页

30.00 元

冶金工业出版社 投稿电话 (010)64027932 投稿信箱 tougao@cnmp.com.cn

冶金工业出版社营销中心 电话 (010)64044283 传真 (010)64027893

冶金工业出版社天猫旗舰店 yjgycbs.tmall.com

(本书如有印装质量问题,本社营销中心负责退换)

前 言

本书是针对高等学校采矿工程专业“弹性力学与数值模拟”课程编写的。“弹性力学与数值模拟”课程是众多工科专业的核心课程之一，是工程类学科的重要构成基础。现阶段的弹性力学与数值模拟教材有很多，但没有专门针对采矿工程而编写的。数值模拟的方法有很多种，其中有限元法是工程分析领域应用较为广泛的一种计算方法。鉴于此，本书在考虑采矿工程专业特点的基础上，将三者进行有机结合，较为全面地介绍了弹性力学和有限元的基本概念、理论及其在采矿工程问题求解中的基本应用等相关知识。

本书主体内容分为两个部分：第一部分是弹性力学内容，主要包括弹性力学概述、平面问题基本理论、平面问题的直角坐标与极坐标解答、应用弹性力学理论求解巷道围岩应力及衬砌应力等；第二部分是 ANSYS 有限元分析内容，主要包括有限元法简介、ANSYS 软件结构、ANSYS 分析悬臂支架受力、ANSYS 模拟矿山巷道开挖等。本书内容简练而又自成体系，着重向读者介绍弹性力学的基本理论及巷道应力计算的弹性力学解析方法。同时，为了帮助读者迅速了解并掌握 ANSYS 软件的操作及其应用，书中提供的两个实例都是用 GUI 方式一步一步讲解如何操作，让读者轻松学会。当读者掌握以上知识之后，即可为解决采矿工程实际问题打下良好的基础。

由于充分考虑高校学生的学习与研究需要，同时又注重体现采矿工程应用背景，所以本书在编写中，力求突出简明扼要、便于自学和工程实用的特点，使读者集中精力学好采矿工程所需的弹性力学和有限元 ANSYS 软件的基本知识。书中强调了弹性力学基本理论（基本概念、基本公式、基本解法）的阐述和有限元 ANSYS 软件的初步应用；在内容安排上，突出重点，分化和讲解难点，并配有大量插图，便于读者学习理解；此外，每章后还安排了一定量的课后习题，供读者巩固所学知识。编者希望，本科生和以自学为主的函授生及自

学人员，应用本书能学懂、学好工程弹性力学的基本知识，能够应用弹性力学知识解决采矿工程基本问题。

鉴于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请读者批评指正，以使本书得以不断修正和完善。

北京科技大学 周喻

2018年9月15日

弹性力学主要符号说明

坐标：直角坐标系 x, y, z ；极坐标 ρ, φ

体力分量： f_x, f_y, f_z （直角坐标系）； f_ρ, f_φ （极坐标系）

面力分量： $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ （直角坐标系）； $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi$ （极坐标系）

位移分量： u, v, w （直角坐标系）； u_ρ, u_φ （极坐标系）

边界约束分量： $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ （直角坐标系）

方向余弦： l, m, n （直角坐标系）

应力分量：

正应力 σ

切应力 τ

全应力 p

斜面应力分量 p_x, p_y, p_z （直角坐标系）

斜面法向应力与剪切 σ_n, τ_n

体积应力 Θ

应变分量：线应变 ε ，切应变 γ ，体应变 θ

艾里应力函数： Φ

弹性模量： E

切变模量： G

体积模量： K

泊松比： μ

目 录

1 绪论	1
1.1 弹性力学的内容	1
1.2 弹性力学的基本假定	2
1.3 弹性力学中的基本概念	3
1.4 弹性力学的发展史	6
1.5 弹性力学的作用和任务	7
习题	8
2 平面问题的基本理论	10
2.1 平面应力问题和平面应变问题	10
2.2 平衡微分方程	11
2.3 平面问题中一点的应力状态	13
2.3.1 任意斜截面上的正应力 σ_n 和切应力 τ_n	14
2.3.2 主应力和应力方向	15
2.3.3 最大应力与最小应力	15
2.4 几何方程——刚体位移	16
2.5 斜方向的应变及位移	19
2.6 物理方程	21
2.7 边界条件	23
2.8 圣维南原理	25
2.9 按位移求解平面问题	29
2.10 按应力求解平面问题——相容方程	30
2.11 常体力情况下的简化	32
2.12 应力函数——逆解法与半逆解法	35
习题	36
3 平面问题的直角坐标解答	40
3.1 多项式解答	40
3.2 位移分量的求出	41
3.3 简支梁受均布荷载	43
3.4 楔形体受重力和液体压力	48
习题	50

