JILEI Kirchhoff FANGCHENG DE
DONGLIXUE XINGTAI

几类Kirchhoff方程的动力学性态

林国广◎著

Kirchhoff

非外借

重庆大学出版社

几类Kirchhoff方程的动力学性态

林国广◎著

重庆大学出版社

内容提要

本书系统介绍了无穷维动力系统(特别是二阶波方程)的动力学性态的数学知识,主要阐述 Kirchhoff 方程的动力学性态相关数学理论和最新研究成果。内容包括动力系统的数学基础,整体解、整体吸引子及其维数估计,惯性解集与惯性流形。

本书可供理工科研究生、大学教师、工程师及相关专业的科学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

几类 Kirchhoff 方程的动力学性态 / 林国广著. --
重庆：重庆大学出版社, 2019.5
ISBN 978-7-5689-1411-6

Ⅰ.①几… Ⅱ.①林… Ⅲ.①无限维-动力系统(数学) Ⅳ.①O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 014243 号

几类 Kirchhoff 方程的动力学性态

林国广 著

策划编辑:范 琪 何 梅

责任编辑:陈 力 版式设计:范 琪 何 梅

责任校对:王 倩 责任印制:张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023)88617190 88617185(中小学)

传真:(023)88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:13.25 字数:333 千

2019 年 5 月第 1 版 2019 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5689-1411-6 定价:48.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究

前　言

1883 年,德国物理学家 Kirchhoff 研究自由弦振动建立了 Kirchhoff 方程,此方程一直广泛应用于工程物理学中衡量桥梁振动、牛顿力学、海洋声学、宇宙物理、生物学血浆问题等领域,对国家工程和工业建设发挥了重要作用。100 多年来,随着科学技术的日益发展,人们对 Kirchhoff 方程的应用领域不断扩大,Kirchhoff 方程的表达式也在不断地推广,越来越多关于 Kirchhoff 方程的数学物理模型得以建立,在建筑和交通工程领域得到了较好应用,人们获得了大量数学物理模型的数学理论和研究成果。

无穷维动力系统是研究非线性偏微分方程的重要领域,20 世纪 80 年代是无穷维动力系统和非线性偏微分发展较迅速的时期。由于 Kirchhoff 方程中 Kirchhoff 应力项的复杂性,给人们对方程解一致先验估计带来了困难,阻碍了关于该方程的相关动力学研究。本书作者通过分段函数法克服了这一难点,获得了解的一致先验估计,建立了整体解的存在唯一性、有界吸收集、整体吸引子、整体吸引子的维数估计、指数吸引子、惯性流形等动力学形态。这对无穷维动力系统的发展及应用有一定的理论意义和应用价值。

本书反映了作者近年来对 Kirchhoff 方程的一些研究成果,想与各位同人进行交流与共勉。研究几种不同的 Kirchhoff 方程的动力学性态,体现研究的数学理论、研究方法和最新研究结果。并系统介绍了无穷维动力系统动力学性态的数学知识,主要阐述了 Kirchhoff 方程的动力学性态相关数学理论和最新研究成果。内容主要包括几种广义 Kirchhoff 方程、整体吸引子、整体吸引子的维数估计、时滞系统的反向吸引子、指数吸引子、近似惯性流形、惯性流形。

由于作者水平有限,书中难免存在一些疏漏之处,敬请各位读者批评指正。衷心感谢云南大学数学与统计学院对本书出版的资助;特别感谢吕鹏辉、娄瑞金、艾成飞、朱会仙、卢京鑫、孙玉婷、高云龙、汪卫、陈玲为本书出版所提供的帮助与支持。

林国广

2018 年春于昆明

目　录

第 1 章　动力系统的数学基础 …… 1
1.1　Sobolev 空间 …… 1
1.2　整体吸引子 …… 8
1.3　整体吸引子的维数估计 …… 11
1.4　指数吸引子和惯性流形 …… 26

第 2 章　整体吸引子及其维数估计 …… 34
2.1　一类广义非线性 Kirchhoff-Sine-Gordon 方程整体吸引子的存在性 …… 34
2.2　一类广义非线性 Kirchhoff 型方程的整体吸引子 …… 41
2.3　一类广义非线性 Kirchhoff 型方程的整体吸引子 …… 50
2.4　一类带有非线性强阻尼项的 Kirchhoff 波方程的整体吸引子及其维数估计 …… 59
2.5　一类非线性阻尼 Kirchhoff 方程的整体吸引子 …… 72
2.6　高阶非线性 Kirchhoff 方程整体吸引子和它们的 Hausdorff 及分形维数估计 …… 80
2.7　高阶 Kirchhoff-type 方程的整体吸引子及 Hausdorff 和 Fractal 维数估计 …… 90
2.8　带有线性强阻尼项的非线性高阶 Kirchhoff 方程的整体吸引子及其 Hausdorff 维数与 Fractal 维数估计 …… 101
2.9　带有强非线性阻尼项的高阶 Kirchhoff 方程整体吸引子 …… 114
2.10　一类广义非线性高阶 Kirchhoff 方程的反向吸引子 …… 126

第 3 章　惯性解集与惯性流形 …… 139
3.1　一类广义非线性 Kirchhoff-Sine-Gordon 方程的指数吸引子及其惯性流形 …… 139
3.2　一类广义非线性 Kirchhoff-Boussinesq 型方程的指数吸引子及其惯性流形 …… 149
3.3　一类非线性阻尼 Kirchhoff 方程的指数吸引子 …… 164
3.4　一类带有非线性强阻尼项的 Kirchhoff 波方程的近似惯性流形 …… 169
3.5　高阶非线性 Kirchhoff 方程的指数吸引子和惯性流形 …… 181

参考文献 …… 193

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 动力系统的数学基础

1.1 Sobolev 空间

一个非线性偏微分方程的解通常在一个或几个 Sobolev 空间中,要研究方程的解,首先必须学习解存在的空间,即 Sobolev 空间.

1 $L^p(G)$空间

设 $G\subset R^n$ 是一个开集,$p\geqslant 1$,$L^p(G)$表示 G 中 P 次幂可积的可测函数的集合;$p=\infty$,$L^\infty(G)$表示 G 中有界的可测函数的集合.

