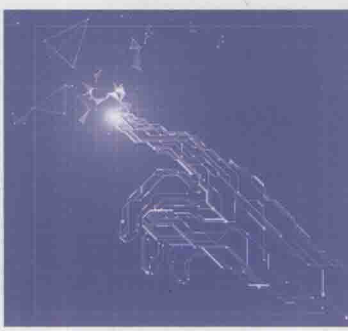
中央高校基本科研业务费专项资金资助项目
Fundamental Research Funds for the Central Universities

非良基集、余代数与模态逻辑研究

史璟 著

Non-well-founded Sets, Co-algebra and Modal Logic



中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

中央高校基本科研业务费专项资金资助项目
Fundamental Research Funds for the Central Universities
本书是2010年国家社会科学基金项目“非良基集、余代数与模态逻辑研究”（批准号10CZX034）成果

非良基集、余代数与模态逻辑研究

史璟 著

中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

非良基集、余代数与模态逻辑研究/史璟著．—北京：经济科学出版社，2019.6
ISBN 978-7-5218-0664-9

Ⅰ.①非…　Ⅱ.①史…　Ⅲ.①模态逻辑-研究
Ⅳ.①B815.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第127549号

责任编辑：王　娟　张立莉
责任校对：王肖楠
责任印制：邱　天

非良基集、余代数与模态逻辑研究
史　璟　著
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100142
总编部电话：010-88191217　发行部电话：010-88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京季蜂印刷有限公司印装
710×1000　16开　15.75印张　300000字
2019年6月第1版　2019年6月第1次印刷
ISBN 978-7-5218-0664-9　定价：78.00元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010-88191510）

目　录

第 1 章　模态逻辑基础 …… 1

1.1　模态逻辑的句法和语义 …… 1
1.2　模态对应理论 …… 10
1.3　模型和框架构造 …… 16
1.4　典范模型和完全性 …… 24
1.5　有穷模型性质 …… 26

第 2 章　非良基集合论基础 …… 29

2.1　集合论的基础知识 …… 29
2.2　良基集合与非良基集合 …… 49
2.3　非良基集与循环现象 …… 51
2.4　本元 …… 56
2.5　集合与图 …… 58
2.6　平坦方程组 …… 68
2.7　集合连续算子 …… 71
2.8　不动点 …… 73
2.9　集合上的互模拟关系 …… 76

第 3 章　反基础公理 …… 82

3.1　反基础公理的基本形式 …… 82
3.2　反基础公理的模型 …… 90
3.3　反基础公理的变形 …… 93
3.4　反基础公理与余代数 …… 115

第 4 章　模态语言的集合语义 …… 123

4.1　模态语言的解释 …… 123
4.2　互模拟与模态等价 …… 137
4.3　模态可定义性 …… 143
4.4　集合语义下的逻辑性质 …… 158
4.5　余代数与模态逻辑 …… 175

第 5 章　余代数逻辑及其应用 …… 195

5.1　余代数的例子 …… 195
5.2　余代数逻辑 …… 211
5.3　余代数逻辑中的推理 …… 219
5.4　可判定性和复杂性 …… 225
5.5　复合性 …… 233

参考文献 …… 239

第 1 章

模态逻辑基础

本章主要介绍模态逻辑的基本内容，包括模态逻辑的句法和语义、模型和框架的构造、互模拟、模态语言与一阶语言、模态可定义性、有穷模型性质（有穷框架性质）、完全性和可判定性等各方面的内容，以便为后面的章节使用非良基集合解释模态语言提供一些基本概念、技术和方法。①

1.1 模态逻辑的句法和语义

模态逻辑的基本模态语言 ML 由命题变元的集合 Φ（命题变元一般用 p、q、r 等表示）和一元模态算子 $\Diamond$ 构成。ML 的公式集合 $Form(\Phi, \Diamond)$ 用下列规则给出：

$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg \phi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond \phi$$

这里的 $p \in \Phi$。该定义说明了公式的几种可能的形式。定义一元模态算子 $\Diamond$ 的对偶算子 $\Box$ 为：$\Box \phi := \neg \Diamond \neg \phi$。其余联结词 $\wedge$、$\rightarrow$、$\top$ 等定义为：

（1）$\phi \wedge \psi := \neg(\neg \phi \vee \neg \psi)$；

（2）$\phi \rightarrow \psi := \neg \phi \vee \psi$；

（3）$\top := \bot$。

若用广义析取（或广义合取）作为初始联结词，可构造无穷模态语言，记为 $ML_{\infty}(\Phi, \Diamond)$。$ML_{\infty}(\Phi, \Diamond)$ 是基于基本模态语言，将二元析取（合取）算子 $\vee$（$\wedge$）变为对任意公式集 Γ 的一元析取（合取）运算 $\bigvee$（$\bigwedge$）。无穷模态语言的公式集 $Form_{\infty}(\Phi, \Diamond)$ 用下列规则给出：

$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg \phi \mid \bigwedge \Gamma \mid \Diamond \phi$$

这里的 $p \in \Phi$，Γ 为任意公式集。很明显，$Form(\Phi, \Diamond) \cup Form_{\infty}(\Phi, \Diamond)$。

① 本章主要内容参见 P. Blackburn, M. de Rijke and Yde Venema, *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.