4 平面问题的极坐标解答	53
4.1 极坐标中的平衡微分方程	53
4.2 极坐标中的几何方程及物理方程	55
4.3 极坐标中的应力函数与相容方程	57
4.4 应力分量的坐标变换式	59
4.4.1 已知 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 求 σ_ρ 、 σ_φ 、 $\tau_{\rho\varphi}$	59
4.4.2 已知 σ_ρ 、 σ_φ 、 $\tau_{\rho\varphi}$ 求 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy}	60
4.5 轴对称应力和相应的位移	61
4.5.1 轴对称应力的一般解答	61
4.5.2 与轴对称应力相对应的形变和位移	61
4.6 圆环或圆筒受均布压力——压力隧道	63
4.6.1 圆环或圆筒受均布压力	63
4.6.2 压力隧道	65
4.7 圆孔的孔边应力集中	68
习题	72
5 弹性理论计算巷道围岩及衬砌应力	75
5.1 概述	75
5.2 无内压巷道围岩应力分布弹性计算	76
5.2.1 轴对称圆形巷道围岩的弹性应力	77
5.2.2 一般圆形巷道围岩的弹性应力	79
5.2.3 椭圆形巷道围岩的弹性应力	81
5.2.4 矩形和其他形状巷道周边弹性应力	84
5.3 有内压巷道围岩与衬砌的应力弹性计算	86
5.3.1 内压引起的巷道围岩附加应力	86
5.3.2 内压引起无裂隙围岩与衬砌的附加应力计算	87
5.3.3 内压引起有裂隙围岩与衬砌的附加应力计算	89
习题	90
6 ANSYS 有限元分析	91
6.1 计算机辅助分析概论	91
6.2 有限元法简介	91
6.3 ANSYS 软件结构	96
6.3.1 前处理器	96
6.3.2 分析器	99
6.3.3 后处理器	100
6.4 悬壁支架受非均布荷载	101
6.4.1 问题分析	101

6.4.2 设置元素属性	103
6.4.3 建立实体模型	110
6.4.4 建立有限元素模型	127
6.4.5 分析的种类及选项	129
6.4.6 边界条件	130
6.4.7 求解的选项和求解	133
6.4.8 后处理器——显示结果	136
6.4.9 结果数据查询	143
6.4.10 检查分析的正确性	143
6.5 矿山巷道开挖模拟	144
6.5.1 问题分析	144
6.5.2 问题描述	145
6.5.3 创建物理环境	145
6.5.4 建立模型	151
6.5.5 划分网格	154
6.5.6 施加约束和荷载	158
6.5.7 初始地应力场模拟求解	162
6.5.8 开挖进尺模拟分析	171
习题	177
参考文献	181

1.1 弹性力学的内容

弹性力学, 又称弹性体力学, 主要研究弹性体由于受外力、边界约束或温度改变等作用而发生的应力、应变和位移, 是固体力学的一个重要分支。

弹性力学和材料力学、结构力学等有很多相似之处, 例如, 三者均是研究和分析构件在弹性阶段的应力和位移, 均多用于计算强度、刚度和稳定性等。但另一方面, 弹性力学又占据着其他力学无法取代的重要位置, 主要体现在其研究对象和研究方法上。

在研究对象上, 材料力学主要研究杆体, 即长度远大于其宽度和高度的构件, 如梁、柱、轴等; 结构力学在材料力学研究的基础上进一步拓展, 主要研究杆系结构, 如桁架、钢架等。而弹性力学的研究对象除了杆体、杆系结构外, 还包括诸如平面体、空间体、板和壳体等其他弹性体构件。因此, 弹性力学的研究范围更加广泛, 可以应用于土木、水利、机械等工程中各种构件的分析。