关于范数 $\|u\|_{L^p(G)}=\left(\int_G |u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$,$u\in L^p(G)$,空间 $L^p(G)$成为一个 banach 空间.

在 $L^p(G)$空间中有 Holder 不等式和 Minkowski 不等式是常用的积分不等式.在证明过程中首先需要用到 Young 不等式.

(1) Young 不等式

对任何实数 $a,b\geqslant 0$,有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,p>1,p'>1\right). \tag{1.1}$$

证明 只要 a,b 中有一个等于0,那么 $ab=0$,因而式(1.1)自然地满足.故只对 $a>0,b>0$ 的情形证明即可.令 $\alpha=\frac{1}{p}$,$1-\alpha=\frac{1}{p'}$,由微分学中的定理易证

$$x^\alpha\leqslant\alpha(x-1)+1=\alpha x+(1-\alpha),0<\alpha<1,x>0 \tag{1.2}$$

成立.特别当 $A>0,B>0$ 时,取 $x=\frac{A}{B}$,由式(1.2)得

$$A^\alpha B^{1-\alpha}\leqslant\alpha A+(1-\alpha)B,$$

代入 $a=A^\alpha,b=B^{1-\alpha}$,即式(1.1)得证.

(2) Holder 不等式

设$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1(p>1,p'>1)$,$\forall f(x)\in L^p(G)$和 $g(x)\in L^{p'}(G)$,则

$$\int_G|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_G|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.3}$$

证明　由 Young 不等式(1.1),取 $a=|f(x)|\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, $b=|g(x)|\left(\int_G|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}$,可得 $\dfrac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_G|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}}\leqslant\dfrac{|f(x)|^p}{p\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)}+\dfrac{|g(x)|^{p'}}{p'\left(\int_G|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)}$,在 G 上积分上式两端,即得式(1.3).

运用归纳法,对任何 N 个函数 $f_1(x),\cdots,f_N(x)$,若 $\sum_{i=1}^N p_i^{-1}=1, p_i>1$,那么

$$\int_G|f_1(x)\cdots f_N(x)|\mathrm{d}x\leqslant\prod_{i=1}^N\left(\int_G|f_i(x)|^{p_i}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_i}},\tag{1.4}$$

其中要求出现在式(1.4)右端的每一个积分都是有限的.

(3) Minkowski 不等式

设 $p>1$, $\forall f(x),g(x)\in L^p(G)$,那么

$$\left(\int_G|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_G|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\tag{1.5}$$

证明　利用 Holder 不等式,则对 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$,有

$$\begin{aligned}\left(\int_G|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)&\leqslant\int_G|f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_G|f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_G|f(x)+g(x)|^{(p-1)p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left[\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_G|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\&=\left(\int_G|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\left[\left(\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_G|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right],\end{aligned}$$

即式(1.5)得证.

由归纳法,对任何 N 个函数 $f_1(x),\cdots,f_N(x)\in L^p(G)$,若 $p>1$,那么 $\left(\int_G\left|\sum_{i=1}^N f_i(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{i=1}^N\left(\int_G|f_i(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 成立.

特别地,当 $p=2$, $L^2(G)$ 在内积和范数,

$$(f(x),g(x))=\int_G f(x)g(x)\mathrm{d}x, f(x),g(x)\in L^2(G),$$

$$\|f(x)\|_{L^2(G)}^2=(f(x),f(x))=\int_G f^2(x)\mathrm{d}x, f(x)\in L^2(G).$$

空间 $L^2(G)$ 是 Hilbert 空间.

(4) Gronwall 不等式

设 $t\in[t_0,+\infty)$, $y(t)\geqslant0$,并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+gy\leqslant h,$$

其中 $g>0$, $h\geqslant0$ 是常数 ,则

$$y(t)\leqslant y(t_0)\mathrm{e}^{-g(t-t_0)}+\frac{h}{g}, t\geqslant t_0.$$

证明 利用 e^{gt}乘不等式$\frac{dy}{dt}+gy\leqslant h$，有 $e^{gt}\frac{dy}{dt}+ge^{gt}y\leqslant e^{gt}h$，从而得$\frac{d}{dt}(e^{gt}y)\leqslant e^{gt}h$，两边从 t_0 到 t 积分得

$$\begin{aligned} e^{gt}y(t)-e^{gt_0}y(t_0) &\leqslant h\int_{t_0}^{t}e^{gt}dt \\ &\leqslant \frac{h}{g}(e^{gt}-e^{gt_0}), \end{aligned}$$

由于 $1-e^{-g(t-t_0)}\leqslant 1$，可得

$$y(t)\leqslant y(t_0)e^{-g(t-t_0)}+\frac{h}{g}, t\geqslant t_0.$$

定理 1.1 （弱收敛的结果）设 $p>1$，那么

(i) $L^p(G)$中的弱收敛列是有界的；

(ii) $L^p(G)$是弱完备的，亦即 $L^p(G)$中的任何在弱收敛意义下的 Cauchy 列必有弱极限；

(iii) $L^p(G)$是可分的；

(iv) 在 $L^p(G)$中的任何有界无穷元素集合中可以找到弱收敛的子列.

证明 (i)的证明：设$f_n(x)$在 $L^p(G)$中弱收敛于$f(x)\in L^p(G)$，要证明存在常数 $M>0$，使

$$\|f_n(x)\|_{L^p(G)}\leqslant M, \tag{1.6}$$

假设不然，那么不失一般性，可以假定

$$\|f_n(x)\|_{L^p(G)}\geqslant 2^n+\sum_{k=1}^{n-1}\|f_k(x)\|_{L^p(G)}, n=2,3,\cdots \tag{1.7}$$

否则可以通过选择$f_n(x)$的子列来达到，用反证法.