如果公式集 Γ 是有穷的，则 $\bigwedge\Gamma=\bigwedge\langle\gamma:\gamma\in\Gamma\rangle$，令 $\Gamma=\{\gamma_i: i<n\}$，令 $\bigwedge\Gamma:=\bigwedge_{i<n}\gamma_i$，用二元合取算子 $\wedge$ 递归地定义 $\bigwedge\Gamma$：

$$\bigwedge_{i<0}\gamma_i:=\top;$$
$$\bigwedge_{i<1}\gamma_i:=\gamma_0;$$
$$\bigwedge_{i<2}\gamma_i:=\gamma_0\wedge\gamma_1;$$
$$\bigwedge_{i<n+1}\gamma_i:=(\bigwedge_{i<n}\gamma_i)\wedge\gamma_n。$$

如果 Γ 是无穷的公式集，那么 $\bigwedge\Gamma$ 就不能通过二元算子 $\wedge$ 来定义。除此之外，将无穷模态逻辑中的 $\bigvee\Gamma$ 定义为 $\neg\bigwedge\{\neg\phi:\phi\in\Gamma\}$。另外，还有两个特殊的定义：$\top\leftrightarrow\bigwedge\varnothing$；$\bot\leftrightarrow\bigvee\varnothing$。

以上分别是给出的基本模态语言 $ML(\Phi,\Diamond)$ 和无穷模态语言 $ML_\infty(\Phi,\Diamond)$ 的句法。这两种语言的不同之处是：基本模态语言中的析取（合取）可在无穷模态语言中定义为有穷公式集的析取（合取），而无穷模态语言 $ML_\infty(\Phi,\Diamond)$ 中无穷公式集的析取（合取）在基本模态语言中则不能表达。

在基本模态语言中，代入 σ 是从命题变元的集合 Φ 到公式集合 $Form(\Phi,\Diamond)$ 的函数。任意给出代入 σ，递归定义的映射 $(\cdot)^\sigma$：$Form(\Phi,\Diamond)\to Form(\Phi,\Diamond)$：

$$p^\sigma=\sigma(p)$$
$$(\neg\phi)^\sigma=\neg\phi^\sigma$$
$$(\phi\wedge\psi)^\sigma=\phi^\sigma\wedge\psi^\sigma$$
$$(\Diamond\phi)^\sigma=\Diamond\phi^\sigma$$

公式 ϕ 在 σ 下代入的结果记为 ϕ^σ。无穷模态语言的公式 $\bigwedge\Gamma$ 的代入可表示为：

$$(\bigwedge\Gamma)^\sigma=\bigwedge\{\gamma^\sigma:\gamma\in\Gamma\}$$

模态语言可被认为是谈论关系结构的语言。关系结构是由一个非空集合和该集合上的关系组成。在数学中常见的关系结构是偏序和线性序。一个集合 A 上的偏序 R 是满足如下条件的二元关系：

（1）（禁自返性）$\forall x\neg Rxx$。

（2）（传递性）$\forall xyz(Rxy\wedge Ryz\to Rxz)$。

一个线性序是偏序并且满足下面的可比较性质。

（3）$\forall xy(Rxy\vee x=y\vee Ryx)$。

自然数上的小于等于关系就是线性序。令 W 是非空集合。R 是 W 上的二元关系。定义一个关系序列如下：

$$R_0=\{(w,w): w\in W\};\ R_{n+1}=R\circ R_n$$

那么定义：

（1）R 的传递闭包 $R^{+}=\bigcup_{n>0}R_n$；

（2）R 的自返传递闭包 $R^{*}=\bigcup_{n\geqslant 0}R_n=R^{+}\cup R_0$。

这里 R^{+} 是包含 R 的最小传递关系；而 R^{*} 是包含 R 的最小自返传递关系。任给两个状态 u、v，$R^{+}uv$ 当且仅当存在从 u 到 v 的有穷长度的 R－序列，所谓 R 的传递闭包的作用就是使 R 中在有穷步之内可及的状态一步可及。

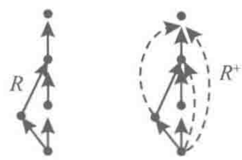


图 1.1

模态语言是基于模型的状态来解释的，一个模型以框架为基础。如下定义基本模态逻辑的关系语义，先来定义一些基本的概念，包括框架、模型、满足关系、有效性等。

定义 1.1 （1）对于基本模态语言，框架 $\mathfrak{F}=(W, R)$ 是一个关系结构，W 是一个非空集合，R 是 W 上的二元关系。W 中的元素称为可能世界、结点、状态等，R 称为状态之间的可及关系。

（2）对于基本模态语言，一个模型 $\mathfrak{M}=(\mathfrak{F}, V)$，其中，$\mathfrak{F}$ 是基本模态语言的框架，V 是一个赋值函数，给每个命题变元 p 指派 W 的子集 $V(p)$。模型 $\mathfrak{M}$ 称作基于框架 $\mathfrak{F}$ 的模型。

在该定义中，模型中的赋值 V 给每个命题变元指定一个可能世界的集合，在这些可能世界中 p 是真的。除此之外，对于无穷模态语言，这些模型和框架的定义也同样适用，只是增加了无穷合取和无穷析取，模态概念也相同。

下面定义一个公式在一个模型的状态上为真的概念，即定义满足关系。

定义 1.2 （满足关系）假设 w 是模型 $\mathfrak{M}=(W, R, V)$ 的一个状态。递归定义一个公式 ϕ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中状态 w 上真或满足如下：

（1）$\mathfrak{M}, w\vDash p$ 当且仅当 $w\in V(p)$，对每个命题变元 $p\in\Phi$；

（2）$\mathfrak{M}, w\vDash\neg\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, w\nvDash\phi$；

（3）$\mathfrak{M}, w\vDash\phi\vee\psi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, w\vee\phi$ 或 $\mathfrak{M}, w\vDash\psi$；

（4）$\mathfrak{M}, w\vDash\Diamond\phi$ 当且仅当存在 v 使得 Rwv 并且 $\mathfrak{M}, w\vDash\phi$。