在研究方法上, 材料力学中, 为了简化问题的求解, 常引用近似的计算假设 (如平面截面假设), 并近似地处理平衡条件和边界条件等, 因此其研究方法是近似的, 得出的是近似的解答。材料力学的解答对于杆状构件具有较好的精度, 可供工程设计使用, 但对于非杆状构件则往往有较大的误差。而弹性力学减少了简化条件的假设, 在严格要求边界条件的前提下, 综合运用静力学、几何学、物理学等方面的知识, 对问题进行求解, 从而得出更加精确的解答。

弹性力学的研究思路可表述成: 已知物体的几何形状和材料参数, 结合所受外力及约束情况, 求解物体的应力、应变和位移。具体的求解过程则需结合以下规则:

(1) 在物体区域内部, 根据已知条件建立三大基本方程。

- 1) 根据任一点微分体的平衡条件, 建立静力平衡方程;
- 2) 根据任一点微分线段上应变和位移的几何条件, 建立几何方程;
- 3) 根据应力和应变的物理条件, 建立物理方程。

(2) 在物体的边界面上, 分为给定面力分布和位移约束两种情况, 分别对应着弹性力学中研究的两大类问题。

- 1) 若在边界面上给定了面力分布情况, 相应地建立应力边界条件;
- 2) 若在边界面上给定了约束条件, 相应地建立位移边界条件。

弹性力学是固体力学的一个分支, 其考虑的平衡条件、几何条件、物理条件及边界条件等具有较高的精度, 且这些方程也是其他固体力学分支所必须考虑的内容, 故弹性力学中的许多解答, 也广泛地应用于其他固体力学分支。某种程度而言, 弹性力学是其他各门固体力学分支的基础。

由于弹性力学的研究对象十分广泛,其研究方法较为严格精确,因此弹性力学在工程结构分析中得到了广泛的应用。在土木、水利、机械、采矿等工程中,有许多非杆件形状的结构需要进行分析,特别是近代大型、复杂的工程结构大量涌现,其投资巨大,安全级别又特别高,因而其经济与安全的矛盾突出,此时必须以精确严格的分析方法方能最大程度降低经济标准而又保证工程安全,采用弹性力学的分析再合适不过。特别是近年来,结合工程需要,弹性力学又较快速地发展了几种数值计算方法,如变分法、差分法和有限单元法,尤其是有限单元法,将连续弹性体划分为有限大小的单元构件,然后对单元构件进行一一求解,基本可以解决任何复杂的工程结构,具有极大的适应性和通用性。某种程度而言,弹性力学已经成为工程结构分析的最重要和有效的手段。

1.2 弹性力学的基本假定

如 1.1 节所述,在研究弹性力学的相关问题时,均要在弹性体区域内部考虑静力学、几何学和物理学等三方面条件,分别建立三大基本方程,即静力平衡方程、几何方程和物理方程,同时在弹性体的边界上还要建立边界条件方程。在进行具体计算时,如果考虑各方面的因素,计算和推导过程会异常复杂,甚至得不到计算结果。因此,在实际的弹性力学计算中,首先需要对问题进行分析和简化,略去影响很小的次要因素,抓住主要因素,并作出部分基本假定,从而建立物理模型,然后才能作进一步的研究。

在弹性力学中,通过对研究对象的分析,分别作出包括连续性、完全弹性、均匀性、各向同性及小变形等五个基本假定,作为对研究对象材料性质和变形形态主要特征的概括。其中前四个是关于材料性质的假定,凡符合以上四个假定的物体,均可称为理想弹性体。第五个是关于物体变形状态的假定。五个基本假定的具体含义如下:

(1) 连续性。假定研究物体为连续的,即在物体内部均被连续介质填充,不存在空隙,亦即从宏观角度上认为物体是连续的。其实现实生活中,没有任何东西是完全连续的,所有物体均由微粒组成,但微粒的尺寸及互相之间的距离和物体的宏观尺寸相比,太过于渺小,所以可以近似假定物体是连续的,这样对其计算也不会引起较大的误差,同时所有的物理量还可用连续函数表示。