事实上，由于$f_n(x)$在 $L^p(G)$中弱收敛于$f(x)\in L^p(G)$，可以选取子列

$$\{f_{n_k}(x)\}\subset\{f_n(x)\}, n_k>k, \tag{1.8}$$

使当 $k\to\infty$ 时，

$$\frac{1}{k}[f_{n_1}(x)+f_{n_2}(x)+\cdots+f_{n_k}(x)]$$

在 $L^p(G)$中强收敛于$f(x)$，于是当 k 充分大时，有

$$\left\|\frac{1}{k}[f_{n_1}(x)+f_{n_2}(x)+\cdots+f_{n_k}(x)]\right\|_{L^p(G)}\leqslant 1+\|f(x)\|_{L^p(G)} \tag{1.9}$$

另一方面，由式(1.7)和式(1.8)得

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{k}[f_{n_1}(x)+f_{n_2}(x)+\cdots+f_{n_k}(x)]\right\|_{L^p(G)} &\geqslant \frac{1}{k}\|f_{n_k}(x)\|_{L^p(G)}-\frac{1}{k}\|f_{n_1}(x)+\cdots+f_{n_{k-1}}(x)\|_{L^p(G)} \\ &\geqslant \frac{1}{k}\|f_{n_k}(x)\|_{L^p(G)}-\frac{1}{k}\sum_{m}^{n-1}\|f_{n_m}(x)\|_{L^p(G)}\geqslant\frac{1}{k}2^{n_k}\to\infty(k\to\infty). \end{aligned}$$

因与式(1.9)矛盾，(i)于是获证.

(ii)的证明：设$f_n(x)$为在 $L^p(G)$中弱收敛意义下的 Cauchy 列，那么

$g(x)\in L^{p'}(G)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$，$(f_n,g)=\int_G f_n(x)g(x)dx$ 是 Cauchy 列，因此它有极限，记为 $l(g)=\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,g)$.

由于(ⅰ),$l(g)$是定义在$L^{p'}(G)$中的有界线性泛函数. 于是有唯一$f(x)\in L^p(G)$,使$l(g)=(f,g)=\int_G f(x)g(x)\mathrm{d}x,\forall g(x)\in L^{p'}(G)$,即$f_n(x)$在$L^p(G)$中弱收敛于$f(x)$.

此外,如果$\|f_n(x)\|_{L^p(G)}\leqslant M$,那么

$$|(f,g)|\leqslant M\|g\|_{L^{p'}(G)},\ \forall g\in L^{p'}(G).$$

包含了$\|f(x)\|_{L^p(G)}\leqslant M$,即

$$\|f(x)\|_{L^p(G)}\leqslant\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)\|_{L^p(G)}.$$

(ⅲ)的证明:由于$L^p(G)$中的任一函数可用具有紧支集的有界可测函数按$L^p(G)$范数来逼近,后者又可用连续函数来逼近,连续函数则可用多项式来逼近,而任意实系数多项式又可用有理数系数的多项式来逼近,而所有有理数系数多项式的全体是可分的,从而$L^p(G)$是可分的.

(ⅳ)的证明:设$f_n(x)\in L^p(G)$且在$L^p(G)$中有界,那么

$g(x)\in L^{p'}(G)\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1\right)$,$(f_n,g)$有界. 因而由 Bolzano-Weierstrass 定理,对于$\varphi_1(x)\in L^{p'}(G)$,存在$\{f_n^{(1)}(x)\}\subset\{f_n(x)\}$,使$(f_n^{(1)}(x),\varphi_1(x))$收敛,同理$\varphi_2(x)\in L^{p'}(G)$,存在$\{f_n^{(2)}(x)\}\subset\{f_n^{(1)}(x)\}$,使$[f_n^{(2)}(x),\varphi_2(x)]$收敛,如此下去,$\forall\varphi_k(x)\in L^{p'}(G)$,$k=1,2,\cdots,m$,存在相应的

$\{f_n^{(k)}(x)\}\subset\{f_n^{(k-1)}(x)\}\subset\cdots\subset\{f_n^{(1)}(x)\}\subset\{f_n(x)\}$,使$(f_n^{(k)}(x),\varphi_k(x))$,$k=1,2,\cdots,m$收敛. 现按对角线位置取出$\{f_n(x)\}$的子列$\{f_n^{(n)}(x)\}$,易知$(f_n^{(n)}(x),\varphi_k(x))$对一切$k=1,2,\cdots$都收敛.

由于$L^{p'}(G)$可分,因此可以找到$L^{p'}(G)$的可数稠密网$\{\varphi_k(x)\}\subset L^{p'}(G)$,$\forall g(x)\in L^{p'}(G)$均可用$(\varphi_k(x))$中的有限个函数的线性组合以任意准确度在$L^{p'}(G)$中去逼近它. 由于$\forall\varepsilon>0$,$g(x)\in L^{p'}(G)$,选择$\sum\limits_k C_k\varphi_k$(其中只有有限个$C_k\neq0$),使

$$\left\|g(x)-\sum_k C_k\varphi_k(x)\right\|_{L^{p'}(G)}\leqslant\frac{\varepsilon}{1+M},$$

其中$M=\sup\limits_n\|f_n(x)\|_{L^p(G)}$.

于是

$$\forall n,\left|\left(f_n^{(n)}(x),g(x)-\sum_k C_k\varphi_k(x)\right)\right|\leqslant\varepsilon.$$

另一方面,当$n\to\infty$时,$(f_n^{(n)},\sum\limits_k C_k\varphi_k)$是收敛的,于是$(f_n^{(n)},g)$亦收敛,根据(ⅱ),$\{f_n^{(n)}(x)\}$在$L^p(G)$中弱收敛于某个$f(x)\in L^p(G)$,于是(ⅳ)获证.

定理 1.2 设$0<p_1<p<p_2$,函数同时u属于$L^{p_1}(G)$和$L^{p_2}(G)$,那么$\forall\varepsilon>0$,

$$\|u\|_{L^p(G)}\leqslant\varepsilon\|u\|_{L^{p_2}(G)}+k\varepsilon^{\frac{-p_2(p-p_1)}{p_1(p_2-p_1)}}\|u\|_{L^{p_1}(G)},\tag{1.10}$$

其中$k>0$是与ε,u无关的常数,同时有

$$\|u\|_{L^p(G)}\leqslant\|u\|_{L^{p_2}(G)}^{\alpha}\|u\|_{L^{p_1}(G)}^{1-\alpha},\tag{1.11}$$

其中$\alpha>0,\dfrac{1}{p}=\dfrac{\alpha}{p_2}+\dfrac{1-\alpha}{p_1}$.

