

信号处理之高性能 超分辨率图像重建方法

王卓峥 贾克斌 刘 帷 著



科学出版社

信号处理之高性能超分辨率 图像重建方法

王卓峥 贾克斌 刘 帷 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书针对现有图像超分辨率重建方法在分辨率提升倍数较大时,算法复杂度、重建效果不稳定的问题,研究并实现由一个或多个摄像头捕捉的具有亚像素位移的连续多帧低分辨率图像序列的高性能超分辨率图像重建方法。本书具体包括以下几方面内容:基于主元分析与尺度不变特征变换的图像配准方法的研究;基于小波多分辨率分析的稀疏表示法;矩阵填充与矩阵恢复问题的研究;高性能超分辨率图像重建。

本书提出的新方法 SRMCR 与当前其他主流超分辨率重建方法相比,保留了丰富的图像细节,能有效地处理针对通用图像的高性能超分辨率重建问题,可应用于遥感图像超分辨率重建等机器视觉领域。

本书适合具有一定的数学基础、信号处理理论基础,以及熟悉数字图像处理的读者。本书可作为信息技术相关专业高年级本科生与研究生的教材,也可以作为图像处理领域工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

信号处理之高性能超分辨率图像重建方法 / 王卓峥, 贾克斌, 刘帷著.
—北京: 科学出版社, 2019.3

ISBN 978-7-03-060877-2

I. ①信… II. ①王… ②贾… ②刘… III. ①图象重建 IV. ①TN919.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 050378 号

责任编辑: 潘斯斯 刘 博 霍明亮 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 3 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2019 年 3 月第一次印刷 印张: 6 3/4

字数: 130 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

随着时代的变迁,科学技术不断发展,人类不断探索未知的领域。针对一段文字或者一段数据,如何补充空白的区域(就像“数独”或者“填词游戏”),而补充的内容又刚好吻合作者的用意?这种看似科幻的方法,即通过寻找事物的规律来补充未知的内容,其实已经存在,我们称为“预测”。

“预测”无处不在,例如,通过分析过去几年甚至十几年的股票数据,对某一只股票未来的发展趋势,包括开盘价、收盘价进行预测;采用特定技术,对卫星获得的遥感图像中某些不清晰的部分预测补充,获得更清晰的结果,为决策提供数据支撑;输入一段残缺或者具有较大背景噪声的语音,通过预测获得具有良好音质的接近原始语音质量的语音信号等。从本质上说,无论股票数据、图像还是语音的预测,都是对多媒体信号的数据预测。

随着计算机技术与信息处理技术的飞速发展,人们已认识到硬件技术在提高信息获取质量方面的重要性。与此同时,如何通过软件的方式突破图像固有信息的限制,提高图像分辨率,从而获得更多图像的高频细节信息,则具有更重要的研究意义与应用价值。

在上述背景下,本书针对现有图像超分辨率重建方法在分辨率提升倍数较大时,算法复杂度高、重建效果不稳定的问题,研究并实现可针对通用图像的高性能超分辨率图像重建方法,主要内容与贡献包括以下几方面。

本书提出基于主元分析与高斯加权欧氏距离的快速图像配准方法 PCA-SIFT-Gaussian。本书分析特征提取与特征匹配的常用方法及具有竞争力的传统 SIFT 方法的四个主要步骤:图像尺度空间的建立、精确检测极值点、关键点方向分配和生成 SIFT 特征描述子,使提取的特征对图像间发生平移、旋转、仿射变换、视角变换、光照变换等具有较好的不变性。针对传统 SIFT 方法中 128 维特征向量占用存储空间大、匹配耗时多等问题,围绕关键点的 41×41 的邻域内形成 3042 维特征向量,引入主元分析法对多维数据进行降维,完成特征提取。在特征匹配过程中采用高斯加权欧氏距离代替传统的欧氏距离进行阈值判定。实验结果证明,本书算法在保持较高性能的同时,特征提取速度相比传统 SIFT 方法提升约 40%,对高斯噪声、旋转与尺度变化、仿射变换及光照变化等具有更高的鲁棒性。

