

几何原本

Euclid's
Elements

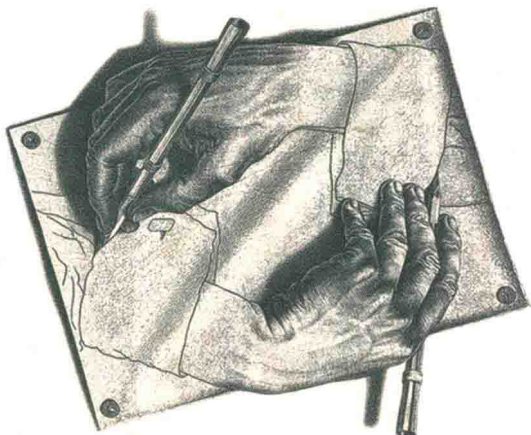
全新修订版

13卷全本。5个公设、5个公理，23条定义，描述完美空间秩序，揭示了宇宙“本基”

上帝安排空间秩序的方案之书

〔古希腊〕欧几里得 / 著

雷常茂 / 译



四川人民出版社

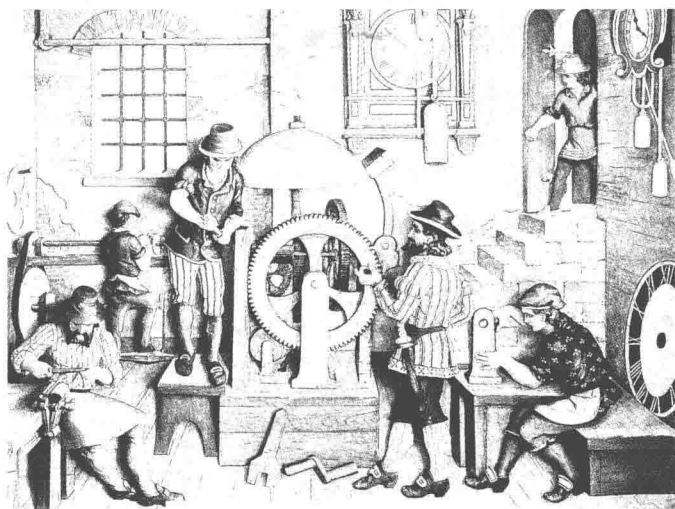
Euclid's
Elements

全新修订版

几何原本

〔古希腊〕欧几里得 / 著

雷常茂 / 译



四川人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

几何原本 / (古希腊) 欧几里得著; 雷常茂译.
—成都: 四川人民出版社, 2018.8
ISBN 978-7-220-10831-0

I. ①几… II. ①欧… ②雷… III. ①欧氏几何
IV. ①O184

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第136834号

JIHEYUANBEN

几何原本

[古希腊] 欧几里得 著 雷常茂 译

责任编辑
封面设计
版式设计
责任印制

章 涛
日日新
曲 丹
李 剑

出版发行
网 址
E-mail
新浪微博
微信公众号
发行部业务电话
防盗版举报电话
照 排
印 刷
成品尺寸
印 张
字 数
版 次
印 次
书 号
定 价

四川人民出版社(成都槐树街2号)
<http://www.scpph.com>
scrmcbs@sina.com
@四川人民出版社
四川人民出版社
(028) 86259624 86259453
(028) 86259624
曲 丹
重庆市国丰印务有限责任公司
170mm × 240mm
44.75
700千
2018年8月第1版
2018年8月第1次印刷
ISBN 978-7-220-10831-0
88.00 元

■ 版权所有·侵权必究

本书若出现印装质量问题, 请与我社发行部联系调换
电话: (028) 86259453

数学是一个高贵的世界，即使身为世俗的君主在这里也毫无特权。与在时间中速朽的物质相比，数学所揭示的世界才是永恒的。

古希腊数学直接脱胎于哲学，它使用各种可能的描述，解析我们的宇宙，使它不致混沌、分离；它建立起物质与精神世界的确定体系，致使渺小如人类也能从中获得些许自信。

被称为“几何之父”的古希腊数学家欧几里得，他所著的《几何原本》是哲学意义上的几何，它完全有别于起源并应用于世俗计算的中国数学和古埃及数学。

在本书里，欧几里得建立了人类历史上第一座宏伟的演绎推理大厦，利用很少的自明公理、定义，推演出四百余个命题，将人类的理性之美展现到了极致。欧几里得坚信，物质、宇宙、空间和人的精神之中存在着一种超然于一切的形式之美，他设定“点、线、面、角”为一切存在的始基，因为在他的世界里，脱离空间之物是不存在的。万物的根本关系是数量关系，找到这些数量关系，就找到了从现实世界通往神界的道路。

