大师之作　醍醐灌顶　学好高数的必读经典

高等数学新生突破

多元函数微积分学

邵 剑 著

与课本匹配但高于课本，是高数教学内容的补充、延伸、拓展和深入

夯实基础，突破难点，掌握解题技巧

提高思维分析能力和解题能力

被众多数学教师大力推荐，被推崇为顶尖高数辅导书

上海远東出版社

高等数学新生突破

多元函数微积分学

邵 剑 著

上海远东出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学新生突破. 多元函数微积分学 / 邵剑著.
—上海：上海远东出版社，2019
ISBN 978-7-5476-1515-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①邵… Ⅲ.①微积分—高等学校—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 134075 号

责任编辑 曹 建
责任校对 祁东城
装帧设计 李 廉
责任印制 晏恒全

高等数学新生突破：多元函数微积分学

邵 剑 著

出　版 上海遠東出版社
(200235 中国上海市钦州南路 81 号)
发　行 上海人民出版社发行中心
印　刷 上海锦佳印刷有限公司
开　本 890×1240 1/32
印　张 11.5
字　数 316,000
版　次 2019 年 8 月第 1 版
印　次 2019 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5476-1515-7/G·968
定　价 68.00 元

办学校是办一种精神、一种环境.进入大学学习是培养自己一种超前的思想与一种优秀的习惯.

大学生、研究生进入自由之思想、独立之人格的大学,和教授、学者们相聚是一种缘分,也是一种信任.

因为相聚是一种情与爱的交流,相聚是一种能力与思维的对话.相聚需要理解和宽容,需要激情与友情,需要幽默与微笑.相聚能传递愉悦,产生友情,给予动力.愿大学期间的相聚能作为青年学生美好人生与迸发耀眼光辉的起点.

我们一起珍惜这样的相聚.

(摘自浙江大学学生记录的"邵爷爷语录",有改动.下同.)

前言

朋友！你我不曾相识，但高兴的是我们有幸相聚于本书之中．这是一种缘分，更是一种信任与情感的交流，愿通过本书我们能成为好朋友——真正的好朋友！因为一切的美，数情最美.

你的可爱让我陶醉，你的优秀使我感动.

你的青春令我羡慕，你的现在由我陪同.

创新，是人类社会活动永恒的主题．创新活动和科学研究需要具有一定的基础与专业知识的积累，需要具有相当的创新思维，需要具有终身学习的能力．这些都是高等教育的基本任务，希望你们先从本书的学习中得以培养和提升.

笔者一辈子坚守并实践着的教和学的理念是：创新思维的教和学，情与爱的教和学，愉悦而轻松的教和学.

非初等数学的数学皆为高等数学．二者的根本区别在于：初等数学研究的是**有限**的，又是**静态**的；高等数学研究的是**无限**的，又是**动态**的．显然，高等数学比初等数学研究的范围更广、难度更大、探索的未知更多．人们俗称的高等数学课程，仅仅涉及整个高等数学中最基础的极少部分.

按创新思维与方法，专题梳理与解悟高等数学课程中各个知识点是一种较高的思想境界，可以让你掌握创新活动中一些常规的思维和方法，会让你觉得这种学习挺好玩儿的，能提高你的终身学习能力．本书就是强调创新思维与数学知识的贯通，突出用

撰写科学研究论文的路线加以阐述. 本书具有个性的“注记”就是对有关专题的剖析与延拓及其思想的最好解悟.

好人的充分必要条件是考虑到他人. 爱与情的核心也就在于尊重对方、考虑对方. 教师为学生着想,作者为读者考虑,均体现着爱与情. 学生接受这种被爱是对教师的敬重,读者喜爱并接受书中的见解和字里行间的情是对作者的肯定. 这说明双方都是好人,大家都持有“待贤者谦,待善者恭”的精神.

正是笔者考虑着你们,才把本书写成一部具有可读易懂、内容全面、方法多样、综合性强等特点的大全;又具有概念清晰、叙述严谨、思想丰富、思维活跃等特色;还在许多“注记”中提供了相关的练习题. 本书的写作风格是以朋友交流的谈话形式,是没有声音的讨论式课堂教学.