称一个公式 ϕ 在模型 $\mathfrak{M}$ 上全局真（记号：$\mathfrak{M}\vDash\phi$），如果对 $\mathfrak{M}$ 中每个状态 w 有 $\mathfrak{M}, w\vDash\phi$。称 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 中可满足，如果存在 $\mathfrak{M}$ 中的状态 w 使 $\mathfrak{M}, w\vDash\phi$。

根据必然算子□的定义，显然有 $\mathfrak{M}, w\vDash\Box\phi$ 当且仅当对所有 $v\in W$，如果

Rwv，那么 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \phi$。任给公式集 Γ，定义 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Gamma$（公式集 Γ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中状态 w 上可满足）当且仅当对每个公式 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \gamma$。对于无穷模态语言的公式 $\bigwedge \Gamma$，$\mathfrak{M}$，$w \vDash \bigwedge \Gamma$ 当且仅当 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Gamma$。

根据上面的定义，在模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 中，对每个公式 ϕ，可以计算使它真的可能世界或状态的集合 $V(\phi) := \{w \in W: \mathfrak{M}, w \vDash \phi\}$。

定义 1.3 令 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 是一个框架，$\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 是一个模型，$\mathfrak{C}$ 是一个框架类。对任意一个公式 ϕ，定义有效性概念：

（1）如果对 $\mathfrak{F}$ 上的每一个赋值 V，$\mathfrak{F}$，V，$w \vDash \phi$，那么称 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 中的状态 w 上是有效的（记作 $\mathfrak{F}$，$w \vDash \phi$）。

（2）如果对 $\mathfrak{F}$ 上每个状态 w，$\mathfrak{F}$，$w \vDash \phi$，那么称公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上是有效的（记作 $\mathfrak{F} \vDash \phi$）。

（3）如果对每个框架 $\mathfrak{F} \in \mathfrak{C}$，$\mathfrak{F} \vDash \phi$，那么称公式 ϕ 在框架类 $\mathfrak{C}$ 上是有效的（记作 $\mathfrak{C} \vDash \phi$）。

例 1.1 （1）公式 $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ 在所有框架上是有效的。任给模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和该模型中的状态 w，假设 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box(p \to q)$ 且 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box p$。要证 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box q$。假设 Rwv，那么 $\mathfrak{M}$，$w \vDash p \to q$ 且 $\mathfrak{M}$，$w \vDash p$，所以 $\mathfrak{M}$，$w \vDash q$。所以 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box q$。

（2）令 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 是自返框架，即 W 中每个状态 w 都是自返的（Rww）。那么 $\mathfrak{F} \vDash \Box p \to p$。任给框架 $\mathfrak{F}$ 上的模型 $\mathfrak{M}$ 和任意状态 w，要证 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box p \to p$。假设 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box p$。因为 Rww，所以 $\mathfrak{M}$，$w \vDash p$。所以 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box p \to p$。

（3）令 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 是对称框架，即任给 W 中状态 w 和 v，如果 Rwv，那么 Rvw。证明 $\mathfrak{F} \vDash p \to \Box \Diamond p$。任给框架 $\mathfrak{F}$ 上的模型 $\mathfrak{M}$ 和任意状态 w，要证 $\mathfrak{M}$，$w \vDash p \to \Box \Diamond p$。假设 $\mathfrak{M}$，$w \vDash p$。假设 Rwv，只需证 $\mathfrak{M}$，$v \vDash \Diamond p$。由对称性得 Rvw，又因为 $\mathfrak{M}$，$w \vDash p$，所以 $\mathfrak{M}$，$v \vDash \Diamond p$。

（4）令 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 是传递的，即任给状态 w、u 和 v，如果 Rwu 且 Ruv，那么 Rwv。证明 $\mathfrak{F} \vDash \Box p \to \Box\Box p$。任给框架 $\mathfrak{F}$ 上模型 $\mathfrak{M}$ 和状态 w，要证 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box p \to \Box\Box p$。假设 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box p$。假设 Rwu，只需证 $\mathfrak{M}$，$u \vDash \Box p$。再设 Ruv，只需证 $\mathfrak{M}$，$v \vDash p$。由传递性得 Rwv，由 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \Box p$ 得 $\mathfrak{M}$，$v \vDash p$。

上面定义了基本（无穷）模态语言的句法和语义。下面将在基本模态语言中引入常见的正规模态逻辑系统。一个模态逻辑系统是含有全部命题重言式的代入个例、并在分离规则和代入规则下封闭的公式集合。

定义 1.4 在基本模态语言中，极小正规模态系统 K 包含下面的公理和推理规则：

（1）所有命题重言式的个例；

（2）$\Box(p\to q)\to(\Box p\to\Box q)$；

（3）$\Diamond p\leftrightarrow\neg\Box\neg p$；

（4）MP：从 ϕ 和 $\phi\to\psi$ 推出 ψ；

（5）Gen：从 ϕ 推出 $\Box\phi$；

（6）Sub：对于任意的代入 σ，从 ϕ 推出 ϕ^σ。

对任意的框架类（或模型类）C，任给推理规则 $IR:=\{\phi_1,\cdots,\phi_n\}/\phi$，若 $\{\phi_1,\cdots,\phi_n\}$ 中的每一个公式在 C 上是有效的蕴涵 ϕ，在 C 上也有效，则称 IR 保持 C－有效性。

定义 1.5 若存在有穷的公式序列 $\phi_1,\cdots,\phi_n$，使得 $\phi_n=\phi$，且每一个 ϕ_i 要么是 K 系统的公理，要么是从前面的公式运用推理规则 MP、Gen 或 Sub 得到的，则公式 ϕ 称为系统 K 的定理，记作：$\vdash_K\phi$。用 Thm(K) 来表示系统 K 的定理集合，$\text{Thm}(K)=\{\phi:\vdash_K\phi\}$。有时也可以把 Thm(K) 称作正规模态逻辑 K。