欧几里得在哲学上信任原子论。以德谟克里特为代表的原子论学派认为，线段、面积和立体是由许多不可再分的原子所构成，计算面积和体积等于将这些原子集合起来。所以根据欧几里得的个人动机，他的《几何原本》与其说是数学叙述，不如说是他寻找宇宙始基的哲学叙述。汉语“几何”为“多少”的数量关系，与“万物之始基”这一意义相去甚远，明代翻译家徐光启将希腊文的 $\epsilon\upsilon\kappa\lambda\epsilon\iota\delta\eta$ 译成“几何”，这有点舍本逐末，失掉了原汁。或许，译为“宇宙基本元素的数量关系”更为妥帖。

欧几里得把距离、角度转换成任意数维的坐标系，描绘出一幅有限维、实和内积空间的图景，欧氏空间也被理解为线性流形。

赫拉克利特和亚里士多德开启了逻辑理论以后，欧几里得创造了逻辑演绎的标本。几乎多数哲学家都相信，在逻辑里可以看到神的踪迹，柏拉图就直接把有理性思考的精神当成天国制品。一个有理性思考的人，其思考本身是具有神性的。这种理性是指对事物抽象性质进行判断与推理，也指思想、概念、理论、言辞、规律性。它们被黑格尔称为“绝对精神的掌握”，并以此揭示事物的本质。正因如此，《几何原本》从它诞生时起就被视为人类锻炼和培养逻辑理性的最杰出甚至唯一的教本，它也是这个世界所能找到的最美丽的逻辑剧本。

我还想对《几何原本》作以下描述：

它是一部关于事物秩序之书；空间理性的黑夜之书；一部想建立生活秩序的书；一部描述原子形态的书；一部试图找到宇宙“始基”的书；它是物质世界（甚至精神世界——根据柏拉图《理想国》）的表述方式，是对宇宙的终极解释。

我始终没将它作为数学教本来读，却引为歌剧、诗、哲学、宇宙之舞来欣赏。对优雅事物的欣赏，以抵抗单向度的混乱情景是那么必要；物质世界的协调，文化、精神的和谐是那么必要。希腊数学，是伟大的希腊人向宇宙秩序射出的光芒。希腊数学的精神，不同于美索不达米亚文明的数学，也不同于古埃及和中国数学，它对世俗的计算几乎不感兴趣，而是在寻找宇宙的基本构成和数量关系，也因此开创了通过自明的简单公理进行演绎推理得出结论的方法。也正因为如此，其气质华美高贵是其他民族的数学难以媲美的。希腊数学其实是世上最热情洋溢的诗篇。

我们已无法考察欧几里得的身世，只知道他给这个世界留下过一本书和两句话。第一句在本文开头说了，现在转述他的第二句。当欧几里得面对一位青年的质问“你的几何学有何用处”时，他的回答简洁而确定，他对身边的侍从说：“请给这小伙子三个硬币，因为他想从几何学里得到实际利益。”

如果欧几里得未能激发起你少年时代的科学热情，那么你一定不会是一个天才的科学家。

——爱因斯坦

一、欧几里得生平

欧几里得大约生活在公元前330—前275年。除《几何原本》外，还有不少著作，如《已知数》《纠错集》《圆锥曲线论》《曲面轨迹》《观测天文学》等。遗憾的是，除了《几何原本》以外，其余的都没有留存下来，消失在时空的黑暗之中。从某个意义上说，这就更增加了人类的黑暗。仅留世的《几何原本》，已让我们震撼了两千余年。

欧几里得的生平也已失传，据后世推断，他早年在雅典接受教育，熟知柏拉图的学说。公元前300年左右，受托勒密王（前364—前283年）之邀，他前往埃及统治下的亚历山大城工作，长期从事教学、研究和著述，涉猎数学、天文、光学和音乐等诸多领域。所著《几何原本》共有13卷，希腊文原稿业已失传，现存的是公元4世纪末西翁的修订本和18世纪在梵蒂冈图书馆发现的希腊文手抄原本。这部西方世界现存最古老的科学著作，为两千余年来用公理法^[1]建立演绎的数学体系找到了源头。德·摩根^[2]曾说，除了《圣经》，