(2) 完全弹性。假定研究的物体是完全弹性的。该假定包含两层含义:1) 当外力取消时,物体可完全恢复原状,不留任何残余变形;2) 物体所受的应力与相应的应变成正比,即“线性弹性”。根据完全弹性假定,物体中的应力与应变之间的物理关系可以用胡克定律来表示,两者一一对应,且其弹性常数不随应力或变形的变化而变化。

(3) 均匀性。物体是由同种材料组成,物体内部任何部位的材料性质均相同。此种假设也是相对的,任何物体内部也不可能完全均匀,但只要颗粒尺寸远小于该物体的宏观尺寸,且该种颗粒或多种颗粒是均匀分布于物体内部,则可以假定该物体为均匀的,如混凝土构件等。此假设可使物体的弹性常数等不随位置坐标而变化。

(4) 各向同性。物体内部任一点各方向的材料性质均相同,即对物体进行各个方向的同种实验均得出相同的结果,弹性常数等不随方向的变化而变化。如竹材、复合板等属于均匀分布,但却是各向异性的材料。

(5) 小变形假定。假定物体的位移和应变均是微小的,即物体在受力后,其位移和

转角值均远远小于物体的宏观尺寸，应变远小于1。小变形假定在导出弹性力学的基本方程中，主要发挥两点作用：1) 简化几何方程。由于应变远小于1，因此可以在几何方程中略去高阶项，只保留应变的一次幂，从而使几何方程成为线性方程。2) 简化平衡方程。在物体发生变形后再考虑平衡条件时，计算过程会过于复杂。若假设位移和变形均是微小的，则可用变形前的微元体尺寸代替变形后的尺寸，从而很大程度简化了静力平衡方程的推导过程。

以上五个基本假定，明确了弹性力学的研究范畴，即理想弹性体的小变形状态。

1.3 弹性力学中的基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念，虽然在材料力学和结构力学里都已经用到过，但在这里仍有再加以详细说明的必要。

外力是其他物体作用于研究对象的力。外力分为体积力和表面力，分别简称为体力和面力。

体力是作用于物体体积内的外力，例如重力和惯性力。体力是以单位体积内作用的力来量度的。物体各点受体力的情况，一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小和方向，可取一包含 P 点的微元体，它的体积为 ΔV ，设作用于 ΔV 的体力为 ΔF ，则体力的平均集度为 $\Delta F/\Delta V$ 。令 ΔV 无限缩小而趋于 P 点时，则 $\Delta F/\Delta V$ 将趋于一定的极限 f ，即

$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} \quad (1-1)$$

体力 f 是矢量，方向与 ΔF 的极限方向相同，常用其在坐标方向的投影（标量）来表示，即 $f = (f_x, f_y, f_z)^T$ 。按国际单位制，体力分量的量纲是 $L^{-2}MT^{-2}$ ，体力分量均以沿坐标轴正向为正。

面力是作用于物体表面上的外力，例如液体压力、风力和接触力等。面力是以单位面积上的作用力来量度的。物体在其表面上各点受面力的情况，一般也是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受面力的大小和方向，在 P 点的邻域内取一包含 P 点的微元面积为 ΔS ，设作用于 ΔS 的面力为 ΔF ，则面力的平均集度为 $\Delta F/\Delta S$ 。令 ΔS 无限缩小而趋于 P 点时，则在内力连续分布的条件下 $\Delta F/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\bar{f}$ ，即

$$\bar{f} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (1-2)$$

面力 $\bar{f}$ 也是矢量，方向与 ΔF 的极限方向相同，常用其在坐标方向的投影（标量）来表示，即 $\bar{f} = (\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z)^T$ 。按照国际单位制，面力分量的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ ，面力分量也均以沿坐标轴正向为正。

物体受外力以后，其内部将发生内力，即物体本身不同部分之间相互作用的力。确定内力的方法是截面法。假想将物体截开，则截面两边有互相作用的力，称为内力。如图 1-1 中的 F_1 和 F_2 ，其中 F_1 是 II 部分物体对 I 部分物体的作用力， F_2 则是 I 部分物体对 II 部分物体的作用力。 F_1 和 F_2 的数值相同，方向相反。内力通常指的是截面上总的合力和合力矩。