定义 1.6 基本模态语言中的正规模态逻辑，是一个公式集 L 使得 $\text{ThmK}\subseteq L$，且 L 在 MP 规则、Gen 规则和 Sub 规则下封闭。每一个正规模态逻辑都能表示为：$L=K\oplus\Gamma$，其中 Γ 是公式集，$\oplus$表示 L 在 MP、Gen 和 Sub 下封闭。

例 1.2 在 K 中证明，若 $\phi\to\psi$ 是 K－定理，则$\Box\phi\to\Box\psi$ 是 K－定理。

证明：假设 $\phi\to\psi$ 是 K－定理。根据 Gen 规则可得：$\Box(\phi\to\psi)$。根据 K－公理代换和 MP 规则可得：$\Box\phi\to\Box\psi$ 是 K－定理。

例 1.3 在 K 系统中证明定理：$\Box(p\land q)\to\Box p\land\Box q$。

证明：	[1] $p\land q\to p$	命题重言式
	[2] $p\land q\to q$	命题重言式
	[3] $\Box(p\land q)\to\Box p$	根据例 1.1：[1]
	[4] $\Box(p\land q)\to\Box q$	根据例 1.1：[2]
	[5] $\Box(p\land q)\to\Box p\land\Box q$	后件合取：[3]，[4]

例 1.4 令 $KL=K\Box\oplus(\Box p\to p)\to\Box p$（称为 Löb 公理）。那么在 KL 中可以如下推导定理：$\Box p\to\Box\Box p$。

证明：	[1] $p\to((\Box p\land\Box\Box p)\to(p\land\Box p))$	命题重言式
	[2] $\Box p\to\Box((\Box p\land\Box\Box p)\to(p\land\Box p))$	根据例 1.2：[1]
	[3] $\Box((\Box p\land\Box\Box p)\to(p\land\Box p))\to$ $\Box(p\land\Box p)$	Löb 公理代换
	[4] $\Box p\to\Box(p\land\Box p)$	蕴涵传递律：[3]，[4]
	[5] $\Box(p\land\Box p)\to\Box p\land\Box\Box p$	例 1.3：代换
	[6] $\Box p\to\Box p\land\Box\Box p$	蕴涵传递律：[4]，[5]
	[7] $\Box p\land\Box\Box p\to\Box\Box p$	合取消去律

[8] $\Box p \to \Box\Box p$　　　　蕴涵传递律：[6]，[7]

通常还可在系统 K 中定义从前提集推导的概念：$\Gamma \vdash_K \phi$，若存在有穷公式序列 ϕ_1，…，ϕ_n，使得 $\phi_n = \phi$，并且每一个 ϕ_i，要么是公理，要么 $\phi_i \in \Gamma$，要么是从前面的公式运用推理规则 MP、Gen 或 Sub 得到的。但在该定义下，通常的演绎定理不成立。有如下反例：根据推导的定义，可得 $p \vdash_K \Box p$。但是，$p \to \Box p$ 不是 K 的定理。一般来说，模态逻辑的演绎定理如下：令 ϕ_1，…，ϕ_n 是从前提集的推导。若 $k = i$ 或者 ϕ_k 是从至少一次依赖于 ϕ_i 的公式通过 MP 或 Gen 推出来的，则称公式 ϕ_k 在这个推导中依赖于公式 ϕ_i。因此，下面的定理成立。

定理 1.1　（模态逻辑 K 的演绎定理）假设 $\Gamma, \psi \vdash_K \phi$，并且存在 ϕ 从前提集 $\Gamma \cup \{\psi\}$ 的推导，使得推理规则 Gen 只用于 $m \geqslant 0$ 次依赖 ψ 的公式。则 $\Gamma \vdash_K \Box^0\psi \wedge \cdots \wedge \Box^m\psi \to \phi$，这里的 $\Box^i$ 表示 i 个 $\Box$，对于每一个 $0 \leqslant i \leqslant m$。

此外，给定框架类 C，称 $\mathrm{LogC} = \{\phi: \mathrm{C} \vDash \phi\}$ 为框架类 C 的逻辑。这是另一种引入正规模态逻辑的方式，把一个框架类上的所有有效公式集称为一个正规模态逻辑。

定理 1.2　$\mathrm{ThmK} \subseteq \mathrm{LogC}$ 对任意非空框架类 C 成立，即每个 LogC 是一个正规模态逻辑。

证明：只需验证公理 $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ 和 $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ 在任何框架上均有效，并且推理规则 MP、Gen 和 Sub 均保持框架类有效性，即对任何框架类 C，它们都保持 C－有效性。这里只证明 Sub 规则保持有效性。首先对公式的构造归纳，可以证明下面的命题（＊）：

（＊）给定模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和公式 ϕ，令 ϕ' 是使用 ψ_i 分别代入 ϕ 中命题变元 p_i 得到的结果。$\mathfrak{M}' = (W, R, V')$ 是一个模型，其中对每个 $w \in W$，$w \in V'(p_i)$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, w \vDash \psi_i$。那么 $\mathfrak{M}, w \vDash \phi'$ 当且仅当 $\mathfrak{M}', w \vDash \phi$。

那么对任何框架 $\mathfrak{F}$，假设 $\mathfrak{F} \vDash \phi$。对任意代入 σ，显然可以得到公式 $\phi' = \phi^\sigma$。再假设 $\mathfrak{F} \nvDash \phi'$，那么存在 $\mathfrak{F}$ 上的模型 $\mathfrak{M}$ 和状态 w 使得 $\mathfrak{M}, w \nvDash \phi'$。对于（＊）定义的模型 $\mathfrak{M}'$，显然有 $\mathfrak{M}', w \nvDash \phi$，因此，$\mathfrak{F} \nvDash \phi$，矛盾。

与推导的概念相对应，可以定义逻辑后承关系（$\sum \vDash \phi$）。在模态逻辑中，逻辑后承关系有不同的意义，分为局部逻辑后承关系和全局逻辑后承关系[①]。

定义 1.7　给定一个结构类 S（框架类或模型类），令 $\sum$ 是公式集合，ϕ 是公式。

---

① Kracht, M., Modal Consequence Relations. In: *Handbook of Modal Logic*, ed. by Blackburn P., van Benthem J. and Wolter F. Elsevier, 2007. 491－548.