[1] 公理法：选取少数不加定义的原始概念（基本概念）和无条件承认的思想规定（公理）作为出发点，再加以严格的逻辑推理，将其一数学分支建成演绎系统的方法，叫数学系统的公理化方法，简称“公理法”。

[2] 德·摩根：1806—1871年，英国数学家、逻辑学家。其主要在分析学、代数学、数学史及逻辑学等方面作出了重要的贡献。

再没有任何一种书像《原本》这样拥有如此众多的读者，被译成如此多种的语言。从1482年到19世纪末，《原本》的各种版本竟用各种语言出了1000版以上。明朝万历三十五年（1607年），徐光启和意大利传教士利玛窦把前六卷译成中文出版，定名为《几何原本》。“几何”这个数学名词就是这样来的。《几何原本》同时也是中国近代翻译的第一部西方数学著作。康熙皇帝将这个仅有前六卷的版本书当成智力玩具把玩了一生，但估计其理解也十分有限。

古籍中记载了两则故事，一则是说：托勒密国王问欧几里得，有没有学习几何学的捷径。欧几里得答道：“几何无王者之道。”意思是，在几何学里没有专门为国王铺设的大路。这句话成为千古传诵的箴言。另一则是说：一个学生才开始学习第一个命题，就问学了几何之后将得到些什么。欧几里得对身边的侍从说：“请给这小伙子三个硬币，因为他想从几何学里得到实际利益。”这两则故事，与他的光辉著作一样，具有高深的含义。

二、《几何原本》的贡献

《几何原本》从少量“自明的”定义、公理出发，利用逻辑推理^[1]的方法，推演出整个几何体系，选取少量的原始概念和不需证明的命题，作为定义^[2]、公设或公理^[3]，使它们成为整个体系的出发点和逻辑依据，然后

〔1〕逻辑推理：逻辑是人的一种抽象思维，是人通过概念、判断、推理、论证来理解和区分客观世界的思维过程。

逻辑推理是指把不同排列顺序的意识进行相关性的推导。当人类听到别人陈述的事情时，大脑开始历经复杂的信号处理及过滤，并将信息元素经过神经元迅速地触发并收集相关信息，这个过程便是超感知能力。之后由经验累积学习到的语言基础进行语言的处理及判断，找出“正确”（假设在一个相对统一概念的既定世界观范围内）的事件逻辑。

〔2〕定义：是认识主体使用判断或命题的语言逻辑形式，确定一个认识对象或事物在有关事物的综合分类系统中的位置和界限，使这个认识对象或事物从有关事物的综合分类系统中彰显出来的认识行为。

〔3〕公设或公理：指的是某门学科中不需要证明而必须加以承认的某些陈述或命题，即“不证自明”的命题。一门学科如果被表示成公理的形式，那么它的所有命题就可以由这些公理或公设逻辑地推证出来。如果我们把一门学科比作一幢大楼，那么该学科的公理或公设就像大楼的地基，整幢大楼必须以它为基础而建立起来。

运用逻辑推理证明其他命题。它成为了人类文明的一块瑰宝，创造了人类认识宇宙空间和宇宙数量关系的源头，是人类历史上的一部科学杰作。逻辑并不是欧几里得开创的，而是以另一个希腊天才亚里士多德为代表，他的著名的三段论，开创了逻辑的基本面貌，提出了逻辑的基本建构。欧几里得是第一个将三段论应用于实际知识体系构建的人，他铸造了一部完整的逻辑演绎体系。他构成了希腊理性最完美的纪念碑。

两千余年来，所有初等几何教科书以及19世纪以前一切有关初等几何的论著，都以《几何原本》作为依据。“欧几里得”成为几何学的代名词，并且人们把这种体系的几何学叫作“欧几里得几何学”。

《几何原本》对世界数学的贡献主要是：确立了数学的基本方法学。

①建立了公理演绎体系，即用公理、公设和定义的推证方法；②将逻辑证明系统地引入数学，确立了逻辑学的基本方法；③创造了几何证明的方法：分析法、综合法及归谬法。

相对《原本》中的几何知识而言，它所蕴含的方法论意义则更为重大。事实上，欧几里得本人对他的几何学的实际应用并不关心，他关心的是他的几何体系内在逻辑上的严密性。《原本》作为文化丰碑还在于，它为人类知识的整理、系统阐述提供了一种模式。从此，人类的知识建构，找到了一个有效的方法。整理为从基本概念、公理或定律出发的严密的演绎体系成为人类的梦想。斯宾诺莎的伦理学就是按这种模式阐述的，牛顿的《自然哲学的数学原理》也同样如此。



