普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

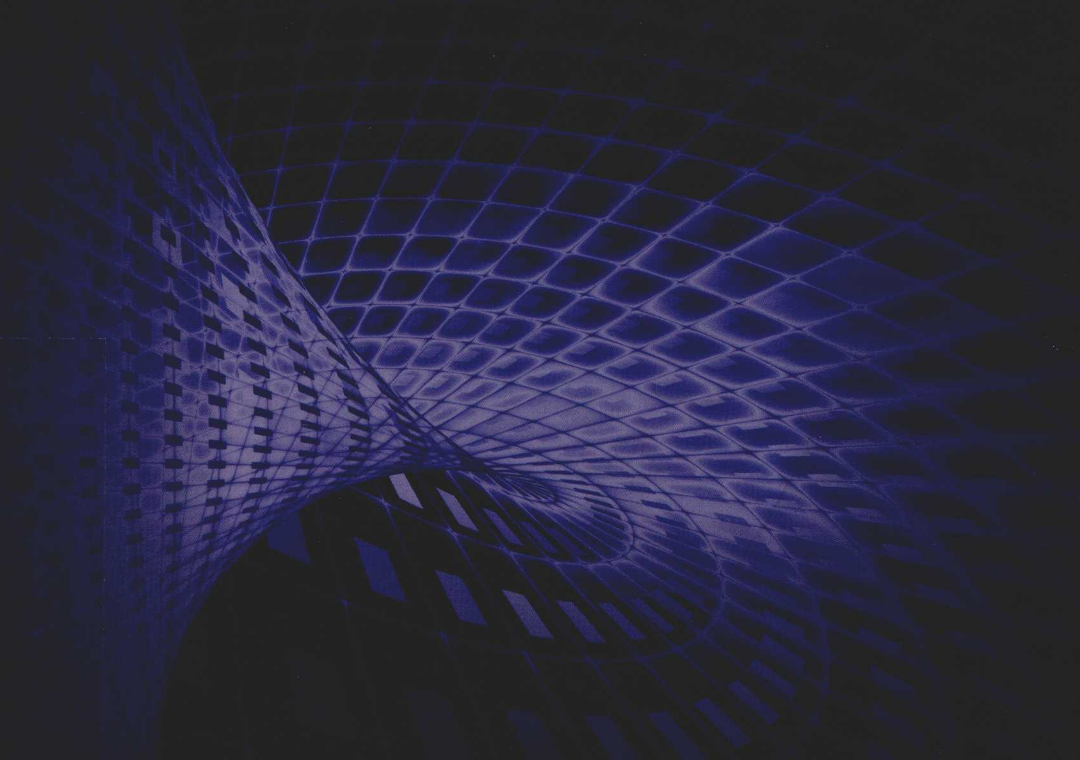
Nucleus 新核心

理工基础教材

概率论与数理统计

第五版

冯卫国　武爱文　编



上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

概率论与数理统计

第五版

冯卫国 武爱文 编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是在2014年出版的《概率论与数理统计》(第四版)的基础上修订而成的。内容包括概率论(1—5章)与数理统计(6—8章)两部分。概率论部分介绍了概率论的基本概念、随机变量(包括多维随机变量)及其分布、随机变量的数字特征、大数定理和中心极限定理;数理统计部分介绍了数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。

本书可作为高等院校的工业、农业、林业、医学等专业及成人、高职教育各非数学专业的教材或教学参考书,也可供自学者和有关科技工作者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/冯卫国,武爱文编.—5版.
—上海:上海交通大学出版社,2018.9(2019重印)
ISBN 978-7-313-19966-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①冯… ②武… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第186845号

概率论与数理统计
(第五版)

编　　者:冯卫国　武爱文
出版发行:上海交通大学出版社
地　　址:上海市番禺路951号
邮政编码:200030
电　　话:021-64071208
印　　制:常熟市大宏印刷有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:710mm×1000mm　1/16
印　　张:15
字　　数:280千字
版　　次:1998年6月第1版　2018年9月第5版
印　　次:2019年1月第21次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-19966-9/O
定　　价:38.00元