证明　只需证明式(1.11)成立即可. 注意到 $p_1<p<p_2$ 和 $\alpha=\dfrac{p(p-p_1)}{p(p_2-p_1)}$，由 Young 不等式，$\int_G|u|^p\mathrm{d}x=\int_G|u|^{\frac{p_1(p_2-p)}{p_2-p_1}}|u|^{\frac{p_2(p-p_1)}{p_2-p_1}}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_G|u|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_2-p}{p_2-p_1}}\left(\int_G|u|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-p_1}{p_2-p_1}}$.

故定理 1.2 得证.

2　Sobolev 空间

设 $G\subset R^n$ 是一个开集，$C^k(G)(k\geqslant 0)$ 是所有 G 上 k 次连续可微的函数空间，其范数定义为

$$\|u\|_{C^k(G)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in G}|D^\alpha u|,u\in C^k(G),$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\alpha_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant n)$ 是整数，$|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i$，并且 $D^\alpha u=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},D_iu=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$，$D_{ij}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$.

记 $C_0^k(G)=\{u\in C^k(G)\mid$ 支集 $\operatorname{supp}u\subset G\}$，其中 $\operatorname{supp}u=\overline{\{x\in G\mid u(x)\neq 0\}}$ 表示 u 在 G 内的紧支集.

设 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 和 k 是非负整数，故称 $W^{k,p}(G)$ 空间为 Sobolev 空间.

$$W^{k,p}(G)=\{u\in L^p(G)\mid D^\alpha u\in L^p(G),|\alpha|\leqslant k\},$$

其范数为

$$\|u\|_{W^{k,p}(G)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha u\|_{L^p(G)},u\in W^{k,p}(G),$$

特别地，当 $p=2$ 时，记 $H^k(G)=W^{k,2}(G)$，这是 Hilbert 空间，其内积为

$$(u,v)_{H^k(G)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_G D^\alpha u\cdot D^\alpha v\mathrm{d}x,u,v\in H^k(G).$$

又设 $W_0^{k,p}(G)=C_0^\infty(G)$ 在 $W^{k,p}(G)$ 中的闭包，$H_0^k(G)=W_0^{k,2}(G)$.

当 $k=1,p=2$ 时，Hilbert 空间 $H_0^2(G)=W_0^{1,2}(G)$ 与平方可积空间 $L^2(G)$ Hilbert 空间的关系如下.

引理 2.1　(Friedrichs 不等式)设函数集合

$B_0^k=\{u\in C^1(G)\cap C^0(\overline{G})\mid u(x)=0,x\in\partial G\}$，则

$\int_G u^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_G|Du|^2\mathrm{d}x,\|u\|_{L^2(G)}\leqslant C\|Du\|_{L^2(G)}(\forall u\in B_0^1)$，其中 C 是与 u 无关而与 G 有关的常数.

证明　n 维有界区域 G 必包含在棱平行于坐标轴的 n 维正立方体 Q 中，设

$$G\subset Q=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant a_i+h,i=1,2,\cdots,n\}.$$

在 $Q\backslash G$ 中令 $u=0$，$\forall x\in Q$ 有

$$u(x)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)-u(a_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{a_1}^{x_1}D_1u(t,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}t,$$

利用 Schwarz 不等式得

$$|u(x)|^2\leqslant\left(\int_{a_1}^{x_1}|D_1u(t,x_2,\cdots,x_n)|\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\left(\int_{a_1}^{a_1+h}|D_1u(x)|\mathrm{d}x_1\right)^2\leqslant\left(\int_{a_1}^{a_1+h}\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_{a_1}^{a_1+h}|D_1u(x)|^2\mathrm{d}x_1\right)$$

$$= h\int_{a_1}^{a_1+h} |D_1u(x)|^2 \mathrm{d}x_1.$$

在 Q 上积分上式得

$$\int_Q |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant h\int_{a_1}^{a_1+h}\cdots\int_{a_n}^{a_n+h}\left(\int_{a_1}^{a_1+h}|D_1u(x)|^2\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = h^2\int_Q |D_1u(x)|^2\mathrm{d}x.$$

因为在 G 外 $u=0$,故由上式推出

$$\int_Q |u(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant h^2\int_G |D_1u(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant h^2\int_G |Du(x)|^2\mathrm{d}x.$$

引理 2.2 (Friedrichs 不等式)设 $u\in W_0^{1,2}(G)$,则

$$\int_Q u^2\mathrm{d}x \leqslant C\int_G |Du(x)|^2\mathrm{d}x, \|u\|_{L^2(G)} \leqslant C\|Du\|_{L^2(G)},$$

其中是与 u 无关而只与 G 有关的常数.

证明 对 $u\in W_0{}^{1,2}(G)$,存在 $\{u_k\}\subset C_0^1(G)$,且 $u\in L^2(G)$,$D_iu\in L^2(G)$ 使得在 $L^2(G)$ 中,$u_k\to u(k\to\infty)$,在 $L^2(G)$ 中,$D_iu_k\to D_iu(i=1,2,\cdots,n,k\to\infty)$.

因此有

$$\|u_k\|_{L^2(G)}\to\|u\|_{L^2(G)}(k\to\infty),$$
$$\|D_iu_k\|_{L^2(G)}\to\|D_iu\|_{L^2(G)}(k\to\infty, i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $u_k\in C_0^1(G)\subset B_0^1$,根据引理 1.1 得

$$\|u_k\|_{L^2(G)}\leqslant C\|Du_k\|_{L^2(G)},$$

对上式两端取极限 $k\to\infty$,引理 1.2 得证.

Friedrichs 不等式在特殊的上界常数 $C=\lambda_1^{-\frac{1}{2}}$ 时,称为 Poincare 不等式.

引理 2.3 (Poincare 不等式)设 $G\subset R^n$ 有界开子集,则

$$\|u\|_{L^2(G)}\leqslant\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|Du\|_{L^2(G)}, \forall u\in H_0^1(G),$$

其中 λ_1 是拉普拉斯算子 $-\Delta$ 在 G 上带有齐次 Dirchlet 边界条件的第一特征值.

引理 2.4 $H_0^1(G)=W_0^{1,2}(G)$中的有界集是 $L^2(G)$中的列紧集.