好人考虑着他人,就是让他人有收益、有快乐. 学生喜爱的好教师是这样,读者喜爱的好作者也是如此. 笔者怀着为了学生和读者有收益有快乐的理念,坦诚用心写成了本书. 当然也期望你们用心、静心研读本书,诚如是,则你一定会在系统梳理数学知识的同时,在学业上、思维上都有收益和提高,进入更高的境界,并愉悦又轻松着.

本书(一套四册)适用于工学、理学、经济学、管理学等各学科、各专业的如下几类读者:

(1) 正在学习“高等数学”(含“微积分”、“常微分方程”等)课程的读者. 本书各章节的编排是与“高等数学”(含“微积分”、“常微分方程”等)课程的常用教材及其教学顺序相一致的,故对初学者,尤其是大学新生来说它是一部极好的高等数学同步辅导用书.

另外,请读者根据自己报考研究生的专业要求,按照教育部当年颁布的数学考试大纲选用本书中有关章节的相关内容.

(2) 正在选学"数学分析"课程的读者. 本书覆盖了"数学分析"课程中纯分析理论以外的全部内容,且达到了相应的高度. 所以本书也是正在学习"数学分析"课程读者的很好的辅导用书.

(3) 从事"高等数学"课程和"数学分析"课程教学工作的教师. 本书可以作为这些教师朋友的教学参考用书,愿对大家有一定的帮助.

这里,特别感谢本书责任编辑、上海远东出版社曹建编审!感谢他的关注,使笔者长期创立的教学理念与教学风格在本书中得以部分展示. 他在每个细节中处处体现出来的考虑读者、关心作者的好人品质让我感动.

本书的不当甚至差错之处,唯望从各位同仁与朋友中多获教言以增益,谢谢!

邵　剑

2019 年 7 月于杭州

目录

前言

第 7 章　多元函数微分学　/ 3
§7.1　多元函数的基本概念与性质　/ 4
7.1.1　多元函数　/ 4
7.1.2　多元函数的极限与连续　/ 7
7.1.3　多元函数的偏导数　/ 16
7.1.4　全微分　/ 25
§7.2　偏导数与全微分的计算　/ 34
7.2.1　多元函数在给定点处的偏导数与全微分　/ 34
7.2.2　多元复合函数的偏导数　/ 39
7.2.3　隐函数的偏导数　/ 50
7.2.4　通过变量变换化简微分方程　/ 58
7.2.5　偏导数与微分方程　/ 61
§7.3　多元函数的优化问题　/ 64
7.3.1　多元函数的极值问题　/ 64
7.3.2　多元函数的最优值问题　/ 68
7.3.3　利用多元函数最优化的方法证明不等式　/ 78

第 8 章　重积分　/ 85
§8.1　二重积分　/ 86
8.1.1　二重积分的概念与性质　/ 86
8.1.2　二重积分的计算　/ 107
8.1.3　二重积分的不等式　/ 124

8.1.4　广义二重积分的概念与计算　/ 137
8.1.5　二重积分的应用　/ 141
§8.2　三重积分　/ 155
8.2.1　三重积分的概念与性质　/ 155
8.2.2　三重积分的计算与应用　/ 169

第 9 章　向量代数与空间解析几何　/ 193
§9.1　向量代数　/ 194
§9.2　空间解析几何　/ 203
9.2.1　平面与直线　/ 203
9.2.2　空间曲面及其方程　/ 220
9.2.3　空间曲线及其方程　/ 226
§9.3　场论初步　/ 232

第 10 章　曲面积分与曲线积分　/ 251
§10.1　第一类曲线积分与曲面积分　/ 252
10.1.1　第一类曲线积分　/ 252
10.1.2　第一类曲面积分　/ 262
§10.2　第二类曲面积分　/ 277
10.2.1　第二类曲面积分的概念与性质　/ 278
10.2.2　第二类曲面积分的计算　/ 280
§10.3　第二类曲线积分　/ 304
10.3.1　第二类曲线积分的概念与性质　/ 304
10.3.2　第二类曲线积分的计算　/ 306
10.3.3　平面曲线积分与路径无关　/ 337

教师是否能够把自己的注意力真正集中在学生身上,学生是否有动力主动地学习,是当今大学教育存在的两个最基本的问题.

人们称教师是人类灵魂工程师,其意就是教师具有很高的思想境界、人格魅力和好人价值.

人们认为教师具有蜡烛精神,燃尽自己照亮别人.