□ 最早的印刷本

9世纪以后，大量的希腊著作被译成阿拉伯文，约1255年，坎帕努斯（？—1296年）参考数种阿拉伯文本及早期的拉丁文本重新将《原本》译成拉丁文，并于1482年以印刷本的形式在威尼斯出版。图为坎帕努斯译本的第一页。

三、《几何原本》介绍

在《几何原本》中，欧几里得首先给出了点、线、面、角、垂直、平行等定义，接着给出了关于几何和量的十条公理，如“凡直角都相等”“整体大于部分”，以及后来引起许多纷争的“平行线公理”等。公理后面是一个一个的命题及其证明，内容丰富多彩。比如有平面作图、勾股定理、余弦定理、圆的各种性质，空间中平面和直线的垂直、平行和相交等关系，平行六面体、棱锥、棱柱、圆锥、圆柱、球等问题，此外还有比例的理论、正整数的性质与分类、无理量等。公理化结构是近代数学的主要特征，而《几何原本》则是公理化结构的最早典范。欧几里得创造性地总结了他以前的古希腊人的数学，将零散的、不连贯的数学知识整理起来，加上自己的大量创造，构建出彼此有内在联系的有机的宏伟大厦。

本书共分 13 卷，有 5 条公设、5 条公理、119 个定义和 465 个命题，构成了历史上第一个数学公理体系。

关于重要命题 《几何原本》中涉及诸多重要命题，比如命题 I.47 就是著名的“勾股定理”。传说这一定理最早是由毕达哥拉斯证明出的，但他的证明方法却没有流传下来。而《几何原本》中的证明，则可以算是现存西方最早证明勾股定理的记载。

关于命题的逻辑关系 《几何原本》中命题间的逻辑关系甚至比现代教科书还高。为了清晰地表明这一关系，千余年来的各种语文版本多附有数学家们对逻辑关系的注解。

关于公理或公设 演绎法，其基本精神是由简单现象去证明较复杂的现象，在数学中同样也遵循这一原理。在这一理论里，逻辑推理虽然至关重要，但更重要的是，我们必须接受一些简单的现象作为我们的“起点”，是明显的“自明”道理，而欧几里得将这些“起点”命名为“公设”或“公理”。

虽然以公理为起点演绎几何的方法并非为欧几里得首创，其首创应该是他之前的泰勒斯，但是《几何原本》中的公设或公理，全部由欧几里得所创造和筛选。这一天才的智力令人叹为观止！

关于第 5 公设及非欧几何学 欧几里得的不完美催生了新的几何学，这

是从第5公设开始的。第5公设不同于其他9条，言语迟钝，仿佛有些力不从心的样子。形式上也不像公设，倒像一个命题。因此，自《几何原本》诞生后，就有无数的数学家研究这条公设，并试图找出证明这条公设的方法。可惜，一直以来，他们的尝试都归于失败！到了19世纪，波尔约^[1]和罗巴切夫斯基^[2]分别发表了一套与第5公设相反的几何体系，从而证明了第5公设确实是一条“公设”，不能被证明或否定。与此同时，这两位数学家亦为我们带来一个全新的数学世界——非欧几何学。

关于圆面积及球体体积公式，《几何原本》中并没有圆面积或球体体积的计算公式，但在第12卷中，可以找到一些相关命题。在欧几里得之后，另一个希腊天才阿基米德提出球体体积公式。阿基米德应用了一种近乎于现代微积分的计算手法，推算出有关的算式，并成功地计算出圆周率小数后两位的数值。

四、希腊数学背景

希腊人重视数学在美学上的意义，认为数学是一种美，是和谐、简单、明确以及有秩序的艺术。在数学中可以看到关于宇宙结构和设计的最终真理，认为宇宙是按数学规律设计的，且能被人们所认识。

古希腊的地理范围，除了现在的希腊半岛以外，还包括整个爱琴海区域和北面的马其顿和色雷斯、意大利半岛和小亚细亚等地。公元前五、六世纪，特别是希波战争以后，雅典取得希腊城邦的领导地位，经济生活高度繁荣，生产力显著提高，在这个基础上滋生了光辉灿烂的希腊文化。