(1) 如果对 S 上的所有模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 中的所有状态 w，$\mathfrak{M}$，$w \vDash \sum$ 蕴涵 $\mathfrak{M}$，$w \vDash \phi$，那么称 ϕ 为 $\sum$ 相对于 S 的局部逻辑后承。

(2) 如果对 S 中的每个元素 S，$S \vDash \sum$ 蕴涵 $S \vDash \phi$，那么称 ϕ 为 $\sum$ 相对于 S 的全局逻辑后承。

局部逻辑后承关系与全局逻辑后承关系不同。考虑公式 p 和 $\Box p$。显然，在所有模型组成的模型类上，$\Box p$ 不是 p 的局部逻辑后承。任给模型 $\mathfrak{M}=(W, R, V)$，其中 $W=\{x, y\}$，$R=\{(x, y)\}$，$V(p)=\{x\}$。显然 $\Box p$ 在 x 上是假的，所以 $\Box p$ 不是 p 的局部逻辑后承。但 $\Box p$ 是 p 的全局逻辑后承，因为若 $\mathfrak{M} \vDash \phi$ 则 $\mathfrak{M} \vDash \Box \phi$。但局部逻辑后承的概念与全局逻辑后承的概念之间有一定联系，从模型类上看，可用局部后承关系表示全局后承关系。

命题 1.1 令 Γ 为公式的集合，ϕ 是一个基本模态公式，$\mathfrak{M}$ 是一个由所有模型组成的模型类。ϕ 是 Γ 相对于 $\mathfrak{M}$ 的全局逻辑后承当且仅当 ϕ 是 $\{\Box^n \gamma: \gamma \in \Gamma$ 并且 $n \in \omega\}$ 相对于 $\mathfrak{M}$ 的局部逻辑后承。

证明：假设 ϕ 是 $\{\Box^n \gamma: \gamma \in \Gamma$ 并且 $n \in \omega\}$ 相对于 $\mathfrak{M}$ 的局部逻辑后承。令 $\mathfrak{M}$ 是一个模型，使得 $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$，则对于每一个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $n \in \omega$，$\mathfrak{M} \vDash \Box^n \gamma$，因此，$M \vDash \phi$。反之，假设 ϕ 是 Γ 相对于 $\mathfrak{M}$ 的全局逻辑后承。任给模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 中的状态 x，设 $\mathfrak{M}$，$x \vDash \{\Box^n \gamma: \gamma \in \Gamma$ 且 $n \in \omega\}$。由 x 生成 $\mathfrak{M}$ 的子模型 $\mathfrak{N}$（参见定义 3.28），根据命题 3.29，基本模态公式在生成子模型下是不变的，因此，$\mathfrak{N} \vDash \Gamma$，所以，$\mathfrak{N} \vDash \phi$。因此，$\mathfrak{N}$，$x \vDash \phi$，所以 $\mathfrak{M}$，$x \vDash \phi$。

在极小正规模态逻辑系统 K 的基础上增加不能在 K 中推导出来的公理，就可以生成新的正规模态逻辑。任给公式集 Γ，令 $\mathrm{K} \oplus \Gamma$ 是以 Γ 中的公式为公理加到 K 上而得到的正规模态逻辑系统。先看如下几个系统之间的关系，如图 1.2 所示。

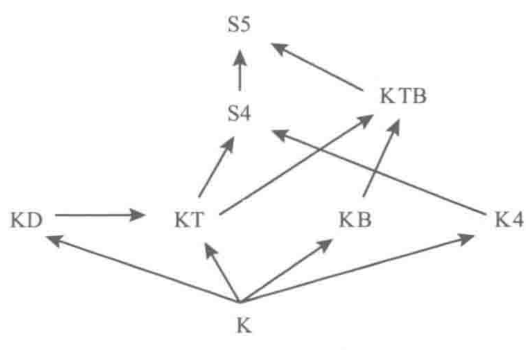


图 1.2 系统之间的关系

其中公理D、T、B、4、5定义如下：

D：$=\Diamond\top$

T：$=\Box p\rightarrow p$

4：$=\Box p\rightarrow\Box\Box p$

5：$=\Diamond p\rightarrow\Box\Diamond p$

B：$=p\rightarrow\Box\Diamond p$

在图1.2中，$\mathrm{S4}=\mathrm{K}\oplus\mathrm{T}\oplus 4$ 并且 $\mathrm{S5}=\mathrm{K}\oplus\mathrm{T}\oplus 5=\mathrm{K}\oplus\mathrm{T}\oplus\mathrm{B}\oplus 4$。

称一个逻辑 $\mathrm{L}\subseteq\mathrm{L}'$（L包含于 L'，或者称 L' 是L的扩张），如果所有L－定理都是 L'－定理；如果 $\mathrm{L}\subseteq\mathrm{L}'$ 并且 $\mathrm{L}\neq\mathrm{L}'$，那么称 L' 是L的真扩张。图1.2中的箭头方向都是真扩张。我们只证明S4是K4的真扩张。显然由于S4＝K.T.4，所以S4是K4的扩张。只需要证明 $\mathrm{S4}\neq\mathrm{K4}$，即只需要证明S4的某个定理不是K4的定理。如证明T不是K4－的定理。使用如下引理证明。