本书提出具有更快词典训练速度与重建精度的基于小波多分辨率分析的超分

分辨率图像重建方法。本书分析稀疏表示法中三个重要步骤：建立图像降质模型、局部约束块稀疏表示、全局约束稀疏表示。针对稀疏表示法中训练过完备联合词典对计算量较大、算法耗时的问题，本书提出采用提升小波变换将词典素材分解为一个低频分量和三个高频分量，通过第二层和第三层提升小波变换后的高频分量估计出第一层的高频分量，从而节约 75% 的像素数，降低训练词典的时间。在局部先验约束中特征提取算子 F 的选择上，采用 PCA-SIFT-Gaussian 代替传统一维梯度高频滤波器以获得更多的高频细节。实验结果证明，本书算法与传统方法相比，可缩短词典训练 60% 以上的时间，且具有更高的重建精度。

本书提出同时具备填补矩阵丢失元素与修复受损元素功能的新方法。本书通过比较不同矩阵填充与矩阵恢复主流方法，引入具有优越的收敛性及求解精度的增广拉格朗日乘子法，提出同时具备矩阵填充与矩阵恢复功能的新方法——双非精确增广拉格朗日乘子法(Dual-IALM)。实验结果表明，该方法具有迭代次数少、速度快、精度高的特点及较强的抗噪能力，通过该方法可较好地解决图像去噪与图像融合等实际应用问题。

本书实现由一个或多个摄像头捕捉的具有亚像素位移的连续多帧低分辨率图像序列的高性能图像超分辨率重建系统。首先本书通过多帧图像配准方法 PCA-SIFT-Gaussian 对齐 LR 观测图像，然后采用第 3 章提出的改进的稀疏表示法训练联合词典对，并建立块稀疏表示和全局约束稀疏表示，生成初步重建的 HR 图像序列，最后采用 Dual-IALM 对图像序列构造的观测矩阵进行矩阵填充与矩阵恢复，将输出的低秩矩阵按照光栅扫描顺序重构为最终的 HR 图像。为了进一步优化软件系统，应预先保存配准后的特征向量，直接在特征提取算子 F 中使用。此外，本书引入 Ring-Jacobi 排序法取代传统的 Round-Robin 排序法，减少并行算法中奇异值分解的迭代次数。实验结果证明，本书提出的新方法 SRMCR 与当前其他主流超分辨率重建方法相比，在分辨率提升四倍以上时，仍保留丰富的图像细节，重建 HR 图像的峰值信噪比平均值高于其他方法 5.04~6.28dB，且不易受词典训练素材选择范围的影响，能有效地处理通用图像的高性能超分辨率重建问题，可应用于遥感图像超分辨率重建等机器视觉领域。

本书试图通过引入近几年比较热门的信号预测技术——矩阵填充(matrix completion)对图像信号进行分析、预处理与预测，最终实现图像超分辨率(super-resolution imaging)重建。尽管本书所著的技术内容完成较早，但具有较高实用性，希望可以给读者以启示，将该方法扩展至其他信号处理领域。

值此书完成之际，谨向多年来给予作者指导、关心、帮助的师长、同事和家人表示由衷的、最诚挚的谢意！感谢美国密歇根州立大学的指导教授 John R.Deller，他不仅使我有幸参与“BEACON Center”创新研究机构的基金项目，也对我的科

研工作进行了建设性的指导。此外，John R.Deller 教授对学术研究的执着态度也值得我学习。感谢上海大学武频教授和华东师范大学姚萌教授对本书提出的宝贵意见和建议。感谢孙中华博士、刘鹏宇博士、冯金超博士及实验室所有同事、硕士生、博士生对本书的支持和帮助。