第五版前言

概率论是对随机现象统计规律演绎的研究,数理统计是对随机现象统计规律归纳的研究。统计方法的数学理论要用到很多近代数学知识,如函数论、拓扑学、矩阵代数、组合数学等,但关系最密切的是概率论。概率论是数理统计学的基础,数理统计学是概率论的一种应用。尽管在方法上两者如此明显的不同,但作为一门学科,它们却互相渗透,互相联系。本书分两部分,第一部分为概率论,包括1至5章,由冯卫国编写;第二部分为数理统计,包括6至8章,由武爱文编写。

由于近代科学技术发展势头迅猛,计算机不断更新,人工智能、互联网、大数据等广泛应用于各领域各行业,具有扎实数学功底的人才在新生行业大受欢迎。除高等数学外,开设概率统计课程(非数学专业)的大专院校越来越多。

本书从1998年6月第1版以来,已使用了20年。其间,2003年8月、2010年3月、2013年8月分别做了三次内容上的增减与补充,感谢使用本书的同仁提出很多中肯和宝贵的意见。本次修订则着重于例题与习题的调整,使之更适合非数学专业概率统计课程的教与学。

本书的课内教学需要36～45学时,若取下限的话,教师可酌情删去标注“*”的章节与段落。

限于编者水平,书中存在的错误,恳请读者批评指正。

目 录

1 概率论的基本概念

概率论是研究随机现象中数量规律的数学学科.它完全有别于迄今我们学过的其他数学分支,如微积分、线性代数等,因为后者研究的对象都是确定性现象.

本章首先介绍概率论的一系列专用术语,然后对随机事件的概率进行定义,并由此导出概率的基本性质,最后讨论几种特殊场合下的概率计算问题:古典概率、几何概率、条件概率.

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机试验

首先,我们把试验作为一个含义广泛的术语,它既包括各种科学实验,也包括对某一事物的某一特征进行的观察.

在进行个别试验时其结果具有不确定性,但在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,称为**随机现象**.为研究随机现象而进行的观察或实验,称为**试验**.若一个试验满足如下 3 个特点,则称其为**随机试验**:

(1) 在相同条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且事先知道试验的所有可能结果;

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

记随机试验为 E.例如:

E_1:掷一颗骰子,观察出现的点数.

E_2:记录某一时段通过某一路口的机动车数量.

E_3:测试某型号电脑的使用寿命.

以上试验都具有上述 3 个特点.

1.1.2 随机事件与样本空间

随机现象的某种结果,称为**随机事件**,简称为**事件**,记为 A,B 或C 等.

在一次试验中,不论结果有多少个,总可从中找出这样一组基本结果,满足:

(1) 每一次试验,必然出现且仅出现其中的一个基本结果;

(2) 任何事件,都是由其中若干个基本结果组成.

随机试验中的每一个基本结果,称为**基本事件**,或称为**样本点**,记为 ω.基本事

件的全体，称为试验 E 的**样本空间**，记为 Ω.

对应 1.1.1 中随机试验 E 的样本空间为

E_1：$\Omega=\{(1\text{ 点}),(2\text{ 点}),\cdots,(6\text{ 点})\}$；

E_2：$\Omega=\{(0\text{ 辆}),(1\text{ 辆}),(2\text{ 辆}),\cdots\}$；

E_3：$\Omega=\{t\text{ 小时}\mid t\in[0,+\infty)\}$.

所谓事件 A 发生，是指在一次试验中，当且仅当 A 中包含的某个样本点出现.例如在 E_1 中，设事件 A 为"出现的点数小于 3"，则 $A=\{(1\text{ 点}),(2\text{ 点})\}$，设事件 B 为"出现偶数点"，则 $B=\{(2\text{ 点}),(4\text{ 点}),(6\text{ 点})\}$.若掷一颗骰子，得点数 1，则可称事件 A 发生，事件 B 未发生.

在每次试验中，一定不发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$，它是样本空间的一个空子集.而每次试验一定发生的事件称为**必然事件**，记为 Ω，它是样本空间的一个子集.显然，$\varnothing$ 与 Ω 已不是随机事件，引入它们是为了讨论问题的方便.

1.1.3 事件之间的关系及其运算

由于事件是若干个样本点的集合，因此事件之间的关系及运算可用集合之间的关系及运算来处理.如果我们有了一些事件，则通过这些事件的运算，便可得到其他事件.

1）事件的包含与相等

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，即 A 的样本点都在 B 中，则称事件 B **包含**事件 A，记为 $A\subset B$.