一位好教师应该是一位用心的人、高尚的人,是一位愿意为学生毫无保留地去消耗自己一生精力和时间的人,是一位对学生对教学有着深厚感情的人,是一位知识渊博思维活跃的人,是一位幽默又有激情的人.无之必不行.

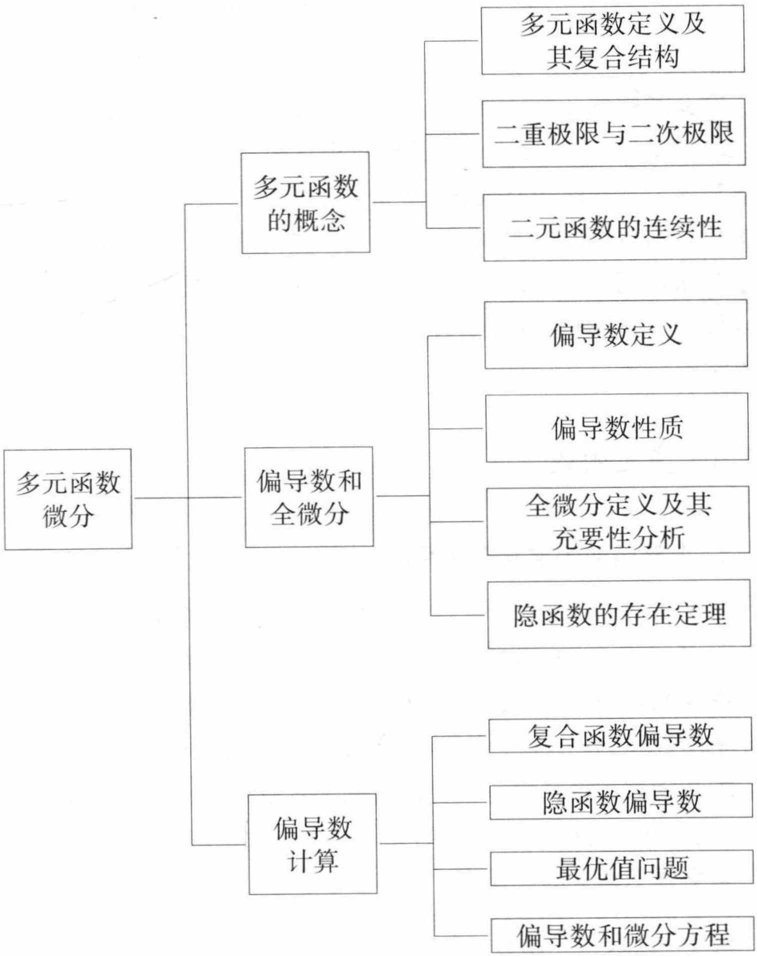
谁是学科的“权威”对学生而言并不那么重要,根本见不着面的“权威”对学生而言意义是微乎其微的.

学生需要的是会考虑到学生,受他们喜爱与尊敬的直面课程教学的优秀教授.

这些教授不仅顾及学生的当下,更会考虑学生的未来和一生;不仅考虑学生的业务知识,更会关心影响学生人生的基本素质:健康的体魄、良好的习惯、终身的学习能力、严谨的科学态度、活跃的创新思维,以及考虑他人的自觉等等.这就是情与爱的教学.

第 7 章

多元函数微分学


多元函数微分
多元函数的概念
多元函数定义及其复合结构
二重极限与二次极限
二元函数的连续性
偏导数和全微分
偏导数定义
偏导数性质
全微分定义及其充要性分析
隐函数的存在定理
偏导数计算
复合函数偏导数
隐函数偏导数
最优值问题
偏导数和微分方程

多元函数微分学是一元函数微分学的推广与发展. 它们之间有着相似的理论框架,但是由于空间维数的增加,多元函数的极限与连续、可导与可微等基本概念具有自身的特点. 读者必须重新加以认识,并注意比较它们之间的差异.

§7.1 多元函数的基本概念与性质

因 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $n\geqslant 2$, 有着 n 个彼此独立变化的自变量,故研究 n 元函数的思想方法总的来说有两种. 一种是考虑其 n 个自变量同时变化,例如多元函数的极限、连续、全微分以及重积分、曲线积分、曲面积分等. 另一种是令多元函数的某一个自变量变化,而它的其余自变量都暂时看作常量,即将 n 元函数化为一元函数来研究,例如多元函数的累次极限、偏导数的定义与计算,以及累次积分等.