证明 由 F. Riesz 定理及 $C_0^1(G)$在 $W_0^{1,2}(G)$中的稠密性知道,只需证明不等式

$$\int_G |u(x+h)-u(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_{W^{1,2}(G)}^2\cdot|h|^2,$$

$\forall u\in C_0^1(G)$,当 $x\in R^n\backslash G$ 时,$u=0$.

由 Schwarz 不等式有

$$|u(x+h)-u(x)|^2 = \left|\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x+th)\right|^2 = \left|\int_0^1\sum_{i=1}^n D_iu(x+th)h_i\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant$$
$$\left(\int_0^1|Du(x+th)\|h|\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1|Du(x+th)|^2\mathrm{d}t\int_0^1|h|^2\mathrm{d}t = h^2\int_0^1|Du(x+th)|^2\mathrm{d}t.$$

对上式两边在 G 上积分

$$\int_G|u(x+h)-u(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant h^2\int_G\int_0^1|Du(x+th)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leqslant h^2\int_0^1\int_G|Du(x+th)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$
$$h^2\int_0^1\int_G|Du(y)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t = h^2\int_0^1\|Du\|_{L^2(G)}^2\mathrm{d}t = \|u\|_{W^{1,2}(G)}^2\cdot|h|^2.$$

引理 2.4 证毕.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

以下重点介绍 Sobolev 嵌入定理,只把定理的条件和结论写出,将证明过程略去,会使用定理来解决具体问题.

设整数 $k\geqslant 0$ 和 $0<\alpha<1$,定义空间

$$C^{k,\alpha}(G)=\{u\in C^k(G)\mid[D^m u]_\alpha<\infty,|m|=k\},$$

其范数为

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(G)}=\|u\|_{C^k(G)}+\sum_{|m|=k}[D^m u]_\alpha,$$

其中$[D^m u]_\alpha=\sup\limits_{\substack{x,y\in G\\x\neq y}}\dfrac{|D^m u(x)-D^m u(y)|}{|x-y|^\alpha}$.

定理 2.1 (连续嵌入定理)　设 $G\subset R^n$ 是一有界区域,$1\leqslant p<\infty$,那么

(ⅰ) $W_0^{k,p}(G)\subset L^q(G)$, $\forall 1\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-kp}, n>kp$;

(ⅱ) $W_0^{k,p}(G)\subset L^q(G)$, $\forall 1\leqslant q<\infty, n=kp$;

(ⅲ) $W_0^{k,p}(G)\subset C^{m,\alpha}(G)$, $\forall m+\alpha=k-\dfrac{n}{p}, n<kp$.

从集合关系是连续包含,空间拓扑还满足下列不等式

$$\|u\|_{L^q(G)}\leqslant C\|u\|_{W_0^{k,p}(G)},q\leqslant\frac{np}{n-kp};$$

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}(G)}\leqslant C\|u\|_{W_0^{k,p}(G)},m+\alpha=k-\frac{n}{p},n<kp.$$

其中 $C=C(n,G,q)$是常数.

定理 2.2 (连续嵌入定理)　设 $G\subset R^n$ 是 Lipschitz 的,不一定有界,那么

(ⅰ) $W^{k,p}(G)\subset L^q(G)$, $p\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-kp}, n>kp$;

(ⅱ) $W^{k,p}(G)\subset C^{m,\alpha}(G)$, $\forall m+\alpha=k-\dfrac{n}{p}, n<kp$.

并且包含是连续的.

定理 2.3(Rellich-Kondrachov 紧嵌入定理)　设 $G\subset R^n$ 是有界区域,下面的嵌入是紧的.

(ⅰ) $W_0^{1,p}(G)\subset L^q(G)$, $q<\dfrac{np}{n-p}, n>p$;

(ⅱ) $W_0^{1,p}(G)\subset L^q(G)$, $q<\infty, n=p$;

(ⅲ) $W_0^{1,p}(G)\subset C^{0,\alpha}(G)$, $\alpha<1-\dfrac{n}{p}, n<p$.

定理 2.4[Sobolev 空间 $W^{k,p}(G)$中的内插不等式]　设 $G\subset R^n$ 是有界开集,$1\leqslant q<\infty$, j,k 是整数,满足 $0\leqslant j<k$, $\dfrac{j}{k}\leqslant\alpha\leqslant 1$,以及下列三条件:

(ⅰ) $\dfrac{1}{q}=\dfrac{j}{n}+\alpha\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{k}{n}\right)+\dfrac{1-\alpha}{r}$;

(ⅱ) $\begin{cases}r\leqslant\dfrac{np}{n-pk}(n>pk),\\ r\leqslant\infty\ (n\leqslant pk);\end{cases}$

$$(\text{iii})\begin{cases}\dfrac{nr}{n+rj}\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-p(k-j)}(n>p(k-j)),\\ \dfrac{nr}{n+rj}\leqslant q\leqslant\infty\ (n\leqslant p(k-j)).\end{cases}$$

那么存在常数 $C=C(p,r,j,k,\alpha,n,G)$ 使得

$$\|D^j u\|_{L^q(G)}\leqslant C\|D^k u\|_{L^p(G)}^{\alpha}\|u\|_{L^r(G)}^{1-\alpha},\ \forall u\in W_0^{k,p}(G).$$

定理 2.5 （Gagliardo-Nirenberg 不等式）设 $G\subset R^n$ 是一个区域（不一定有界），$n\geqslant 2$，$\forall u\in W_0^{1,m}(G)$，$m\geqslant 1$，$p\geqslant 1$，则下列不等式成立：

$$\|u\|_{L^p(G)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L^m(G)}^{\alpha}\|u\|_{L^r(G)}^{1-\alpha},$$

其中 $\alpha=\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{n-m}{nm}\right)^{-1}=\dfrac{\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p}}{\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$，$C$ 是与 G 有关的常数.