希腊数学的发展历史可以分为三个时期：第一时期从伊奥尼亚学派到柏拉图学派为止，约公元前7世纪中叶到公元前3世纪；第二时期是亚历山大前期，从欧几里得起到公元前146年希腊陷于罗马为止；第三时期是亚历山大

[1] 波尔约：1802—1860年，匈牙利数学家，非欧几何创始者之一。其最大成就是独立创建绝对几何。

[2] 罗巴切夫斯基：1792—1856年，俄国数学家，非欧几何的早期发现人之一。其主要著作有《平行线理论的几何研究》《论几何学》等。

后期，是在罗马人统治下的时期，结束于641年亚历山大被阿拉伯人占领。

伊奥尼亚学派 从古代埃及、巴比伦的衰亡，到希腊文化的昌盛，这段过渡时期留下来的数学史料很少。不过希腊数学的兴起和希腊商人通过旅行交往接触到古代东方的文化有密切关系。伊奥尼亚位于小亚细亚西岸，它比希腊其他地区更容易吸收巴比伦、埃及等古国积累下来的经验和文化。在伊奥尼亚，氏族贵族政治为商人的统治所代替，商人具有强烈的活动性，有利于思想自由而大胆地发展。城邦内部的斗争，帮助摆脱传统信念。在希腊没有特殊的祭司阶层，也没有必须遵守的教条，因此有相当程度的思想自由。这大大有助于科学和哲学从宗教中分离出来。

米利都是伊奥尼亚的最大城市，也是泰勒斯的故乡。泰勒斯是公认的希腊哲学鼻祖。他早年是一个商人，曾游访巴比伦、埃及等地，很快就学会古代流传下来的知识，并加以发扬。此后他创立了伊奥尼亚哲学学派，摆脱了宗教，从自然现象中去寻找真理，以水为万物的根源。

当时天文、数学和哲学是不可分的，泰勒斯同时也研究天文和数学。他曾预测到一次日食，促使米太（在今黑海、里海之南）、吕底亚（今土耳其西部）两国停止战争。多数学者认为该次日食发生在公元前585年5月28日。他在埃及时曾利用日影及比例关系算出金字塔的高度，使法老大为惊讶。泰勒斯在数学方面的贡献主要在于开了命题证明的先河，它标志着人们对客观事物的认识从感性上升到理性，这在数学史上是一个不寻常的飞跃。伊奥尼亚学派的著名学者还有阿那克西曼德^[1]和阿那克西美尼^[2]等。他们对后来的毕达哥拉斯有很大的影响。

毕达哥拉斯学派 毕达哥拉斯，公元前580年左右出生于萨摩斯（今希腊东部小岛）。为了摆脱暴政，他移居到意大利半岛南部的克罗顿。在那里他

[1] 阿那克西曼德：约前610—前546年，古希腊哲学家、米利都学派的学者、泰勒斯的学生。他否定了水是基质而肯定另有一种元质，对天体引入“球体”概念和“演化”概念，并尝试绘制了第一幅全球地图。

[2] 阿那克西美尼：约前570—前526年，古希腊哲学家、米利都学派的第三位学者，阿那克西曼德的学生。他继承了前两位米利都学派哲学家的传统，也是该学派最后一位哲学家。

组织了一个政治、宗教、哲学、数学合一的秘密团体。后来这个集体在政治斗争中遭到破坏，毕达哥拉斯被杀害，但他的学派还继续存在了两个世纪（约前500—前300年）之久。这个学派企图用数来解释一切，不仅仅认为万物都包含数，而且说万物都是数。他们以发现勾股定理（西方叫作“毕达哥拉斯定理”）闻名于世，又由此导致不可通约量的发现。这个学派还有一个特点，就是将算术和几何紧密联系起来。他们找到用三个正整数表示直角三角形三边长的一种公式，又注意到从1开始连续奇数的和必为平方数等，这既是算术问题，又和几何有关。他们还发现了五种正多面体。在天文方面，毕达哥拉斯首创地圆说，认为日、月、五星都是球体，并浮悬在太空中。同时，他还是音乐理论的始祖。

伊奥尼亚学派和毕达哥拉斯学派有显著不同。前者研习数学并不单纯为了哲学的兴趣，同时也为了实用；而后者却不注重实际应用，将数学和宗教联系起来，想通过数学去探索永恒的真理。