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

2）事件的和

事件 A 和事件 B 中至少有一个发生的事件，即 A 和 B 的样本点合并而成的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和**，记为 $A\cup B$.事件的和也称为事件的**并**.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3）事件的积

事件 A 和事件 B 同时发生的事件，即 A 和 B 的公共的样本点所构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**积**，记为 $A\cap B$，也可简记为 AB.事件的积也称为事件的**交**.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，即属于 A 而不属于 B 的样本点所构成的事件，称为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$.

5）事件的互斥

若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互斥的，或称 A 与 B 是**互不相容**的.A 与 B 互斥，是指事件 A 和事件 B 不能同时发生，例如基本事件是两两互斥的.

6）事件的对立

若 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 是**对立**的，或称 A 与 B 互为**逆事件**.A 与 B 对立，是指事件 A 和事件 B 既不能同时发生又不能同时不发生，即在每次试验中，A 和 B 有且仅有一个发生.若 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，显然，$\overline{A}=\Omega-A$.若 A 与 B 互逆，则 $\overline{A}=B$，或 $\overline{B}=A$.

由定义可知，对立事件必为互斥事件，其逆不真.

以上事件之间的关系及运算可用**文氏**（Venn）图 1-1～图 1-6 直观地表示.这里矩形表示样本空间 Ω，矩形内的点表示基本事件，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 和事件 B，阴影部分表示 A 与 B 的各种关系及运算.

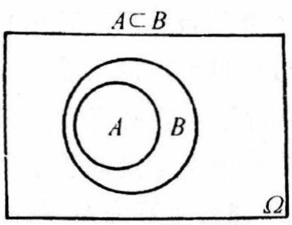


图 1-1

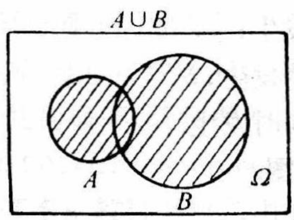


图 1-2

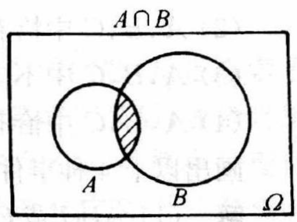


图 1-3

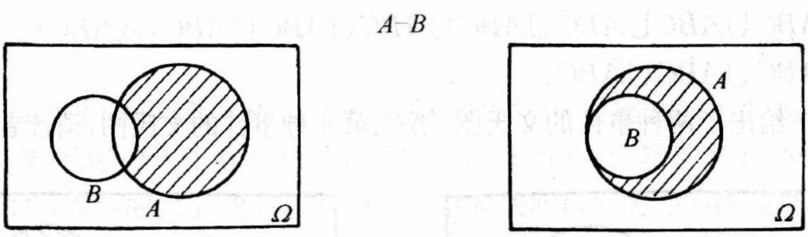


图 1-4

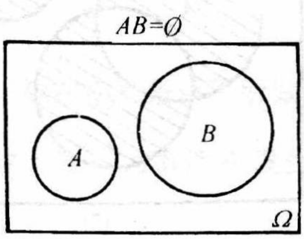


图 1-5

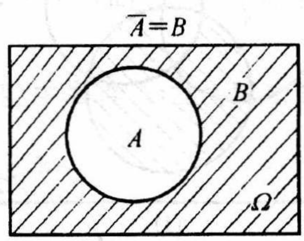


图 1-6

7) 事件的运算律

设 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$ 为事件，则有：

交换律 $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

反演律 ［也称德・摩根(De Morgan)律］

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

一般地，对有限个及可列多个事件也有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k;\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k;$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k;\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k.$$

例 1.1 设 A,B,C 为 3 个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A,B 中至少有一个不发生，C 必发生；

(2) A,B,C 中恰有一个发生；

(3) A,B,C 中不多于两个发生；

(4) A,B,C 中恰有两个同时发生.

画出以上 4 种事件的文氏图.