设 $G\subset R^n$ 是 C^{k+1} 区域，则 $\forall u\in W_0^{k,m}(G)$，$p\geqslant 1$，有

$$D^\alpha u|_{\partial G}=0(a.\ e.\ \forall|\alpha|\leqslant k-1).$$

1.2 整体吸引子

1 解半群

一个动力系统是指一个完备距离空间 H 和 H 的连续映射族 $S(t)$ 的组对，对一个偏微分方程的解 $u(t)$ 和初值 $u_0\in H$，有

$$u(t)=S(t)u_0.$$

映射族 $S(t)$，$t\geqslant 0$ 称为发展算子或解半群，从 H 映到 H 满足半群性质：

$$\begin{cases}S(t+s)=S(t)\cdot S(s),\ \forall s,t\geqslant 0\\ S(0)=I\end{cases}$$

$u_0\in H$，从 u_0 出发的方程的解轨道是集 $\bigcup\limits_{t\geqslant 0}S(t)u_0$；$\omega(u_0)=\bigcap\limits_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant s}S(t)u_0}$ 称为 u_0 点的 ω-极限集；$\omega(d)=\bigcap\limits_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant s}S(t)d}(d\subset H)$ 称为 d 点的 ω-极限集.

易知 $\varphi\in\omega(d)\Leftrightarrow$ 存在一列 $\varphi_n\in d$ 和序列 $t_n\to+\infty$ 使得

$$S(t_n)\varphi_n\to\varphi(n\to\infty).$$

定义 1.1 设 $X\subset H$，半群 $S(t)$ 满足

$$S(t)X=X,\ \forall t\geqslant 0,$$

称 X 是一个不变集.

引理 1.1 设子集 $d\subset H$，$d\neq\varnothing$，存在 $t_0>0$，集合 $\bigcup\limits_{t\geqslant t_0}S(t)d$ 在 H 中相对紧，那么 $\omega(d)$ 是非空紧不变集.

证明 由于 d 非空，$\forall s\geqslant 0$，$\bigcup\limits_{t\geqslant s}S(t)d$ 非空，因此 $\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant s}S(t)d}$ 非空紧集，s 随着增大而递减. 由 $\omega(d)$ 的性质 $S(t)\omega(d)=\omega(d)$，$\forall t\geqslant 0$，设 $\Psi\in S(t)\omega(d)$，则 $\Psi=S(t)\varphi$，$\varphi\in\omega(d)$，存在序列 φ_n，t_n 使

$$S(t)S(t_n)\varphi_n=S(t+t_n)\varphi_n\to S(t)\varphi=\Psi,$$

即 $\Psi\in\omega(d)$.

反之,设 $\varphi\in\omega(d)$,存在序列 φ_n,t_n,对 $t_n\geqslant t$,序列 $S(t_n-t)\varphi_n$ 在 H 中相对紧,存在子列 $t_{n_i}\to\infty$ 和 $\Psi\in H$,

$$S(t_{n_i}-t)\varphi_{n_i}\to\Psi(t\to\infty),$$

$$S(t_{n_i})\varphi_{n_i}=S(t)S(t_{n_i}-t)\varphi_{n_i}\to S(t)\Psi=\varphi(n_i\to\infty)$$

表明 $\varphi\in S(t)\omega(d)$. 引理 1.1 证毕.

2　吸收集和吸引子

定义 2.1　设集合 $A\subset H$ 满足

(ⅰ) A 是不变集:$S(t)A=A,\forall t\geqslant 0$;

(ⅱ) A 有一个开邻域 $U,\forall u_0\in U,S(t)u_0$ 收敛到 $A(t\to\infty)$;

$\mathrm{dist}(S(t)u_0,A)\to 0(t\to\infty)$,

其中点到集合的距离定义为 $\mathrm{dist}(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\mathrm{d}(x,y)$,$\mathrm{d}(x,y)$表示在 H 中 x 到 y 的距离,则称 A 是一个吸引子. 大开集 U 称为吸引子 A 的吸引槽.

设两个集合 B_0,B_1 的半距离为 $\mathrm{d}(B_0,B_1)=\sup\limits_{x\in B_0}\inf\limits_{y\in B_1}d(x,y)$,如果 $\mathrm{d}[S(t)B,A]\to 0(t\to\infty)$,称 A 是一致吸引集合 $B\subset U$.

定义 2.2　设集合 $A\subset H$,对半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$,A 是吸引 H 中有界集的紧吸引子,那么 A 称为整体吸引子.

定义 2.3　设 B 是 H 的子集,U 是包含 B 的开集,如果 $\forall B_0\subset U$ 有界集,$\exists t_1(B_0)$使得 $S(t)B_0\subset B,\forall t\geqslant t_1(B_0)$,称 B 是 U 的有界吸收集.

假设解半群 $S(t)$对充分大 t 是一致紧,即 $\forall B\subset H$ 有界集,存在 $t_0(B)$使得 $\bigcup\limits_{t\geqslant t_0}S(t)B$ 在 H 中相对紧.　(2.1)

假设 $S(t)=S_1(t)+S_2(t)$,其中 $S_1(t)$对充分大 t 是一致紧,$S_2(t)$是 H 到 H 连续映射,并且 $\forall C\subset H$ 有界集,

$$r_C(t)=\sup_{\varphi\in C}|S_2(t)\varphi|_H\to 0(t\to\infty).\tag{2.2}$$

定理 2.1(吸引子的存在定理)　设距离空间 H,解半群 $S(t)$满足式(2.1)或式(2.2),存在开集 U 的有界吸收集 B,那么 $A=\omega(B)=\bigcap\limits_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant s}S(t)B}$($B$ 的 ω-极限集)是吸引 U 中有界集的紧极大吸引子. 进而若 H 是 Banach 空间,U 是凸连通集,那么吸引子 A 也是连通集.

在证明定理 2.1 之前,需要下列引理:

引理 2.1　设半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$满足式(2.1)或式(2.2)及任意 $B_0\subset H$ 有界集,则 $\omega(B_0)$是非空紧不变集.