作 者

2018 年 12 月于北京

目 录

第 1 章	绪论	1
1.1	信号与系统的概念	1
1.2	信号处理应用领域	4
1.3	超分辨率技术概述	7
1.4	国内外研究现状	9
1.5	本书内容与主要贡献	11
1.5.1	本书内容	11
1.5.2	主要贡献	12
1.6	本书的组织与结构	13
1.7	本书约定与符号说明	13
第 2 章	基于主元分析与尺度不变特征变换的图像配准方法的研究	15
2.1	标准 SIFT 方法概述	17
2.1.1	图像尺度空间的建立	17
2.1.2	精确检测极值点	19
2.1.3	关键点方向分配	22
2.1.4	生成 SIFT 特征描述子	22
2.2	基于主元分析的特征提取	23
2.2.1	主元分析与奇异值分解	23
2.2.2	PCA 降维	25
2.2.3	生成低维 SIFT 特征描述子	25
2.3	动态阈值的判定与特征匹配	27
2.4	实验结果与分析	29
2.4.1	特征提取性能对比	30
2.4.2	图像配准性能对比	31
2.5	本章小结	34
第 3 章	基于小波多分辨率分析的稀疏表示法	35
3.1	基本思想与降质模型的建立	35
3.1.1	图像降质模型	35
3.1.2	局部约束稀疏表示	36
3.1.3	全局约束稀疏表示	37

3.2	训练过完备联合词典对	38
3.2.1	训练单个词典	41
3.2.2	训练联合词典对	41
3.3	基于小波多分辨率分析的词典训练	43
3.3.1	小波变换的理论基础与原理	43
3.3.2	基于小波变换的图像分解与重构	45
3.3.3	提升小波变换训练联合词典对	47
3.4	基于 PCA-SIFT-Gaussian 方法的特征提取	52
3.5	实验结果与分析	52
3.5.1	训练过完备联合词典对性能对比	53
3.5.2	超分辨率性能对比	54
3.6	本章小结	55
第 4 章	矩阵填充与矩阵恢复问题的研究	57
4.1	矩阵填充	57
4.1.1	奇异值阈值法	58
4.1.2	加速近端梯度法	59
4.1.3	增广拉格朗日乘法	60
4.2	矩阵恢复	61
4.2.1	迭代阈值法	63
4.2.2	加速近端梯度法	64
4.2.3	增广拉格朗日乘法	65
4.3	矩阵填充与矩阵恢复混合问题	68
4.4	Dual-IALM 在图像处理中的应用	69
4.4.1	矩阵填充性能对比	69
4.4.2	图像去噪应用	70
4.4.3	图像融合应用	71
4.5	本章小结	76
第 5 章	高性能超分辨率图像重建	77
5.1	多帧图像配准	77
5.2	稀疏表示与局部约束	77
5.3	矩阵填充与 RPCA 实现全局约束	78
5.4	软件系统搭建与优化	79
5.4.1	软件系统搭建	79
5.4.2	软件系统优化	81
5.5	高性能超分辨率实验与分析	83

5.6 本章小结	89
第 6 章 总结与展望	90
6.1 总结	90
6.2 展望	91
参考文献	93

第 1 章 绪 论

1.1 信号与系统的概念

信号(signal)是表示消息的物理量, 这个物理量通常是一个时间序列。一般使用“信号”一词时, 都是在说这一物理量的数学表示。例如, 通常我们说的扬声器输入电压是一个电信号, 它其实就是电压相对于时间变化的数学表示。

信号可以从不同角度进行分类, 通常可以分为单变量(标量)信号和多变量(矢量)信号; 连续时间信号和离散时间信号; 确定性信号和随机信号; 一维信号和多维信号; 周期信号和非周期信号; 能量信号和功率信号等。

如图 1-1 所示, 门脉冲信号 $x_a(t)$ 和方波信号 $x_b(t)$ 都是单变量的、时间连续的、确定的一维信号; $x_a(t)$ 是非周期信号, $x_b(t)$ 是周期信号。