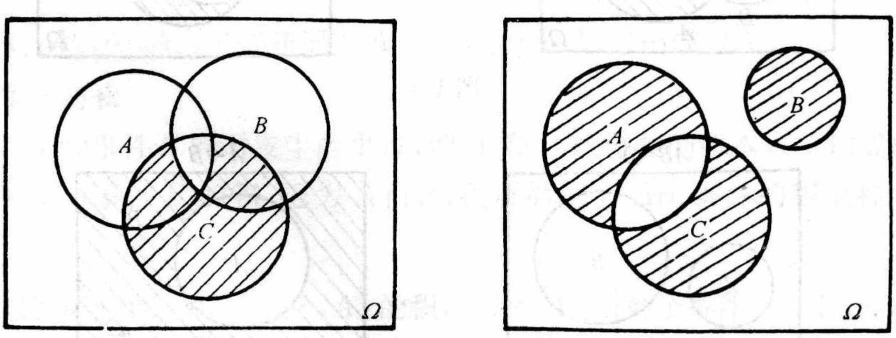
解 (1) $\overline{AB}C$ 或 $C-AB$；

(2) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

(3) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$，或 $\overline{ABC}$；

(4) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

图 1-7 给出了两种事件的文氏图，第 3、第 4 种事件的文氏图，请读者自行画出.



(1) (2)

图 1-7

例 1.2 试求事件“甲种产品盈利而乙种产品不盈利”的对立事件.

解 设A表示“甲种产品盈利”,B表示“乙种产品盈利”,则题设事件可表为$A\cap\overline{B}$.求其逆事件得

$$\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup B,$$

即所求对立事件为“甲种产品不盈利或乙种产品盈利.”

例 1.3 化简事件$\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)\overline{AC}}$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\cup C}\cup\overline{\overline{AC}}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\cap\overline{C}\cup AC\\&=(A\cup B)\overline{C}\cup AC=A\overline{C}\cup B\overline{C}\cup AC\\&=A(\overline{C}\cup C)\cup B\overline{C}=A\Omega\cup B\overline{C}\\&=A\cup B\overline{C}.\end{aligned}$$

注 在化简过程中,有时候需添加括号,因为事件的运算顺序为逆、交、并、差,括号优先.

1.2 概率的定义及其计算

概率(也称几率或然率)这一术语已为当今越来越多的人所熟悉,它是随机事件出现的可能性的量度.其起源与博弈问题有关.

如何对概率进行定义?我们的前人对这个看似并不复杂的问题,足足探索了300多年.在经历了古典概率、几何概率、统计概率等版本的概率定义后,才最终接受了苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A. H. Колтогоров)于1933年建立的概率公理化体系,从而有了目前为大多数概率论教科书所采用的概率公理化定义.什么是概率的公理化定义?这要从随机事件的频率谈起.

1.2.1 频率

人们常常通过实际观察来确定某个随机事件发生的可能性的大小.例如,遇到某种天气,人们常会说“今天十有八九要下雨”,这个“十有八九”就是表示“今天下雨”这一事件发生的可能性的大小.这是人们通过大量实践所得出的一种统计规律,即气象资料显示,已经历过n次这种天气,其中$0.8n$(或$0.9n$)天是下雨的.于是人们也就认同了$0.8n$与n的比值在一定程度上反映了“今天下雨”这一事件发生的可能性的大小.

定义 1.1 **称在相同条件下所做的n次试验中事件A发生的次数n_A为A发生的频数,并称比值$\frac{n_A}{n}$为事件A发生的频率,记作**

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由定义可知，频率具有如下基本性质：

(1) 对任一事件A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) 对必然事件Ω，有 $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互斥，则$f_n(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_n(A_i)$.

历史上著名的统计学家布丰(Buffon)和皮尔逊(K.Pearson)曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果如下：

试验者	n	n_A	$f_n(A)$
布　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

上表中A表示“出现正面”这一事件.

这两个学者的试验告诉我们如下两点：

(1) 同一事件的频率是不全相同的，即频率具有随机波动性；

(2) 随着试验次数的增大，频率的波幅会逐渐减小，且会稳定于某个数附近，即频率具有稳定性.

在本书第5章的大数定律中，我们将看到当试验次数n很大时，事件A发生的频率与某个常数p的偏差超过任意正数ε的可能性几乎没有.

对每个事件A都有这样一个客观存在的常数p与之对应，这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性，并不断地为人类的实践所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性.我们用这个频率稳定值p来表示事件A发生的可能性的大小是合适的，这就是概率的统计定义.