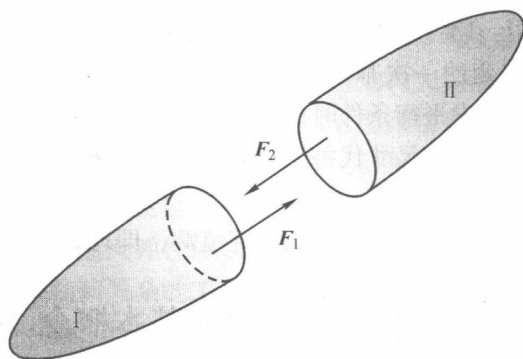


图 1-1 内力分析模型

截面单位面积上的内力称为应力。取这一截面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔA 。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔF ，则内力的平均集度，即平均应力为 $\frac{\Delta F}{\Delta A}$ 。现在，命 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力连续分布，则 $\frac{\Delta F}{\Delta A}$ 将趋于一定的极限 p ，即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1-3)$$

应力 p 与其作用面有关，且具有方向性。在弹性力学中，首先表示出各坐标面上的应力，并以其沿坐标方向的投影来表示。对于坐标面，凡其外法线沿坐标轴正向的，称为正面，反之称为负面。 x 面上的应力分量可以表示为：

σ_x ——作用于 x 面上、沿 x 轴方向的正应力；

τ_{xy} ——作用于 x 面上、沿 y 轴方向的切应力；

τ_{xz} ——作用于 x 面上、沿 z 轴方向的切应力。

显然可见，在物体内的同一点 P ，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内部取出一个微小的正平行六面体，它的棱边分别平行于三个坐标轴。图 1-2 表示了空间正平行六面体上各坐标面上的应力分量。弹性力学中以坐标面上的应力分量为基本未知量，对于任意斜面上的应力，可以根据坐标面上的应力分量来求出。

如图 1-2 所示，将每一个面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，在其右侧加上一个下标字母。例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴面上，同时也是沿着 x 轴的方向作用的。切应力用 τ 表示，并加上两个下标字母，前一个字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，切应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴面上而沿着 y 轴方向作用的。

由于内力和应力都是成对出现的，因此应力的符号规定不同于面力。在弹性力学中，正坐标面上的应力分量以沿坐标轴正向为正，负坐标面上的应力分量以沿坐标轴负向为正，即以正面正向、负面负向的应力分量为正，反之为负。图 1-2 所示的应力分量均为

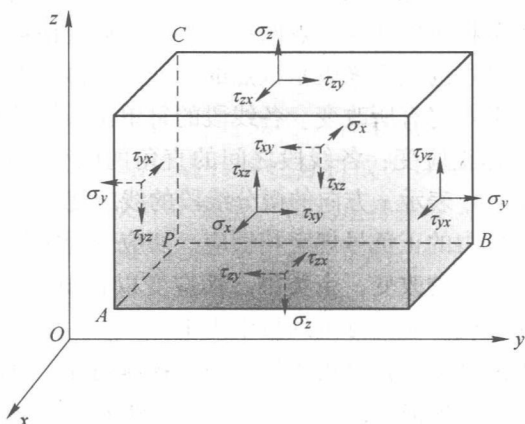


图 1-2 三维应力分析模型

正。应力分量的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ 。

在材料力学中，正应力以拉为正，实际上与弹性力学中的正应力符号规定相同；切应力以使单元或其局部产生顺时针方向转动趋势的为正，这与弹性力学的切应力符号规定不一致，如图 1-3 所示。