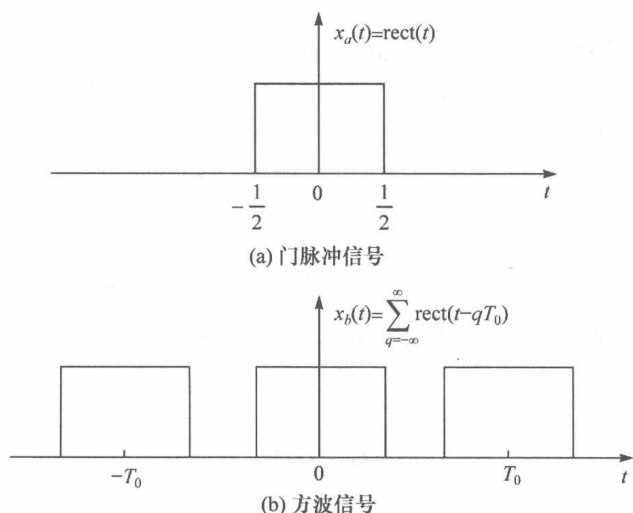


图 1-1 信号的周期性

对于任意信号 $x(t)$, 平均值可表示为 $\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$, 功率 P_x 可表示为

$P_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$, 能量 E_x 可表示为 $E_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$ 。对于任意一个

信号 $x(t)$, 如果满足 $0 < E_x < +\infty$, 则此信号为能量信号, 如果满足 $0 < P_x < +\infty$, 则此信号为功率信号, 否则既不是功率信号也不是能量信号。

系统(system)是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。在数字信号处理的理论中, 人们把能变换、加工数字信号的实体称为系统。

信号与系统之间有着十分密切的联系, 离开了信号, 系统将失去意义; 没有系统作为载体, 信号则无法进行传输和处理。信号在系统中不是一成不变的, 会以一定的规律运动、变化, 而系统则是在输入信号的驱动下对它进行加工、处理并输出信号。抽象意义上来讲, 信号和系统都可以被看作序列。

信号处理领域, 通常使用傅里叶级数(Fourier series, FS)对周期的连续函数做求和运算; 使用傅里叶变换(Fourier transform, FT)对非周期连续函数做运算, 要求函数可积分(满足狄利克雷条件)。离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)主要针对的是离散信号。对连续信号进行采样后可得到相对应的离散信号, 依据奈奎斯特采样定律可知, 如果要无失真地还原出原始信号, 采样率需要满足不小于函数最大频率的 2 倍。由于数字图像本身就是离散的数值, 所以使用离散傅里叶变换对图像做频域的分析 and 处理非常适用。为了加速离散傅里叶变换, 又衍生出了快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)。

对离散信号 $x(n)$ 进行 DFT, 可以将信号从时域变换到频域再进行后续处理, DFT 变换公式可以简写为

$$X(k) = W^{nk} x(n) \quad (1-1)$$

其中, $W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$, 很容易证明 W^{nk} 具有周期性和对称性, 在此基础上可以把 N 点的 DFT 运算分解为两组 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 运算, 然后取和, 从而得到信号的 FFT 公式:

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$$

$$X\left(\frac{N}{2} + k\right) = G\left(\frac{N}{2} + k\right) - W_N^k H\left(\frac{N}{2} + k\right) = G(k) + W_N^k H(k) \quad (1-2)$$

其中, $G(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{rk}$, $H(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{rk}$, 这样可以将 1 个 N 点的 DFT

分解为 2 个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT, 这里需要注意的是 $G(k)$ 和 $H(k)$ 只有 $\frac{N}{2}$ 个点, 即 $r=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$, 而 $X(k)$ 有 N 个点。以 $N=4$ 为例进行说明, 此时

$$\begin{cases} X(0) = G(0) + W_4^0 H(0) \\ X(1) = G(1) + W_4^1 H(1) \\ X(2) = G(2) + W_4^2 H(2) \\ X(3) = G(3) + W_4^3 H(3) \end{cases} \quad (1-3)$$

可用图 1-2 的方式来表示式(1-3)。

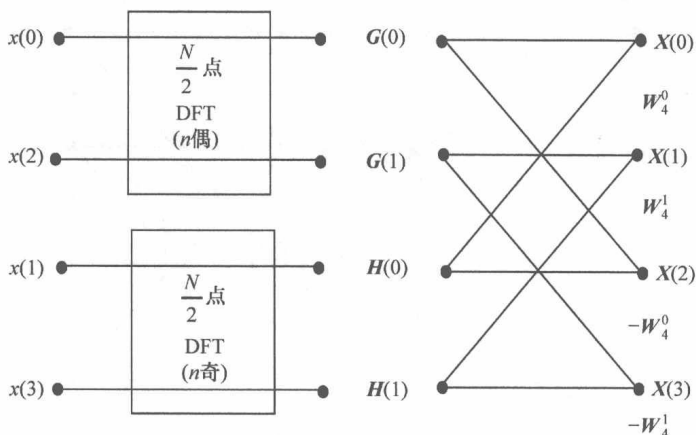


图 1-2 将 N 点的 DFT 分解为 2 个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT ($N=4$)