1.2.2 概率的统计定义

定义1.2 在相同条件下所做的n次试验中，当$n\to\infty$时，事件A发生的频率$f_n(A)$稳定在某常数p附近，则称p为事件A发生的概率，记作

$$P(A)=p.$$

此定义是建立在试验及其统计数据的基础上的，故称之为**概率的统计定义**.它有很直观的试验背景，容易被人接受，但不足之处也不少：① 在实际中不可能对每一事件都做大量的试验，以期得到频率的稳定值；② 定义中数p的存在性并未给出严格的证明，而只是经过大量试验之后的推断；③ 定义中对频率与概率的关系的描述是粗糙的，非数学化的，容易造成误解.例如，依定义描述，使人认为概率就是频率的极限，即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = P(A).$$

学完第5章后将知道，概率确实是频率的某种极限，但并非是上式所表述的极限，而是另外意义下的极限.

由于定义1.2的上述不足，人们有理由寻找更好的定义概率的方式，概率的公理化定义由此应运而生.

1.2.3 概率的公理化定义

定义1.3 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若按照某种方法对 E 的每一事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，且满足以下公理：

(1) **非负性：**$P(A)\geqslant 0$，

(2) **归一性：**$P(\Omega)=1$，

(3) **可列可加性：对 E 的任意一列两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由概率的这一定义可导出概率的如下性质.

性质1 不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则 $\varnothing=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，于是由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

而实数 $P(\varnothing)\geqslant 0$，由上式得 $P(\varnothing)=0$.

性质2 概率具有有限可加性，即若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

上式称为**加法公式**.

证 因为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots,$$

所以由概率的可列可加性及性质1得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+\\&\quad P(A_n)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质3 对任何事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证 因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\varnothing$. 所以由性质2可有

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

即得
$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

上式称为逆事件概率公式.当事件 A 的概率不易计算而 $\overline{A}$ 的概率却极易计算时可采用此公式.

推论 对任一事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$.

性质 4 对事件 A,B,若 $A\subset B$,则有
$$P(B-A)=P(B)-P(A),\ P(B)\geqslant P(A).$$

证 由 $A\subset B$ 及图 1-1 可知
$$B=A\cup(B-A),\ 且\ A(B-A)=\varnothing.$$
由性质 2 可得
$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$
即
$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$
再由 $P(B-A)\geqslant 0$ 得
$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质 5 对任意两事件 A,B,有
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证 由图 1-2 可知
$$A\cup B=A\cup(B-A),B=AB\cup(B-A),$$
且
$$A(B-A)=\varnothing,\ AB(B-A)=\varnothing,$$
故得
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A),$$
$$P(B)=P(AB)+P(B-A).$$
将上面两式相减,并将 $P(B)$移至等号右端,即得
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 5 常被称为广义加法公式.

性质 5 的推广:对任意 3 个事件 A,B,C,有
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

一般地,对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有
$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1.4 某人欲外出旅游两天.据天气预报,第一天下雨的概率为 0.6,第二天下雨的概率为 0.3,两天都下雨的概率为 0.1.试求:

(1) 第一天下雨而第二天不下雨的概率;

(2) 至少有一天下雨的概率;

(3) 至少有一天不下雨的概率;

(4) 两天都不下雨的概率.

解 设 A_i 表示第 i 天下雨的事件($i=1,2$).由已知条件可有

$$P(A_1)=0.6,\ P(A_2)=0.3,\ P(A_1A_2)=0.1.$$

(1) 欲求概率的事件为

$$A_1\overline{A}_2=A_1-A_2=A_1-A_1A_2,$$

且 $A_1A_2\subset A_1$,由性质 2 可得

$$P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1-A_1A_2)=P(A_1)-P(A_1A_2)=0.5;$$

(2) 由性质 5 可得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2)&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=0.6+0.3-0.1=0.8;\end{aligned}$$

(3) A_1A_2 的逆事件是至少有一天不下雨,故

$$P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2)=1-0.1=0.9;$$

(4) 由反演律可知两天都不下雨的事件为 $\overline{A}_1\ \overline{A}_2=\overline{A_1\cup A_2}$,故

$$P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2)=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-0.8=0.2.$$

在概率的计算中,性质 3 经常被用到,因为它常能使计算变得简单明了.如果我们不利用逆事件,则以上题 3 和题 4 的计算将会麻烦得多.

1.2.4 古典概型

下面给出概率的古典定义及计算公式.

定义 1.4 设随机试验 E 满足下列条件:

(1) E 的样本空间只有有限个样本点,即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

(2) 每个样本点的发生是等可能的,即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n),$$

则称此试验为古典概型或等可能概型.