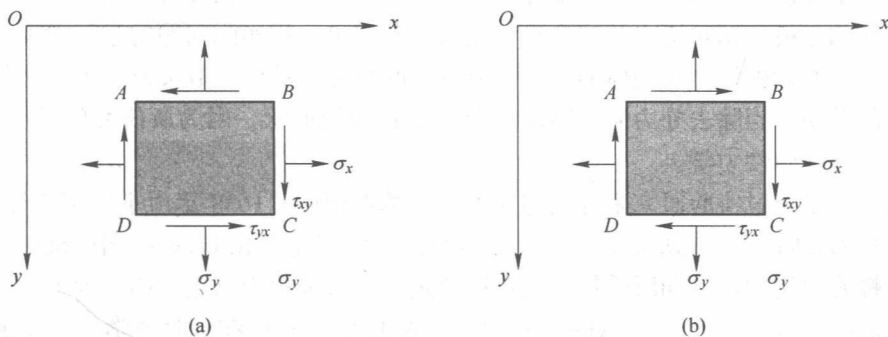


图 1-3 弹性力学与材料力学中正值应力表示方法

(a) 弹性力学；(b) 材料力学

弹性力学中切应力之间具有互等关系。例如，以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，列出力矩平衡方程，得

$$2\tau_{yz}dzdx \frac{dy}{2} - 2\tau_{zy}dydx \frac{dz}{2} = 0 \quad (1-4)$$

同样可以列出其余两个力矩方程，简化以后得出

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1-5)$$

这就是切应力互等定理：作用于两个互相垂直面上，并且垂直于该两面交线的切应力是互等的（大小相等，正负号相同）。由于切应力的互等性，所以切应力记号中的两个下标可以对调，并且只作为一个未知量。

所谓形变，也称应变，就是物体形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和

角度来表示。因此,物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

在弹性力学中,为了分析物体在某一点的形变状态,通过该点作3条沿正坐标方向的微分线段,并以这些微分线段的应变来表示该点的形变。物体变形以后,这三条线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩,即单位伸缩或相对伸缩,称为线应变,亦称正应变;各线段之间的直角的改变,用弧度表示,称为切应变。线应变用字母 ε 表示: ε_x 表示 x 方向的微分线段的线应变,余类推。线应变以伸长时为正,缩短时为负,与正应力的正负号规定相适应。切应变用字母 γ 表示: γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的微分线段之间的直角的改变,余类推。切应变以直角变小时为正,变大时为负,与切应力的正负号规定相适应。应变分量的量纲为1。

所谓位移,就是位置的移动。在直角坐标系中,物体内任一点的位移,用它在坐标方向的投影 u 、 v 、 w 来表示。变形前一点 (x, y, z) ,在变形后就移动到 $(x+u, y+v, z+w)$ 的位置。位移分量的量纲为 L ,并均以沿坐标轴正向为正。

弹性力学中的各物理量,如体力、面力、应力、形变和位移等,一般都随位置而变,因而都是 x 、 y 、 z 的函数。

1.4 弹性力学的发展史

弹性力学是固体力学的一个重要分支,它是研究弹性固体在外力作用下物体产生变形和内力规律的学科。回顾历史,弹性力学是在不断解决工程实际问题的过程中逐步发展起来的。这里,所谓弹性是指物体的应力与应变之间具有的单值函数关系,即应力与应变有一一对应的关系。当除去外力后,物体完全恢复到初始形状,因为所研究的是线性问题,所以有时又称线弹性力学。

早期主要是通过实验研究来寻找弹性力学的基本规律。1638年由于建筑工程的需要,伽利略(G. Galileo)首先研究了梁的弯曲问题,以后胡克(R. Hooke)于1660年在实验中发现了螺旋弹簧伸长量和所受拉力成正比的定律,后被称为胡克定律。到19世纪20年代,法国的纳维(C. L. M. H. Navier)和柯西(A. L. Cauchy)在当时数学飞跃发展的基础上建立了弹性力学的数学理论。纳维于1827年首次导出了弹性固体的平衡运动方程。柯西在一系列论文中明确地提出了应变、应变分量、应力和应力分量的概念,建立了弹性力学的几何方程、各向同性以及各向异性材料的广义胡克定律。在此以后,法国的圣维南(A. J. C. B. de Saint Venant)发表了许多理论结果和实验结果,证明了弹性力学的正确性。这一时期弹性力学广泛应用于工程实际,在理论上建立了许多重要原理和定理,同时也发展了许多有效的计算方法。1881年德国的赫兹(H. R. Hertz)求解了两弹性体局部接触时弹性体内应力分布的规律,1898年德国的基尔西(G. Kirsch)发现了应力集中现象。这些结果解释了以往无法解释的现象,在提高设计水平方面起到了重要作用,因而弹性力学受到了工程技术人员的重视。此后,弹性力学的一般理论也有了许多重要发展,包括各种能量原理的建立,以及许多近似有效方法的提出,其中苏联的穆斯赫利什维利(Muskhelishvili)将复变函数理论引入弹性力学,从而使弹性力学中的平面问题都可以借助复变函数求解。