智人学派 诞生于公元前5世纪，此时正值雅典的黄金时代，文人荟萃，辩论会遍布大街小巷，于是“智人学派”应运而生。他们以教授文法、逻辑、数学、天文、修辞、雄辩等科目为业。在数学上，他们提出“三大问题”：三等分任意角；倍立方，求作一立方体，使其体积是已知立方体的二倍；化圆为方，求作一正方形，使其面积等于一已知圆。这些问题的难处在于作图时只许用直尺（没有刻度的尺）和圆规。

希腊人的兴趣并不在于图形的实际作出，而是在尺规的限制下从理论上解决这些问题，这是几何学从实际应用向系统理论过渡所迈出的重要一步。

这个学派的安提丰^[1]提出用“穷竭法”去解决化圆为方的问题，这是近代极限理论的雏形。先作圆内接正方形，以后每次边数加倍，得八、十六、三十二边形……安提丰深信“最后”的多边形与圆的“差”必会“穷竭”。这

[1] 安提丰：前426—前373年，古希腊智者，柏拉图的同母兄弟。著有《释梦》《论和谐》《论政治家》和《论真理》，但留传至今只有《论真理》的残篇两段。

提供了求圆面积的近似方法。这和中国的刘徽（约263年）的割圆术思想不谋而合。

柏拉图（约前427—前347年）在雅典建立学派，创办学园。他非常重视数学，主张通过几何的学习培养逻辑思维能力，因为几何能给人以强烈的直观印象，将抽象的逻辑规律体现在具体的图形之中。这个学派培养出不少数学家，如欧多克索斯^[1]就曾就学于柏拉图学园，他创立的比例论对欧几里得影响巨大。柏拉图的学生亚里士多德也是古代大哲学家，是形式逻辑的奠基者。他的逻辑思想为日后将几何学整理在严密的逻辑体系之中开辟了道路。

埃利亚学派 这个时期的希腊数学中心还有以芝诺（约前496—前430年）为代表的埃利亚学派。芝诺提出四个悖论，这给思想界带来极大震动。这四个悖论是：①二分说，一物从甲地到乙地，永远不能到达。因为想从甲到乙，首先要通过道路的一半，但要通过这一半，必须先通过一半的一半，这样分下去，永无止境。结论是此物的运动被道路的无限分割阻碍着，根本不能前进一步。②阿喀琉斯（善跑英雄）追龟说，阿喀琉斯追乌龟，永远追不上。因为当他追到乌龟的出发点时，龟已向前爬行了一段，他再追完这一段，龟又向前爬了一小段。这样永远重复下去，总也追不上。③飞箭静止说，每一瞬间箭总在一个确定的位置上，因此它是不动的。④运动场问题，芝诺论证了时间和它的一半相等。

原子论学派 以德谟克里特为代表的原子论学派认为，线段、面积和立体是由许多不可再分的原子所构成。计算面积和体积，等于将这些原子集合起来。这种不甚严格的推理方法却是古代数学家发现新结果的重要线索。

公元前4世纪以后的希腊数学，逐渐脱离哲学和天文学，成为独立的学科。数学的历史于是进入到一个新阶段——初等数学时期。这个时期的特点是数学（主要是几何学）已建立起自己的理论体系，从以实验和观察为依据

[1] 欧多克索斯：约前400—前347年，古希腊数学家和天文学家。他首先引入“量”的概念，将“量”和“数”区别开来；其次是建立了严谨的穷竭法，并用它证明了一些重要的求积定理。

的经验科学过渡到演绎的科学。由少数几个原始命题（公理）出发，通过逻辑推理得到一系列定理，这是希腊数学的基本精神。在这一时期里，初等几何、算术、初等代数大体已成为独立科目。和17世纪出现的解析几何学、微积分学相比，这一时期的研究内容可以用“初等数学”来概括，因此叫作“初等数学时期”。

埃及的亚历山大城是东西海陆交通的枢纽，又由于经过托勒密王的精心经营，这里逐渐成为新的希腊文化中心，而希腊本土这时已经退居次要地位。几何学最初萌芽于埃及，后来移植于伊奥尼亚，再后来繁盛于意大利和雅典，最后又回到发源地埃及。经过这一番培植，它已达到丰茂成林的境地。