在图 1-2 中, 基本运算单元呈现蝴蝶形, 常简称为蝶形图, 如图 1-3(a)所示。初看上去, 这里的一个蝶形运算包括两次复数乘法和两次复数加法, 但里面有重复运算, 可以简化。如图 1-3(b)所示, 可以将运算量减少到只有一次复数乘法和两次复数加减法。

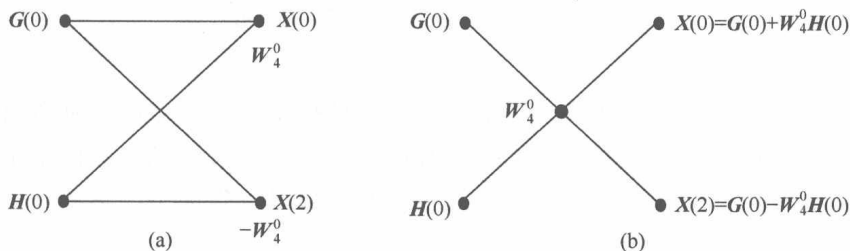


图 1-3 蝶形运算单元

图 1-2 左边部分,为了求出 $G(k)$ 和 $H(k)$,可以将 $x(n)$ 按奇偶分别组合成两个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 运算,对于 $N=4$,可得到式(1-4):

$$\begin{cases} G(0) = x(0) + W_2^0 x(2) \\ G(1) = x(0) - W_2^0 x(2) \\ H(0) = x(1) + W_2^0 x(3) \\ H(1) = x(1) - W_2^0 x(3) \end{cases} \quad (1-4)$$

同样的原理,这些运算也可以画成蝶形图,于是图 1-2 可以具体化为图 1-4 所示蝶形图(此转化过程中省略了加权系数 W_2 的下标,用 W 表示)。

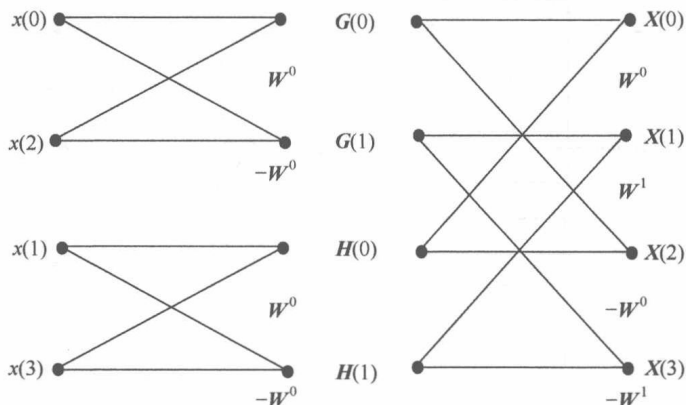


图 1-4 FFT 运算蝶形图($N=4$)

根据上述内容,在离散信号 $x(n)$ 进行 FFT 的过程中,通过 $G(k)$ 、 $H(k)$ 获得 $X(k)$,共包含 $\frac{N}{2}$ 个蝶形运算,因此,共需要 $\frac{N}{2}$ 次复数乘法和 N 次复数加减法(对于 $N=4$,共做了 2 次乘法和 4 次加减)。

1.2 信号处理应用领域

在现代化科学技术发展的过程中,信号处理技术已经深入应用到各行各业的发展中,通信领域、多媒体传输压缩、音视频处理、语音识别、图像识别、医学工程、医学检测、工业检测、雷达声呐、股票分析等,生活中已离不开信号处理技术。

随着计算机技术与信息处理技术的飞速发展,人们越来越注重信息获取的速度与质量,尤其是伴随着硬件技术的一次次跨越,软件算法的复杂度逐渐提升,人类社会迎来了多媒体信息的爆炸式增长时代。图像和视频处理技术成为信号与