引理1.1 对任意框架 $\mathfrak{F}=(W,R)$，$\mathfrak{F}\models\Box p\rightarrow\Box\Box p$ 当且仅当 R 是传递的。

证明：假设 R 是传递的，证明 $\mathfrak{F}\models\Box p\rightarrow\Box\Box p$。任给 $\mathfrak{F}$ 上的赋值 V 和状态 x，假设 $\mathfrak{F}, V, x\models\Box p$。要证明 $\mathfrak{F}, V, x\models\Box\Box p$。任给状态 y、z，使得 Rxy 并且 Ryz，显然 $\mathfrak{F}, V, z\models p$，因为根据 R 的传递性有 Rxz。所以 $\mathfrak{F}, V, x\models\Box\Box p$。

反之，假设 $\mathfrak{F}\models\Box p\rightarrow\Box\Box p$。要证明 R 是传递的，任给状态 x、y、z，假设 Rxy 并且 Ryz，要证明 Rxz。令 $V(p)=\{u: Rxu\}$。所以 $\mathfrak{F}, V, x\models\Box p$。根据假设可得：$\mathfrak{F}, V, x\models\Box p\rightarrow\Box\Box p$。所以 $\mathfrak{F}, V, x\models\Box\Box p$。因为 Rxy 并且 Ryz，所以 $\mathfrak{F}, V, z\models p$。所以 $z\in V(p)$，即 Rxz。

因此，K4的所有定理在传递框架上是有效的。所以，要证明T不是K4－的定理，只需要构造一个传递框架，使得T在该框架上不是有效的。满足该条件的最简单的框架为单死点框架，即

$$\cdot\quad x$$

首先，这个框架是传递的，它空洞地满足传递性的条件。其次，令所有命题变元在 x 上是真的。那么 $x\models p$，但是 $x\not\models\Diamond p$，因为 x 没有后继状态，所以T在 x 上不是有效的。一般来说，对于公理D、T、B、5都存在类似于引理3.15的结果。

命题1.2 对任意框架 $\mathfrak{F}=(W,R)$，

（1）$\mathfrak{F}\models\Diamond\top$ 当且仅当 R 是持续的（$\forall x\exists yRxy$）。

（2）$\mathfrak{F}\models p\rightarrow\Diamond p$ 当且仅当 R 是自返的（$\forall xRxx$）。

（3）$\mathfrak{F}\models p\rightarrow\Box\Diamond p$ 当且仅当 R 是对称的（$\forall xy(Rxy\rightarrow Ryx)$）。

（4）$\mathfrak{F}\models\Diamond p\rightarrow\Box\Diamond p$ 当且仅当 R 是欧性的（$\forall xyz(Rxy\wedge Rxz\rightarrow Ryz)$）。

证明：

（1）假设 R 是持续的。任给 $\mathfrak{F}$ 上的赋值 V 和状态 x，因为存在 y 使得 Rxy 并且 $y \Vdash \top$，所以 $x \Vdash \Diamond\top$。反之，假设 $\mathfrak{F} \Vdash \Diamond\top$。任给状态 x，给定赋值使得所有命题变元在 x 上假。那么 $x \Vdash \Diamond\top$，因此，存在 y 使得 Rxy。

（2）假设 R 是自返的，证明 $\mathfrak{F} \Vdash p \to \Diamond p$。任给 $\mathfrak{F}$ 上的赋值 V 和状态 x，假设 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash p$，显然有 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash \Diamond p$。反之假设 $\mathfrak{F} \Vdash p \to \Diamond p$。要证明 R 是自返的，任给状态 x，令 $V(p) = \{x\}$。所以 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash p$。根据假设可得：$\mathfrak{F}, V, x \Vdash p \to \Diamond p$，所以 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash \Diamond p$。存在 y 使得 Rxy 并且 $\mathfrak{F}, V, y \Vdash p$。所以 $y \in V(p)$，即 $y = x$，所以 Rxx。

（3）假设 R 是对称的，证明 $\mathfrak{F} \Vdash p \to \Box\Diamond p$。任给 $\mathfrak{F}$ 上赋值 V 和状态 x，设 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash p$。任给状态 y，设 Rxy。由对称性得 Ryx，所以 $y \Vdash \Diamond p$。所以 $x \Vdash \Box\Diamond p$。反之，设 $\mathfrak{F} \Vdash p \to \Box\Diamond p$。要证 R 对称，任给状态 x，假设 Rxy。令 $V(p) = \{x\}$。所以 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash p$。由假设得 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash p \to \Box\Diamond p$。所以 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash \Box\Diamond p$。因为 Rxy，所以 $\mathfrak{F}, V, y \Vdash \Diamond p$。所以有 z 使 Ryz 且 $z \in V(p)$，即 Ryx。

（4）假设 R 是欧性的，证明 $\mathfrak{F} \Vdash \Diamond p \to \Box\Diamond p$。任给 $\mathfrak{F}$ 上的赋值 V 和状态 x，假设 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash \Diamond p$。存在 y 使得 Rxy 并且 $y \Vdash p$。任给状态 z，假设 Rxz。根据欧性得 Rzy，所以 $z \Vdash \Diamond p$。所以 $x \Vdash \Box\Diamond p$。反之，假设 $\mathfrak{F} \Vdash \Diamond p \to \Box\Diamond p$。要证明 R 是欧性的，任给状态 x、y、z，假设 Rxy 并且 Rxz。令 $V(p) = \{z\}$。所以 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash \Diamond p$。由假设得 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash \Diamond p \to \Box\Diamond p$。所以 $\mathfrak{F}, V, x \Vdash \Diamond p$。因为 Rxy，所以 $\mathfrak{F}, V, y \Vdash \Diamond p$。所以存在 u 使 Ryu 且 $u \in V(p)$，即 Ryz。