为了满足土木、机械、航空等一系列工程需要,20世纪以来弹性理论取得了重大进

展, 已成为工程结构强度设计的重要理论依据。虽然弹性理论取得的重大进展已成为工程结构强度设计的重要理论依据, 但由于弹性理论基本方程的复杂性, 能够精确求解的工程结构问题实属少数。里兹 (W. Ritz)、伽辽金 (B. G. Galerkin) 分别于 1908 年和 1915 年提出基于能量原理的直接解法, 到 20 世纪 50 年代发展成为有限单元法、边界单元法等数值计算方法, 从而使对各种工程结构进行弹性分析成为现实。中国科学家钱学森、钱伟长、徐芝伦、胡海昌等, 在弹性力学的发展, 特别是将弹性力学推广应用于中国科学理论研究与工程技术领域方面, 同样做出了非常重要的贡献。弹性力学发展史上的杰出科学家如图 1-4 所示。



(a)



(b)



(c)



(d)

图 1-4 弹性力学发展史上的杰出科学家

(a) 柯西; (b) 圣维南; (c) 赫兹; (d) 钱学森

1.5 弹性力学的作用和任务

在近代工业发展过程中, 对于各种结构与机械零件在外力作用下的变形要进行分析,

而大多数材料在小变形的情况下都可以近似地看作线弹性体,所以弹性力学的发展与工程上的需要有着密切的联系。各种工程的需要使弹性力学得到了不断的发展,结构和构件尺寸的选择和确定对弹性力学的发展也起到了重要的促进作用。

弹性力学的任务是研究弹性体在外力和温度变化、支座移动等因素作用下产生的变形和内力,从而解决各类工程结构的强度、刚度和稳定问题。它是一门理论性和实用性都很强的学科。

一些材料,如合金钢,当受力在弹性极限范围内时,为理想的完全弹性体,其应力和应变呈线性关系,为线性弹性性质;当这些合金钢材料的受力超出了弹性极限,将出现塑性变形,则为塑性性质。还有一些材料,如土体,在外荷载作用下也具有明显的塑性变形,这也是塑性性质。还有一些材料,如橡胶类材料,具有非线性的弹性性质,我们称之为非线性弹性。

弹性力学是一门技术基础学科,是近代工程技术的必要基础之一。在现代工程中,特别是土木工程、水利工程、机械工程、航天航空工程、采矿工程等大型结构的计算、分析、设计中,都广泛应用弹性力学的基本知识、基本理论和基本方法。同时,弹性力学也是一门力学基础学科,它的研究方法被广泛应用于其他学科和领域。它不仅是塑性力学、有限单元法、复合材料力学、断裂力学、结构动力分析和一些专业课程的基础,也是许多大型结构分析软件(如 ANSYS 等)的核心内容。

习 题

1-1 判断题。

- 1-1-1 材料力学研究杆件,不能分析板壳;弹性力学研究板壳,不能分析杆件。 ()
- 1-1-2 体力作用在物体内部的各个质点上,所以它属于内力。 ()
- 1-1-3 在弹性力学和材料力学里关于应力的正负规定是一样的。 ()

1-2 填空题。

- 1-2-1 弹性力学研究物体在外因作用下,处于_____阶段的_____、_____和_____。
- 1-2-2 物体的均匀性假定,是指物体内_____相同。
- 1-2-3 物体是各向同性的,是指物体_____相同。
- 1-2-4 解答弹性力学问题必须从_____、_____、_____三个方面来考虑。

1-3 选择题。

- 1-3-1 弹性力学对杆件分析 ()
- A. 无法分析 B. 得出近似结果
- C. 得出精确结果 D. 需采用一些关于变形的近似假定
- 1-3-2 下列对象不属于弹性力学研究对象的是 ()
- A. 杆件 B. 板壳 C. 块体 D. 质点
- 1-3-3 下列外力不属于体力的是 ()