信息处理技术的重要内容之一。但是硬件的跨越速度有其自身的瓶颈，当人们逐渐发现摩尔定律不再是一成不变的铁律时，“利用现有硬件技术，提高信息质量”再次成为信息处理技术的核心。

在当今多媒体信号处理的很多重要应用中，通常需要使用高分辨率(high resolution, HR)图像与视频进行后期的数据处理和分析。例如，刑侦领域可通过一幅照片或者一段视频获取犯罪嫌疑人的清晰图像；军事领域获取卫星遥感影像精确定位某个对象；人工智能领域的无人驾驶汽车等。更高的分辨率意味着图像的更多细节被解读，一幅图像的分辨率按照种类可分为：像素分辨率、空间分辨率、光谱分辨率、时间分辨率和辐射分辨率。在本书中图像分辨率通常指图像的空间分辨率。一幅图像由许多微小的图像元素——像素构成，空间分辨率是指整幅图像的像素密度，每个单位面积以像素为单位进行测量。图 1-5 所示为典型的图像系统分辨力测试图。

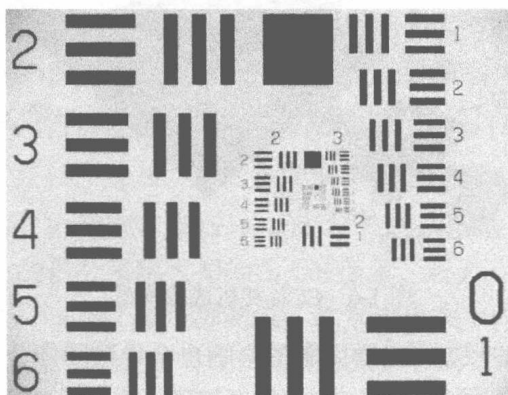


图 1-5 美国标准 USAF-1951 分辨力测试图

USAF-1951 分辨力测试图是符合 MIL-STD-150A 标准的分辨力测试图案，由美国空军于 1951 年创建。尽管 MIL-STD-150A 标准已于 2006 年 10 月 16 日废除，但这种测试图仍广泛地应用于光学成像系统(如显微镜和相机)的分辨能力测试。该图案包括由多组三条短线构成的组合，短线的尺寸从大到小，成像系统无法辨明的最大短线组为其分辨能力极限。

图像的空间分辨率首先受到图像获取设备中传感器尺寸的制约，图 1-6 所示为 CCD(charge-coupled device)相机的成像模型。成像过程如下：①当用相机拍摄景物时，景物反射的光线通过相机的镜头透射到 CCD 的检测阵列上；②当 CCD 曝光后，光电二极管受到光线的激发释放出电荷，感光元件的电信号便由此产生；③CCD 控制芯片利用感光元件中的控制信号线路对光电二极管产生的电流进行控制，由电流传输电路输出，CCD 会将一次成像产生的电信号收集起来，统一输出到放大器；④经过放大和滤波后的电信号被送到模拟/数字转换器(A/D)，由

A/D 将电信号转换为数字信号,数值的大小和电信号的强度即电压的高低成正比;⑤将数字信号输入数字信号处理器(DSP)中,对这些图像数据进行色彩校正、白平衡处理等后期处理,编码为相机所支持的数据格式;⑥最后存储为图像文件写入内置或外置存储器。由此可见,成像设备上的图像分辨率取决于 CCD 的检测阵列密度,若其阵列密度不够,会把降晰的模拟信号转换为离散的、量化的二维图像数据。此外在模拟信号转数字信号的过程中,会含有各种误差引起的噪声,如量化误差、传感器测量误差、模型误差等。