亚历山大前期 从公元前4世纪到公元前146年古希腊灭亡，罗马成为地中海区域的统治者为止，希腊数学以亚历山大为中心，并达到它的全盛时期。这里有巨大的图书馆和浓郁的学术氛围，各地学者云集在此进行教学和研究。其中成就最大的是亚历山大前期三大数学家欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯。阿基米德是物理学家兼数学家，他善于将抽象的理论和工程技术的具体应用结合起来，又在实践中洞察事物的本质，通过严格论证，使经验事实上升为理论。他根据力学原理去探求解决面积和体积问题，已经包含积分学的初步思想。阿波罗尼奥斯的主要贡献是对圆锥曲线的深入研究。

除了三大数学家以外，埃拉托斯特尼^[1]的大地测量和以他为名的“素数筛子”也很出名。天文学家喜帕恰斯^[2]制作了“弦表”，这是三角学的先导。

亚历山大后期 公元前146年以后，在罗马统治下的亚历山大学者仍能继承前人工作，且各种发明层出不穷。这一时期的门纳劳斯（约公元100年）、

[1] 埃拉托斯特尼：约前276—前195年，古希腊数学家、地理学家、历史学家、诗人、天文学家。其贡献主要是设计出了经纬度系统，计算出地球的直径。

[2] 喜帕恰斯：约前190—前125年，古希腊最伟大的天文学家。他编制出1022颗恒星的位置一览表，首次以“星等”来区分星星。发现了岁差现象，是方位天文学的创始人。

帕普斯^[1]等人都有重要贡献。天文学家托勒密将喜帕恰斯的工作加以整理发挥，奠定了三角学的基础。

晚期希腊学者在算术和代数方面也颇有建树，代表人物有尼科马霍斯（约公元100年）和丢番图（约公元250年）。尼科马霍斯著有《算术入门》，丢番图著有《算术》，其主要内容是数的理论，而大部分内容可以归入代数的范畴。它完全脱离了几何的形式，在希腊数学中独树一帜，对后世的影响仅次于《几何原本》。

325年，罗马帝国的君士坦丁大帝开始利用宗教作为统治的工具，他把一切学术都置于基督教神学的控制之下。529年，东罗马帝国皇帝查士丁尼下令关闭雅典的柏拉图学园以及其他学校，严禁传授数学。许多希腊学者逃到叙利亚和波斯等地，数学研究受到沉重打击。641年，亚历山大被阿拉伯人占领，图书馆再次被毁。公元415年，女数学家、新柏拉图学派的领袖希帕提娅^[2]遭到基督徒的野蛮杀害。她的死标志着希腊文明的衰弱，亚历山大里亚大学极富创造力的日子也随之一去不复返。至此，希腊数学告一段落。

五、欧几里得的宗教情怀

对于欧几里得来说，几何是近神的，这与我们通常的理解刚好相反。因此，与其把《几何原本》当数学阅读，不如将其视为诗歌或哲学，这更接近欧几里得的动机。

在欧几里得生活的时代较早前的几百年，是希腊思想鼎盛的时代，人们研究人自身的问题以及人所面对的宇宙问题，这成为整个希腊的精神气质，构成了远古时代知识分子的日常生活和基本话题。苏格拉底年轻时常常站在

[1] 帕普斯：约300—350年，古希腊数学家，亚历山大学派的最后一位伟大的几何学家。生前有大量著作，但只有《数学汇编》一书保存下来。此书对数学史具有重大的意义，且对前辈学者的著作进行了系统整理，并发展了前辈的某些思想，保存了很多古代珍贵的数学作品的资料。

[2] 希帕提娅：370—415年，希腊化古埃及学者，是当时名重一时、广受欢迎的女性哲学家、数学家、天文学家、占星学家以及教师。

大街上拉着过路的行人就要求辩论一番，以企图寻找人、人群、物质、精神等存在的本来意义。众哲学家在思考着这些问题：人所寄居的宇宙到底是什么？人到底是什么？要干什么？

为阐释宇宙的本质，灿若群星的哲学思想繁衍旺盛，哲学家们要寻找世界的“始基”^[1]、构成宇宙的基本元素以及万千复杂世界所依的根本。他们将整体的复杂还原为要素，而要素的变化、过程、次序、排列、关系成为寻找对象。