表1.1列出了一些常见的正规模态逻辑，在这些逻辑中，除了S4.1的特征模态公理 $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$（称为Mckinsey公理）、GL的特征模态公理 $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ 和Grz的特征模态公理 $\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$ 在框架上没有一阶对应条件，其他公式都有一阶对应条件。下一节我们在模态对应理论的背景下证明其中一些问题。

D	=	$K \oplus \Diamond\top$
T	=	$K \oplus p \to \Diamond p$
KB	=	$K \oplus p \to \Box\Diamond p$
K4	=	$K \oplus \Box p \to \Box\Box p$
K5	=	$K \oplus \Diamond\Box p \to \Box p$
Alt_n	=	$K \oplus \Box p_1 \vee \Box(p_1 \to p_2) \vee \cdots \vee \Box(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \to p_{n+1})$
S4	=	$K4 \oplus p \to \Diamond p$
GL	=	$K4 \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p$

For	=	K4$\oplus p$
Grz	=	K$\oplus\Box(\Box(p\to\Box p)\to p)\to p$
S4.1	=	S4$\oplus\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p$
S4.2	=	S4$\oplus\Diamond\Box p\to\Box\Diamond p$
S4.3	=	S4$\oplus\Box(\Box p\to q)\vee\Box(\Box q\to p)$
Triv	=	K4$\oplus\Box p\leftrightarrow p$
Ver	=	K4$\oplus\Box p$
S5	=	S4$\oplus p\to\Box\Diamond p$

图 1.3　常见的正规模态逻辑

1.2　模态对应理论

模态语言的公式在框架上对应着一些条件，其中有一些模态公式对应的条件是一阶可定义的。如 T 公理对应自返性，4 千米对应传递性，5 千米对应欧性等，这些框架性质都可使用一阶公式来定义。由此引入模态语言与一阶语言之间的对应问题。

在模态逻辑的模型论研究中，约翰·范·本特姆（J. van Benthem）创立了对应理论，他用一阶逻辑或二阶逻辑等经典逻辑理论来研究模态逻辑。该研究思路是把模态语言看作谈论关系结构的一种语言，而把模态词看作是特殊的量词。给定一个模型 $\mathfrak{M}=(W, R, V)$ 和 $\mathfrak{M}$ 中的状态 w，若在 w 的后继状态集合中存在一个元素 v，使得公式 ϕ 在 v 上真，则公式 $\Diamond\phi$ 在 w 上真。根据对可能算子 $\Diamond$ 的这种语义解释，$\Diamond$ 相当于是给定状态的后继状态集合上的存在量词，相应的，必然算子 $\Box$ 相当于是给定状态的后继状态集合上的全称量词。因此，可给出一种经典（一阶或二阶）逻辑的语言，把模态语言翻译到该语言。对于基本模态语言 ML$(\Phi, \Diamond)$，如下定义一阶语言 $L_1(\Phi)$ 和二阶语言 $L_2(\Phi)$。

定义 1.8　一阶语言 $L_1(\Phi)$ 含如下初始符号：

（a）个体变元：v_0，v_1，…（用 x、y、z 等表示）；

（b）一元谓词符号：P_0，P_1，…（用 P、Q 等表示），这里每个一元谓词符号 P_i 对应于基本模态语言 ML$(\Phi, \Diamond)$ 的命题变元 p_i；

（c）二元关系符号：R；

（d）逻辑符号：$\forall$、$\exists$（量词），$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$（命题联结词）。

一阶语言 $L_1(\Phi)$ 的公式按如下规则形成：

$$\phi ::= Px \mid Rxy \mid \neg\phi \mid \phi\wedge\psi \mid \forall x\phi$$

定义 1.9 二阶语言 $L_2(\Phi)$ 是在一阶语言 $L_1(\Phi)$ 基础上允许量词约束一元谓词变元得到的。它的公式按如下规则形成：

$$\phi ::= Px \mid Rxy \mid \neg\phi \mid \phi\wedge\psi \mid \forall x\phi \mid \forall P\phi$$

按一阶语言的观点，模态逻辑的模型 $M=(W, R, V)$ 可看作一个一阶结构，这里 W 是一个个体域，R 是 W 上的一个二元关系，用来解释相应的二元关系符号 R。对每一个 $p\in\Phi$，用集合 $V(p)$ 解释一元谓词符号 P。这样可得到一阶结构，因此，就能使用一阶语言谈论关系结构。

按二阶语言的观点，可把一个模态框架 $\mathfrak{F}=(W, R)$ 看作一个二阶结构，对于每一个一元谓词变元 P 指派 W 的子集。考虑框架有效这一概念，若对框架 F 上的每一个赋值 V，在模型 $(\mathfrak{F}, V)$ 中的每一个状态上，ϕ 都真，则 ϕ 在框架 F 上有效。这里，需要量词和变元来说明每个赋值的意义，即需要二阶量词。

在模型层次上，真和有效的概念是一阶概念，其中所需使用的量词是一阶的。这样，从而可把模态语言翻译到一阶语言，并建立模态语义概念和一阶语义的概念之间的对应关系。但框架上的有效性是二阶概念。下面定义一阶标准翻译把所有模态公式翻译到一阶语言 $L_1(\Phi)$ 的公式。