由于样本点是两两互斥的,据有限可加性和定义 1.4 的条件 2 可有

$$1=P(\Omega)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\omega_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(\omega_i)=nP(\omega_i),$$

得

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

设事件 A 包含了 k 个基本事件 $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}$，即

$$A=\bigcup_{m=1}^{k}\omega_{i_m}\quad(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n),$$

则有

$$P(A)=P(\bigcup_{m=1}^{k}\omega_{i_m})=\sum_{m=1}^{k}P(\omega_{i_m})=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$$

$$=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}.$$

古典概型中事件的概率称为**古典概率**.由上式可见古典概率的计算完全归结为对样本空间中基本事件总数和所求事件包含的基本事件数的计算.当然，一个试验是否属于古典概型或者说如何设计样本空间，使其成为古典概型，这是在运用古典概率计算公式之前，必须首先解决的.

由于样本空间的大小会因设计的不同而不同，所以古典概率的计算会变得花样繁多，且计算的繁简程度也就大不相同了.一般地，当基本事件总数相当大的时候，可利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识进行计算.

例 1.5 一次投掷 2 颗骰子，设 A 表示“出现点数之和为奇数”的事件，求 $P(A)$.

解 根据基本事件的不同设计，就有不同解法.

设计一 以数对 (i,j) 表示基本事件 $(i,j=1,2,\cdots,6)$，则
基本事件总数 $n=36$，A 所包含的基本事件数 $k=18$，于是

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

设计二 以(奇，奇)，(奇，偶)，(偶，奇)，(偶，偶)为基本事件，则
基本事件总数 $n=4$，A 所包含的基本事件数 $k=2$，于是

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

设计三 以 $\omega_1=\{$点数之和为奇数$\}$、$\omega_2=\{$点数之和为偶数$\}$为基本事件，则
基本事件总数 $n=2$，A 所包含的基本事件数 $k=1$，于是

$$P(A)=\frac{1}{2}.$$

显然设计三最好，它使得样本空间达到最小.

例 1.6 一口袋装有 5 个乒乓球，其中 3 个白色，2 个黄色.现从袋中取球 2 次，每次 1 个，取后不再放回.试求：

(1) 2 个球都是白色的概率；

(2) 2 个球颜色不同的概率；

(3) 至少有 1 个黄球的概率.

解 设 A 表示"2 个球都是白色"的事件，B 表示"2 个球颜色不同"的事件，C 表示"至少有 1 个黄球"的事件.考虑取球的先后次序，样本空间的基本事件总数 $n=P_5^2=5\times4=20$. 所以

A 所包含的基本事件数

$$k_A=P_3^2=3\times2=6;$$

B 所包含的基本事件数

$$k_B=P_3^1P_2^1+P_2^1P_3^1=3\times2+2\times3=12;$$

C 所包含的基本事件数

$$k_C=P_2^1P_3^1+P_3^1P_2^1+P_2^2=2\times3+3\times2+2=14.$$

故得

(1) $P(A)=\dfrac{k_A}{n}=\dfrac{3}{10}$;

(2) $P(B)=\dfrac{k_B}{n}=\dfrac{3}{5}$;

(3) $P(C)=\dfrac{k_C}{n}=\dfrac{7}{10}$.

本例也可另外设计样本空间.若对取出的 2 个球不考虑其先后次序，则

$$n=C_5^2=10,\ k_A=C_3^2=3,\ k_B=C_3^1C_2^1=6,\ k_{\overline{C}}=C_3^2=3,$$

于是

$$P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{3}{10},\quad P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{3}{5},$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{k_{\overline{C}}}{n}=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}.$$

值得注意的是，样本空间的设计虽然可以不同，但是必须满足等可能性的要求.本例若视白球间是无区别的，黄球间也是无区别的，则样本空间

$$\Omega=\{(白,白),(白,黄),(黄,白),(黄,黄)\}.$$

此时，基本事件的发生不再是等可能的了，因此不能用古典概率的方法来计算事件的概率.

例 1.7 袋中有 a 个白球，b 个黑球，依次将球一个个摸出，并不再放回，求第 k 次($1\leqslant k\leqslant a+b$)摸出白球(设为事件 A)的概率.

解 我们用几种不同的方法求解.

方法一 选排列的方法(又选又排).

将球编号，则基本事件总数就是从 $a+b$ 个编号的球中选出 k 个进行排列的排