巴门尼德^[2]则把元素抽象为“唯一的、不动的、永恒的”东西，按照他的描述，“存在着一条最后的边界，它在各方面都是完全的，好像一个滚圆的球体，从中心到每一个方面的距离都相等”。黑格尔讽刺说，巴门尼德弄出来的是“一片简单的阴影”。但也有后人讽刺黑格尔说，他弄出来的“不过是个上帝的身体”；德谟克里特也不相信，他提出了自己的原子论，他坚信宇宙的本质是原子与虚空的结合，它们作为最小的存在构成了万物，只要找到原子的面貌，世界的本质就昭然若揭了，同时他也提出人的灵魂是另一类原子的运动；赫拉克利特^[3]则不同意这一观点，他认为本质是火，万物皆流，无物常住，那变动不居的火就是世界的本质，流变就是世界的本质，那团不生不灭、永恒存在的“活火”主宰了我们的世界；阿那克西美尼却不同意他的观点，他认为本质是“气”；阿那克西曼德又不同意这一观点，他认为那基本元素虽然存在，但却不具有任何定性，永远不能定名，也不能描述，它是不可知的一个元素。集哲学家、预言者、科学家和江湖术

[1] 始基：古希腊语，从泰勒斯起开始具有哲学上的意义，是万物的根源或基本，万物从它产生又可复归于它的共同的东西。

[2] 巴门尼德：约前515—前5世纪中叶以后，古希腊哲学家，著有哲学诗《论自然》。他创造了一种形而上学的论证形式，这种论证曾经以不同的形式存在于后来大多数的形而上学者的身上直至黑格尔为止，并且包括黑格尔本人在内。人们常常说他曾创造了逻辑，但他真正创造的却是基于逻辑的形而上学。

[3] 赫拉克利特：约前530—前470年，古希腊哲学家。他的理论以毕达哥拉斯的学说为基础。借用毕达哥拉斯“和谐”的概念，认为在对立与冲突的背后有某种程度的和谐，而协调本身并不是引人注目的。同时他也被称为辩证法的奠基人之一，因为他是在古代希腊哲学家中，第一个用朴素的语言讲出了辩证法的要点的人。

士为一身的恩培多克勒（约前483—前435年）则发现了“气”。在倒着把瓶子放入水中而水不能进入瓶子时，他发现空气是一种存在的物质，于是他认为土、气、火、水是世界的基本元素。这就是早期的自然哲学。

苏格拉底并不同意这样的解释，他在方法上另辟蹊径，用苏格拉底的方法，即通过辩论问题中的矛盾清晰事物的结论获得真理，真理的累加最后通达整个宇宙。苏格拉底的进步在于他已不把那“元素”或“始基”视为一种经验中的物质，而是抽象出他称为“真理”“规律”“理性法则”的东西。

柏拉图从他的《理想国》里提出“理念世界”一词，并宣布：现实世界是个假象，是个影子，是理念世界的投影，攀登上理念世界的人必须借着理性的绳索。他对几何学抱着虔诚的敬神式的热情，因为他看到既能满足于一切物质和空间，又不受时间腐蚀的点、线、面、角的规律之舞，“其品性接近于理念世界之物”，他相信，几何学可以修建通往理念世界的天梯。也就是说，柏拉图的元素或始基，是他描述的“理念世界”。柏拉图在他创办的雅典学园传播这些理论的时候，出现了一位杰出的学生——亚里士多德。这位跟着他二十年的学生更是青出于蓝而胜于蓝，集古希腊哲学之大成，他把宇宙的实质定义为“本体”，放弃了自然哲学中的那种宇宙本原的寻求。并由此发明出范畴、分类、逻辑、属性、一般与个别、本质与现象、思维与存在、理性与感性、可能性与现实、不变与变等矛盾关系。

另一条线对欧几里得来说有些特别，这条线得从泰勒斯开始。泰勒斯生活在公元前600年左右，首先，他认为世界的本质元素是“水”，水开万物，水是万物的本原。当希腊神话成为大众思想生活和精神生活的主流时，他却反希腊神话。他不能忍受用杜撰的故事来阐释造化天工，于是转而观察自然界的各种法则，希望从自然界内部找到他的神，于是他首创了在自然元素中寻找宇宙答案的方法。人类最早的“证明命题”方法应归功于他。

毕达哥拉斯是一位数学天才，由于超常的数学智力，他受到希腊公民的尊重，创建了宗教的哲学派别——毕达哥拉斯学派。他认为万物皆数，数是宇宙的根本，找到数就找到了宇宙的本原。这显然意味着，认识世界就要从数开始。只要运用定量方法来认识世界，就可以解开宇宙的终极秘密。但实际上当他发现无理数的存在时，就发现自己的思想基础已经崩溃，只是由于