证明　假设式(2.1)成立,$\bigcup\limits_{t\geqslant t_0}S(t)B_0$ 相对紧,由引理 2.1 直接得引理 2.2 的证明. 假设式(2.2)成立,首先注意到,φ_n 有界,$t_n\to\infty$,则 $S_2(t_n)\varphi_n\to 0$,并且 $S_1(t_n)\varphi_n$ 收敛性与 $S(t_n)\varphi_n$ 收敛性相同. 结合 ω-极限集的特性可证明 $\omega(B_0)=\omega_1(B_0)$,其中 $\omega_1(B_0)=\bigcap\limits_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant s}S_1(t)B_0}$. 事实上,$\varphi\in\omega_1(B_0)$等价于存在序列 $\varphi_n\in B_0$ 和 $t_n\to\infty$ 使 $S_1(t_n)\varphi_n\to\varphi(n\to\infty)$.

$$S(t_n)\varphi_n\to\varphi(n\to\infty),\varphi\in\omega(B_0)$$

故 $\omega_1(B_0)\in\omega(B_0)$.

同理可证 $\omega(B_0)\in\omega_1(B_0)$,因此 $\omega(B_0)=\omega_1(B_0)$成立.

类似引理 2.1 的证明，由于$\overline{\bigcup_{t\geqslant s} S_1(t)B_0}$是非空闭递减集及假设条件，$\overline{\bigcup_{t\geqslant s} S_1(t)B_0}$是紧集，因此 $\omega_1(B_0)$是非空紧集，即 $\omega(B_0)$是非空紧集. 下面需证明 $\omega(B_0)$是 $S(t)$的不变集.

类似于引理 2.1，我们可得 $S(t)\omega(B_0)\subset\omega(B_0)$，$\forall t>0$，设 $\Psi\in S(t)\omega(B_0)$，$\Psi=S(t)\varphi$，$\Psi\in\omega(B_0)$，有序列 φ_n，t_n 使

$$S(t)S(t_n)\varphi_n=S(t+t_n)\varphi_n\to S(t)\varphi=\Psi,$$

故 $\Psi\in\omega(B_0)$，另一方面 $\omega(B_0)\subset S(t)\omega(B_0)$，$\forall t>0$.

设 $\varphi\in\omega(B_0)$，存在序列 $\varphi_n\in B_0$ $t_n\to\infty$ 使

$$S(t_n)\varphi_n\to\varphi(n\to\infty).$$

对 $t_n\geqslant t$，$S(t_n-t)\varphi_n=S_1(t_n-t)\varphi_n+S_2(t_n-t)\varphi_n$.

序列 $S_1(t_n-t)\varphi_n$ 在 H 中是相对紧，有收敛子列

$$S_1(t_{n_i}-t)\varphi_{n_i}\to\Psi(n_i\to\infty)$$

由 $S_2(t_{n_i}-t)\varphi_{n_i}\to 0(n_i\to\infty)$得

$$S(t_{n_i}-t)\varphi_{n_i}\to\Psi(n_i\to\infty).$$

因此 $\Psi\in\omega(B_0)$且 $\varphi=\lim\limits_{n_i\to\infty}S(t)S(t_{n_i}-t)\varphi_{n_i}=S(t)\Psi\in S(t)\omega(B_0)$.

引理 2.1 得证.

引理 2.2 设 U 是开凸连通集，$K\subset U$ 紧不变集并且 K 吸引紧集，那么 K 是连通集.

证明 K 的闭凸集$\overline{\mathrm{Conv}K}=B\subset U$ 紧连通集，并且 K 吸引 B，假设 K 不是连通集，可以找到两个开集 $U_1\cap U_2=\varnothing$，由于 $K\subset B$，$K=S(t)K\subset S(t)B$，B 是连通集和 $S(t)$连续映射，因此 $S(t)B$是连通集. $U_i\cap S(t)B\neq\varnothing$，$i=1,2$ 且 $U_1\cup U_2$ 不能覆盖 $S(t)B$，于是 $\forall x_t\in S(t)B$，$x_t\notin U_1\cup U_2$.

在式(2.3)假设下，序列 x_n，$n\in\mathbf{N}(t=n)$，

$$x_n=S(n)y_n, y_n\in B$$

即 $x_n=S_1(n)y_n+S_2(n)y_n$，其中 $S_1(n)y_n$ 是相对紧的，从而知 x_n 也是相对紧的，因此 K 吸引$\{x_n\}$并且 x_n 有子列(仍记为 x_n)收敛到点 $x\in K$，但 $x\notin U_1\cup U_2$ 矛盾.

定理 2.1 的证明：由于$\bigcup_{t\geqslant t_0}S(t)B$ 相对紧，引理 2.1 和引理 2.2 表明 $\omega(B)$非空紧不变集，于是可得 $A=\omega(B)$是 U 中一个吸引子，它吸引 U 中的有界集.

事实上，由反证法，假设有有界集 $B_0\subset U$，使得

$\mathrm{dist}(S(t)B_0,A)$不趋于 $0(t\to\infty)$，于是存在 $\delta>0$ 和序列 $t_n\to\infty$ 使得

$$\mathrm{dist}(S(t_n)B_0,A)\geqslant\delta>0,\ \forall n.$$

每个 n 有 $b_0\in B_0$ 满足

$$\mathrm{dist}(S(t_n)b_0,A)\geqslant\frac{\delta}{2}>0. \tag{2.3}$$

由于 B 是吸收集，对 n 充分大($t_n\geqslant t_1(B_0)$)时

$$S(t_n)B_0\subset B, S(t_n)b_n\in B.$$

又 $S(t_n)b_n$ 相对紧，至少有一点 a，

$$a=\lim_{n_i\to\infty}S(t_{n_i})b_{n_i}=\lim_{n_i\to\infty}S(t_{n_i}-t_1)S(t_1)b_{n_i},$$

因此 $S(t_1)b_n\in B$，$a\in A=\omega(B)$与式(2.3)矛盾.

吸引子 A 的极大性：设 $A'\supset A$ 是一个较大有界吸引子，则 $A'\subset B$ 和 $S(t)A'=A'$，对充分大的 t，$\omega(A')=A'\subset\omega(B)=A$.

最后根据引理 2.2 得 A 是连通集，定理 2.1 得证.