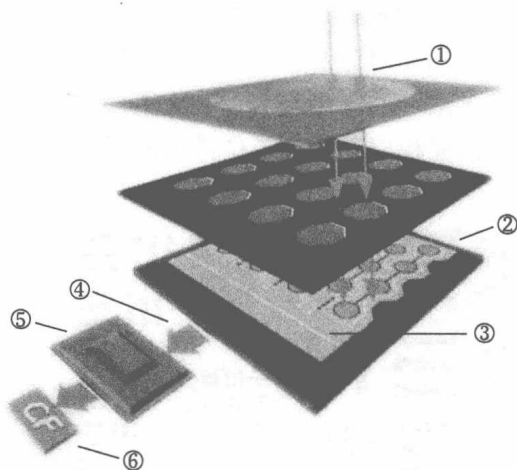


图 1-6 CCD 相机成像模型

除了传感器尺寸的限制,光学因素的影响也会导致图像分辨率的下降,主要表现为模糊、噪声和变形。例如,镜头模糊[如点扩散函数(point spread function, PSF)、透镜像差的影响、孔径的衍射以及由运动引起的光学模糊等。在图像的成像、传输和存储过程中,也会引入不同类型的噪声(如高斯噪声、椒盐噪声等)。此外,在信号的采样过程中,欠采样效应会造成图像的频谱混叠,使获取的图像因变形而发生降质,尤其是经过压缩的图像,会产生量化噪声和编码效应等。图 1-7 所示为高分辨率图像降质为低分辨率(low resolution, LR)图像的过程。

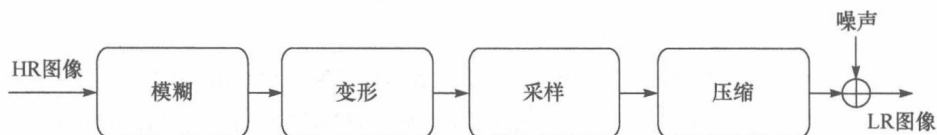


图 1-7 图像降质过程

提高图像分辨率最直接的办法就是提高采集设备传感器的密度,然而高密度的图像传感器(如 CCD)的价格相对昂贵,在一般应用中难以承受;另外,成像系统受其固有传感器排列密度的限制,目前已接近极限。提高图像分辨率的另一种

方法是提高感光元件尺寸,但这将导致电容的增加和电荷转移速度的下降。综上所述,物理手段提高图像的分辨率的能力极为有限,本书所提出的超分辨率(super resolution, SR)技术,可以通过软件提高图像分辨率,甚至突破图像固有信息的限制,获得更多图像的高频细节信息。

1.3 超分辨率技术概述

超分辨率技术是指从一幅或多幅观测的低分辨率图像中重建高分辨率图像,从而增加图像中的高频分量并消除低分辨率传感器所造成的降质影响的过程。

超分辨率重建技术可追溯到 1984 年 Tsai 和 Huang 提出的利用多帧图像序列来恢复高分辨率图像方法,之后大量方法被提出,研究热点也从频域转向空间域,从信号处理转向机器学习。由于使用频域方法可处理的图像观测模型非常有限,且实际问题往往更加复杂,目前研究者主要围绕图像的空间域进行处理。空间域方法可以灵活地建立图像降质数学模型,其既定降质模型描述如下。

给定根据不同降质方法获得的 LR 观测图像集合 $\tilde{\mathbf{I}}_L = \{\mathbf{I}_L^k\}_{k=1}^K$, 其中 $\mathbf{I}_L^k(x, y)$ 为第 k 幅图像中的像素点 $(x, y) \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 的灰度值。设抽取率 $r \geq 1$, 则重建后的 HR 图像记为 $\mathbf{I}_H$, 且 $\mathbf{I}_H(x, y)$ 为像素点 $(x, y) \in \mathbb{R}^{rM \times rM}$ 的灰度值。

高分辨率网格上的低分辨率数据如图 1-8 所示,若 $K=3$, $M=4$, $r=2$, 可理解为有三帧大小为 4×4 的 LR 观测图像,欲重建出大小为 8×8 的 HR 图像。用符号(圆形、三角形、正方形)表示各帧的 LR 像素点,则圆形帧表示 HR 图像的隔行扫描帧,记为关键帧;三角形帧的采样位置是关键帧的简单平移;而正方形帧和关键帧之间的运动包括平移、旋转和缩放。基于重建的超分辨率方法就是利用这三幅 LR 帧复原 HR 网格上的像素值。