定义 1.10 对每个模态公式 ϕ 和变元 x、y，下面递归定义标准翻译 $\pi(\phi, x)$：

对每一个 $p\in\Phi$，$\pi(p, x)=Px$ 对每一个 $p\in\Phi$，$\pi(p, y)=Py$

$\pi(\neg\phi, x)=\neg\pi(\phi, x)$ $\pi(\neg\phi, y)=\neg\pi(\phi, y)$

$\pi(\phi\vee\psi, x)=\pi(\phi, x)\vee\pi(\psi, x)$ $\pi(\phi\vee\psi, y)=\pi(\phi, y)\vee\pi(\psi, y)$

$\pi(\Diamond\phi, x)=\exists y(Rxy\wedge\pi(\phi, y))$ $\pi(\Diamond\phi, y)=\exists x(Ryx\wedge\pi(\phi, x))$

用该标准的翻译可交替使用变元 x 和 y，把每一个模态公式翻译为一阶逻辑的两变元片段 FO^2，也就是只使用两个变元的一阶逻辑片段。该翻译过程中的重要问题是，在一个公式中出现多个叠置模态词时，由于不同的量词约束不同的变元，只需使用两个变元，下面的例子说明这一点。

例 1.5 模态公式 $\Diamond\Diamond\Diamond p$ 和 $\Box\Box\Box p$ 的一阶翻译：

$$\begin{aligned}\pi(\Diamond\Diamond\Diamond p, x) &= \exists y(Rxy\wedge\pi(\Diamond\Diamond p, y))\\ &= \exists y(Rxy\wedge\exists x(Ryx\wedge\pi(\Diamond p, x)))\\ &= \exists y(Rxy\wedge\exists x(Ryx\wedge\exists y(Rxy\wedge Py)))\\ \pi(\Box\Box\Box p, x) &= \forall y(Rxy\rightarrow\pi(\Box\Box p, y))\\ &= \forall y(Rxy\rightarrow\forall x(Ryx\rightarrow\pi(\Box\Box p, x)))\\ &= \forall y(Rxy\rightarrow\forall x(Ryx\rightarrow\forall y(Rxy\rightarrow Py)))\end{aligned}$$

还可以定义一个模态公式的二阶翻译。任给公式 $\phi(p_1, \cdots, p_n)$，上面定义

的二阶对应语言的翻译定义为$\forall P_1\cdots P_n\pi(\phi, x)$。称一个一阶公式$\alpha$与模态公式$\phi$在框架上对应，如果对任何框架$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}\models\alpha$当且仅当$\mathfrak{F}\models\phi$。更一般的概念是框架类的可定义性。

定义 1.11 称一个框架类C是一阶可定义的，如果存在一阶公式集$\sum$使得对任何框架$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}\in$ C当且仅当$\mathfrak{F}\models\sum$。称C是模态可定义的，如果存在模态公式集Γ，使得对任何框架$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}\in$ K当且仅当$\mathfrak{F}\models\Gamma$。

一阶公式α与模态公式ϕ在框架上对应当且仅当α定义框架类$\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F}\models\phi\}$，当且仅当$\phi$定义框架类$\{\mathfrak{F}: \mathfrak{F}\models\alpha\}$。在模态逻辑中，著名的Sahlqvist对应定理就是从句法上定义模态公式，使这些模态公式的一阶对应条件存在，并且可以按照特定的算法计算这些对应条件。这是对应理论的主要结论之一。

称一个模态公式ϕ与带一个自由变元的一阶公式$\alpha(x)$局部框架对应，如果对任何框架$\mathfrak{F}$和状态w，$\mathfrak{F}$，$w\models\phi$当且仅当$\mathfrak{F}\models\alpha(x)$。

称一个模态公式ϕ是肯定（否定）公式，如果ϕ中出现的所有命题变元都是在偶数（奇数）个否定符号的范围中。

称形如$\Box^n p$的公式为必然原子。一个Sahlqvist前件是从$\perp$、$\top$、必然原子、否定公式使用$\wedge$、$\vee$、$\Diamond$构造的公式。一个Sahlqvist蕴涵式是$\phi\to\psi$，其中ψ是正公式，ϕ是一个Sahlqvist前件。

引理 1.2 令ϕ和ψ是模态公式。

（1）如果ϕ局部对应于一阶公式$\alpha(x)$，那么$\Box^n\phi$局部对应于一阶公式$\forall y(R^n xy\to\alpha[y/x])$。

（2）如果ϕ（局部）对应于一阶公式α并且ψ（局部）对应于一阶公式β，那么$\phi\wedge\psi$（局部）对应于一阶公式$\alpha\wedge\beta$。

（3）如果ϕ局部对应于一阶公式α，ψ局部对应于一阶公式β，ϕ与ψ没有共同的命题变元，那么$\phi\vee\psi$（局部）对应于一阶公式$\alpha\vee\beta$。

定理 1.3 令ξ是一个Sahlqvist公式。那么ξ局部对应于某个一阶公式$\alpha_\xi(x)$，并且这个一阶公式可以自动计算出来。

证明：根据引理1.22，不妨假设$\xi := \phi\to\psi$为Sahlqvist的蕴涵式。如下计算它的局部一阶对应公式：

第一步：提出可能算子。首先，应用等值式：

$$((\alpha\vee\beta)\to\gamma)\leftrightarrow(\alpha\to\gamma)\wedge(\beta\to\gamma)$$

$$\forall x_1, \cdots, x_n(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\forall x_1, \cdots, x_n\alpha\wedge\forall x_1, \cdots, x_n\beta)$$

把$\phi\to\psi$的标准二阶翻译整理为如下形式：

$$\forall P_1\cdots P_n\forall x_1\cdots x_m(\mathrm{REL}\wedge\mathrm{BOX-AT}\wedge\mathrm{NEG}\to\pi(\psi, x))$$