1.3　整体吸引子的维数估计

1　解半群的可微性

设 H 是 Hilbert 空间,内积为$(\cdot,\cdot)$和模$|\cdot|$,$\mathbf{A}$ 是线性闭正自伴无界算子,$D(A)\subset H$,记 $V=D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$赋范

$$\|v\|=|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v|,\ \forall v\in D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}),$$

$$\|v\|=\{(\mathbf{A}v,v)\}^{\frac{1}{2}},\ \forall v\in D(\mathbf{A}).$$

已知非线性算子 $\mathrm{G}:V\to V'$,存在 $0<\sigma_0\leqslant 1$,$\forall R>0$,存在 $K_0(R)$满足

$$|(\mathrm{G}(v)-\mathrm{G}(u),v-u)|\leqslant K_0(R)|v-u|^{\sigma_0}\|v-u\|^{2-\sigma_0},\ \forall u,v\in V,|u|\leqslant R,|v|\leqslant R.\tag{1.1}$$

设 $u,v\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$,则

$$\mathrm{G}(v(t))-\mathrm{G}(u(t))=l_0(t)\cdot(v(t)-u(t))+l_1(t;v(t)-u(t))$$

其中 $t\in(0,T)$,$l_0(t)\in l(V,V')$,并且

(ⅰ) $\|l_0(t)\|_{l(V,V')}\leqslant N_T$;

(ⅱ) $\exists 0<\varepsilon\leqslant 1,(l_0(t),\varphi)\leqslant(1-\varepsilon)\|\varphi\|^2+C_\varepsilon|\varphi|^2,\ \forall\varphi\in V$;

(ⅲ) $\exists\sigma_1>0$ 和 $K_0^1>0$ 使得

$$|l_1(t;v(t)-u(t))|_{-1}\leqslant K_0^1\|v(t)-u(t)\|^{1+\sigma_1}.\tag{1.2}$$

设 $u,v\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$且满足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mathbf{A}u+\mathrm{G}(u)=0,u(0)=u_0,\tag{1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\mathbf{A}v+\mathrm{G}(v)=0,v(0)=v_0,\tag{1.4}$$

首先证明映射 $S(t):u_0\to u(t)$的 Lipschitz 性.

令 $w=v-u$,$|u|_{L^\infty(0,T;H)}\leqslant R$,$|v|_{L^\infty(0,T;H)}\leqslant R$.
在式(1.1)中 $K_0=K_0(R)$,则 $w=v-u$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\mathbf{A}w+\mathrm{G}(v)-\mathrm{G}(u)=0,\tag{1.5}$$

因此,由 Young 不等式,可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2+\|w\|^2=[\mathrm{G}(v)-\mathrm{G}(u),w]\leqslant K_0|w|^{\sigma_0}\|w\|^{2-\sigma_0}\leqslant\frac{1}{2}\|w\|^2+\frac{C_1'}{2}K_0^{\frac{2}{\sigma_0}}|w|^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2+\|w\|^2\leqslant C_1'K_0^{\frac{2}{\sigma_0}}|w|^2.\tag{1.6}$$

在式(1.6)中使用 Gronwall 不等式可得

$$|v(t)-u(t)|^2\leqslant|v_0-u_0|^2\exp(C_1'K_0^{\frac{2}{\sigma_0}}T),\ \forall t\in(0,T),\tag{1.7}$$

$$\int_0^t\|u(t)-v(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant|u_0-v_0|^2\exp(C_1'K_0^{\frac{2}{\sigma_0}}T),\ \forall t\in(0,T),\tag{1.8}$$

然后考虑线性化方程

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\mathbf{A}U+L_0(t)U=0,U(0)=\xi=v_0-u_0. \tag{1.9}$$

由式(1.2)的(ⅰ)和(ⅱ)假设,可证线性化问题存在唯一解

$$U\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H).$$

设 $\varphi=v-u-U=w-U$,则 φ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\mathbf{A}\varphi+L_0(t)\varphi=-L_1(t;w(t)),U(0)=0, \tag{1.10}$$

用 φ 与式(1.10)取内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi|^2+\|\varphi\|^2+(L_0(t)\varphi,\varphi)=-(L_1(t;w(t)),\varphi),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi|^2+\varepsilon\|\varphi\|^2\leqslant C_\varepsilon|\varphi|^2+K_0^1\|w(t)\|^{1+\sigma_1}\|\varphi(t)\|\leqslant C_\varepsilon|\varphi|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi(t)\|^2+\frac{(K_0^1)^2}{2\varepsilon}\|w(t)\|^{2(1+\sigma_1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi|^2+\varepsilon\|\varphi\|^2\leqslant C_\varepsilon|\varphi|^2+\frac{(K_0^1)^2}{\varepsilon}\|w(t)\|^{2(1+\sigma_1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi|^2\leqslant C_\varepsilon|\varphi|^2+\frac{(K_0^1)^2}{\varepsilon}\|w(t)\|^{2(1+\sigma_1)}. \tag{1.11}$$

由 Gronwall 不等式及 $\varphi(0)=0$

$$|\varphi|^2\leqslant\frac{(K_0^1)^2}{\varepsilon}\int_0^T\|w(s)\|^{2(1+\sigma_1)}\mathrm{d}s,$$

$$|\varphi|^2\leqslant\frac{(K_0^1)^2}{\varepsilon}\exp\left(C_1'K_0^{\frac{2}{\sigma_0}}T(1+\sigma_1)|v_0-u_0|^{2(1+\sigma_1)}\right).$$

因此

$$\frac{|v(t)-u(t)-U(t)|^2}{|v_0-u_0|^2}\leqslant C_2\|v_0-u_0\|^{2\sigma_1}\to 0, \tag{1.12}$$

当 $v_0\to u_0$ 时,映射 $S(t):u_0\to u(t)$ 在 H 中可微分,在 $u_0\in H$ 点微分映射为 $U_0=\xi\to U(t)$, U 是式(1.9)的解.

2 分数维数 $d_F(X)$ 和 Hausdorff 维数 $d_H(X)$

考虑覆盖 X 的固定半径为 ε 闭球最小个数 $N(X,\varepsilon)$.

定义 2.1 设为紧集 $\overline{X}$,称

$$\mathrm{d}_F(x)=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(X,\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

为 X 的分形维数.

上述极限容许取到 $+\infty$.

由此定义知,对充分小的 ε,如果 $d>d_F(X)$,那么

$$N(X,\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{-d}. \tag{2.1}$$

性质 2.1(分数维数的性质)

①$d_F(\bigcup_k^N X_k)\leqslant\max_k d_F(X_k)$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com