7.1.1 多元函数

1. 多元函数的定义及其几何意义

设 V 是 n 维空间 $R^n(n\geqslant 2)$ 中一非空点集,如果对于 V 中每一点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,按照某一规则 f 都有实数集 R 中唯一确定的一个实数 u 与之对应,则称 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个定义在 V 上的 n 元函数. 它有 n 个自变量,V 为其定义域.

多元函数的定义域一是由使其数学表达式有意义的点集所确定的,二是由其相应的实际问题的实际意义所决定的. 二元函数的定义域是某坐标平面上的点集 D.

例 1 试求二元函数 $f(x, y)=\arcsin\dfrac{x}{y}+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域.

解 因函数 $u=\arcsin\frac{x}{y}$ 的定义域为 $|x|\leqslant|y|$；$u=\sqrt{4x-y^2}$ 的定义域为 $4x-y^2\geqslant 0$；$u=(\ln(1-x^2-y^2))^{-1}$ 的定义域为 $1-x^2-y^2>0$，且 $1-x^2-y^2\neq 1$，则所给的二元函数的定义域是这些定义域的交集. 于是，联立这四个不等式解得所给二元函数的定义域为

$$D=\{(x, y)\mid |x|\leqslant|y|, y^2\leqslant 4x, 0<x^2+y^2<1\}.$$

二元函数 $z=f(x, y)$，$(x, y)\in D\subset R^2$ 的几何轨迹一般是三维空间 R^3 中的一张曲面，称它为该二元函数的图形. 读者应该联系平面、柱面、锥面等典型的空间曲面的图形，使数与形相结合更直观地了解二元函数，例如，关注曲面的法向量、切平面、法线等.

同理可知，n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in V\subset R^n$ 的几何轨迹一般是 $n+1$ 维空间 R^{n+1} 的中的一张超曲面，或者说 R^{n+1} 点集

$$\begin{aligned}&\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)\mid u\\ &=f(x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n)\in V\subset R^2\}\end{aligned}$$

称为 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in V\subset R^n$ 的图形.

2. 多元函数的复合结构

对于多元复合函数，读者务必梳理清楚它们的复合关系，分清哪些量是中间变量，哪些量是自变量. 以二元函数为例，若 $z=f(u, v)$，通过中间变量 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 而成为自变量 x，y 的函数 $z=f(u(x, y), v(x, y))$，这是一种复合结构很清楚的复合函数.

又如，若 $z=f(x, y, u)$，而 $u=u(x, y)$，则复合成为 x，y 的复合函数是 $z=f(x, y, u(x, y))$. 这里 $f(x, y, u)$中的 x，y 是中间变量又是自变量.

利用多元函数的复合结构是求解函数解析式的一种技术路线.

求解由函数方程确定的多元函数,实际上也是函数构造的工作,即构造一多元函数使它满足某个函数方程.

例 2 设(1) $f(xy, x+y)=x^2+y^2+xy$; (2) $f\left(x+y, \dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, $y\neq -x$; 求二元函数 $z=f(x, y)$.

解 (1) 令 $u=xy$, $v=x+y$, 则由

$$f(xy, x+y)=x^2+y^2+xy=(x+y)^2-xy,$$

得 $f(u, v)=v^2-u$, 即 $f(x, y)=y^2-x$.

(2) 令 $u=x+y$, $v=\dfrac{y}{x}$, 有 $x=\dfrac{u}{1+v}$, $y=\dfrac{uv}{1+v}$, 则

$$f(u, v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v},\quad v\neq -1,$$

即 $\quad f(x, y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$, $y\neq -1$.

注记 设 $g(x, y)$ 是已知的函数, 且满足关系式 $f(u(x, y), v(x, y))=g(x, y)$, 由此求解函数 $f(x, y)$ 是一种经常出现的题型. 利用多元函数的复合关系容易求得 $f(x, y)$ 的解析式.