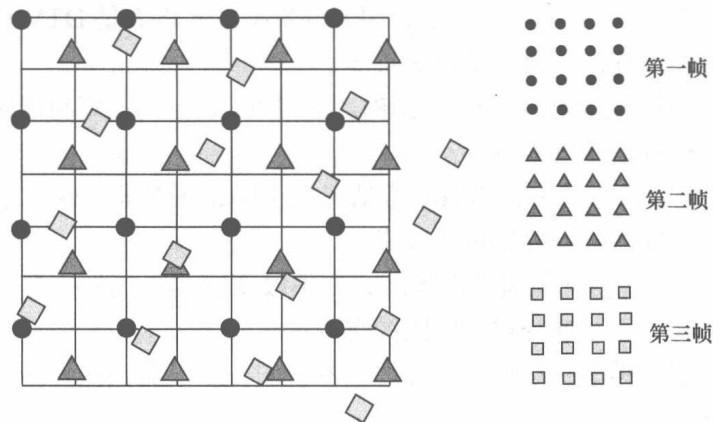


图 1-8 高分辨率网格上的低分辨率数据

若将像素的平移、旋转和缩放归纳为两类：仿射变换和线性空间降晰，原始 HR 图像记为 $\hat{\mathbf{I}}_{\text{H}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，则传统的多帧超分辨率重建退化模型描述为

$$\mathbf{I}_{\text{L}}^k = \mathbf{S}_k \mathbf{L}_k \mathbf{G}_k \hat{\mathbf{I}}_{\text{H}} + \mathbf{E}_k \quad (1-5)$$

其中， $\mathbf{S}_k$ 、 $\mathbf{L}_k$ 、 $\mathbf{G}_k$ 、 $\mathbf{E}_k$ 分别表示降采样矩阵、线性空间降晰矩阵、仿射变换矩阵和加性零均值高斯噪声矩阵。为了保证观测的数据能够为重建提供充分的信息，需满足： $N^2 < KM^2$ 。降晰矩阵 $\mathbf{L}_k$ 由成像系统的点扩展函数决定，Elad 和 Feuer 指出在某些情况下，可以认为超分辨重建过程对降晰函数中的误差具有鲁棒性，即允许降晰函数的估计存在误差。

式(1-5)可表示为大规模线性系统：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\text{L}}^1 \\ \mathbf{I}_{\text{L}}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{\text{L}}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{G}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_K \mathbf{L}_K \mathbf{G}_K \end{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_{\text{H}} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_K \end{bmatrix} = \mathbf{D}_k \hat{\mathbf{I}}_{\text{H}} + \mathbf{E}_k \quad (1-6)$$

由于降质矩阵 $\mathbf{D}_k$ 相对 $\hat{\mathbf{I}}_{\text{H}}$ 非常稀疏，此线性系统为典型的病态问题。此外，在实际的图像应用领域，降质矩阵中的三个子矩阵并未给定，均需从 LR 观测矩阵预测得来，增加了线性系统的病态性。

超分辨率重建技术可以克服图像系统内在分辨率的限制，改进图像处理中大多数图像的性能，因而这一技术在视频、成像、遥感、医学、监控和军事等领域具有十分重要的应用，具体有如下几方面。

(1) 广泛应用的电容层析成像技术(ECT)中，由于电容传感器具有“软场”特性且受微电容测量噪声等因素影响，其图像失真严重，利用超分辨率技术可有效地提高图像重建精度。

(2) 随着高清晰度电视的发展，利用超分辨率技术将大量 DTV 信号转化为与 HDTV 接收机相匹配的信号显得极为重要。

(3) 在医学成像系统中(如 CT、MRI 和超声波仪器等)，可利用超分辨率重建技术对病变目标进行精细检测。

(4) 在安全监控系统中，当有异常情况发生时，可对监控录像进行超分辨率重建，从而为事件的处理提供重要线索。

(5) 当处理军事与气象遥感图像时，在不改变探测系统的前提下，通过超分辨率重建可实现高于系统分辨率的图像观测。

有关图像超分辨率重建技术的分类，各自的特点以及国内外研究的现状将在 1.4 节进行阐述。