例如, 设 $f(u, v)$ 满足关系式 $f[x\varphi(y), y]=x+\varphi(y)$, 且 $\varphi(y)\neq 0$, 则令 $u=x\varphi(y)$, $v=y$, 得 $f(u, v)=\dfrac{u}{\varphi(v)}+\varphi(v)$, 即有

$$f(x, y)=\frac{x}{\varphi(y)}+\varphi(y).$$

例 3 设函数 $F(x, y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x)$, 函数 $f(u)$ 连续, 且 $F(1, y)=\dfrac{1}{2}y^2-y+5$. 任取一点 $x_0>0$, 令 $x_1=F(x_0, 2x_0)$, $x_2=F(x_1, 2x_1)$, …, $x_{n+1}=F(x_n, 2x_n)$, 由此构造数列 $\{x_n\}$. (1)求函数 $f(x)$ 与 $F(x, y)$; (2)证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的, 并求其极限值.

解 (1) 因 $F(x, y)=\frac{1}{2x}f(y-x)$,故 $F(1, y)=\frac{1}{2}f(y-1)$,于是

$$\frac{1}{2}f(y-1)=\frac{1}{2}y^2-y+5=\frac{1}{2}[(y-1)^2+9].$$

因此,函数 $f(x)=x^2+9$,且 $F(x, y)=\frac{1}{2x}[(y-x)^2+9]$.

(2) 对任取的点 $x_0>0$,因 $f(t)=t^2+9$, $F(x, y)=\frac{1}{2x}f(y-x)$, 故

$$x_1=F(x_0, 2x_0)=\frac{1}{2x_0}f(x_0)=\frac{1}{2x_0}(x_0^2+9),$$
$$x_2=F(x_1, 2x_1)=\frac{1}{2x_1}f(x_1)=\frac{1}{2x_1}(x_1^2+9),$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1}=F(x_n, 2x_n)=\frac{1}{2x_n}f(x_n)=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+9).$$

由此构造的数列$\{x_n\}$单调减少且有下界,这是因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+9)\geqslant\frac{6x_n}{2x_n}=3,$$
$$x_{n+1}-x_n=\left(\frac{x_n}{2}+\frac{9}{2x_n}\right)-x_n=\frac{9-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0.$$

所以极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设其为 a. 对 $x_{n+1}=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+9)$ 两边令 $n\to\infty$ 得 $a^2=9$, 则由极限的唯一性与保号性得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

注记 构造数列的工作也是函数构造工作之一.

7.1.2 多元函数的极限与连续

1. 二元函数的极限

设二元函数 $u=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$的邻域 $N(P_0, \delta)$内有

定义(但在点 P_0 处可以没有定义),如果存在常数 A,那么 $u=f(x,y)$ 在(x, y)趋向于点(x_0, y_0)时以 A 为极限的二重极限定义为 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时恒有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$. 并记此二重极限为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A, \quad 或 \quad \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A.$$

注意到二元函数 $u=f(x, y)$ 自变量的点 $P(x, y)$是在平面上活动的,它比一元函数自变量的变动有着更大的自由度. 因此,理解二元函数的二重极限的定义时,要求动点 $P(x, y)$趋向于定点 $P_0(x_0, y_0)$的途径是任意的,与其变化方式无关,即动点 P 不论沿什么方向、什么方式、什么路径趋向于定点 P_0 时二重极限 $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$必须是同一个数 A. 它比起一元函数的极限只有左、右两个单侧极限来说,要复杂得多.

特别,如果当以不同的方式点 $P(x, y)$趋于点 $P_0(x_0, y_0)$时,二元函数趋于不同的极限,或者当点$P(x, y)$按某一种方式趋于点 $P_0(x_0, y_0)$时二元函数的极限不存在,那么二重极限 $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$就不存在. 这是二重极限上述定义的一种逆向思维,也是判断某二重极限不存在的两种常用方法.

例 4 讨论下列函数在原点 $O(0, 0)$处二重极限的存在性.

(1) $f_1(x, y)=\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)}$; (2) $f_2(x, y)=\dfrac{xy}{x+y}$.

解 (1) 特别选取直线 $y=x$, 因

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_1(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x^2)}{2x^6}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2)^2}{2x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$$

不存在,故原二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_1(x, y)$不存在.

(2) 分别考虑沿曲线 $y=x^2-x$ 与沿 $y=2x^2-x$, 点 $P(x, y)$趋于点 $O(0, 0)$时二元函数 $f_2(x, y)$的二重极限