线性代数应用案例分析

主　编　郭文艳
副主编　王小侠　李　灿　王文成

科 学 出 版 社

线性代数应用案例分析

主　编　郭文艳
副主编　王小侠　李　灿　王文成

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书旨在架起线性代数理论与应用之间的桥梁，精选工程、经济、自然科学研究以及日常生活中的案例，从分析、模型建立与求解、结论三个方面对应用案例进行剖析，使得线性代数理论在纵深方向得以延展。全书共 7 章，包括行列式的应用、矩阵的应用、向量理论和应用、线性方程组的应用、特征值与特征向量的应用、二次型的应用以及综合案例分析等。书中的案例立足于用线性代数理论解决实际问题的思路和方法的阐述，力求简单明了，深入浅出。模型求解中的复杂计算借助相应的数学软件完成，避免陷入复杂的计算而削弱了对思想方法的理解。

本书可作为高等院校理工科各专业“线性代数”课程的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数应用案例分析/郭文艳主编. —北京：科学出版社，2019.8
ISBN 978-7-03-062134-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①线性代数 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 179020 号

责任编辑：李 萍／责任校对：郭瑞芝
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2019 年 8 月第一次印刷 印张：12 3/4
字数：257 000

定价：95.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

线性代数是工科各专业学生的一门必修课程，其内容涉及许多应用领域。对于该门课程的学习，不仅要求学生掌握基本的数学理论，更重要的是要做到学以致用。为了开拓学生视野，激发学生的学习兴趣，并培养学生将线性代数知识应用于实际问题的能力，同时提高学生的数学实践能力和创新能力，我们特意编写了本书。本书精选了工程、经济、自然科学研究以及日常生活中的案例，以数学建模的框架进行线性代数知识的深化，为学生搭建线性代数理论学习与实践应用的桥梁。

全书共 7 章，前 6 章每章主要包括三部分内容：基本理论、应用案例分析和习题。基本理论是对该章涉及内容的总结和归纳，便于系统了解相关理论知识。应用案例分析部分为本书的重点内容，以不同应用领域的具体问题为驱动，利用相关的基本知识进行建模与分析，提供线性代数知识解决实际问题的思路和方法，便于学生将所学知识应用于实践。习题部分设置一定数量的应用题，可以扩展和加深对知识的理解与应用。第 7 章的综合案例分析部分，针对 2 个应用性强的应用案例进行深入分析，旨在帮助和指导学生后续课程的学习与培养学生的建模思维，对参加数学建模竞赛以及参与实际课题研究的学生更值得一读。

本书的编写是在陕西省教学研究项目“深化数学实践教学，提高学生数学应用能力”和陕西省教学名师工作室的大力支持下完成的。第 1 章和第 7 章由李灿完成，第 2 章由王小侠完成，第 3 章和第 4 章由郭文艳完成，第 5 章和第 6 章由王文成完成。在本书编写过程中，得到了秦新强教授、戴芳教授等的大力支持，线性代数教学团队的老师对本书的编写提出了宝贵意见和建议，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳请读者批评指正。

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式伴随着线性方程组的求解而产生，最初由日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨 (Leibniz) 提出并使用. 随后，瑞士数学家克拉默 (Cramer) 对行列式的定义和展开法则进行了比较系统的研究，并给出了解线性方程组的克拉默法则. 法国数学家拉普拉斯 (Laplace) 和范德蒙德 (Vandermonde) 进一步完善了行列式理论. 德国数学家雅可比 (Jacobi) 引进了函数的雅可比行列式. 由于行列式在线性方程组理论、数学分析、几何学、二次型理论、数值分析等学科的应用，促使行列式的理论研究日益完善. 目前，行列式作为重要的数学工具在许多领域都发挥着重要作用.

1.1　行列式的基本理论

1.1.1　行列式的定义

定义 1.1　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots n)$ 排成的 n 行 n 列的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，记为 $D=\det(a_{ij})$. 当 $n=1$ 时，其值为 $D=|a_{11}|=a_{11}$；当 $n\geqslant 2$ 时，其值为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中，

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

M_{1j} 表示在 D 中划去元素 a_{1j} 所在的第 1 行元素与第 j 列元素后，剩下的元素按原有的先后次序排成的 $n-1$ 阶的行列式，即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j=1,2,\cdots,n$$

定义 1.2　在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行元素与第 j 列元素后剩下的元素按原有的先后次序排成的 $n-1$ 阶的行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

定义 1.3　在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中，任取 k 行 k 列 $(0\leqslant k\leqslant 1)$. 位于这些行和列的交叉点上的 k^2 个元素按原有的先后次序排成的 k 阶行列式，称为行列式 D 的一个 k 阶子式.

定义 1.4　在行列式 D 中，互换行列式的行和相应列的位置得到的行列式，称为行列式 D 的转置，记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.1.2　行列式的性质

性质 1.1　行列式与其转置相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1.2　互换行列式两行 (列)，行列式的值变号.

推论 1.1　行列式某两行 (列) 对应元素相同，其值为零.

性质 1.3　n 阶行列式 D 等于它任意一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n$$

推论 1.2 行列式某一行 (列) 元素全为零，其值为零.

性质 1.4 行列式某一行 (列) 的所有元素有公因子 k，则 k 可以提到行列式符号的外边 (或者说，用数 k 乘行列式，等于用 k 乘行列式某一行 (列) 的所有元素)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1.3 行列式某两行 (列) 元素对应成比例，其值为零.

性质 1.5 行列式某一行 (列) 的所有元素均为两数之和，则此行列式等于如下两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.6 行列式某一行 (列) 元素的 k 倍加到另一行 (列) 对应的元素上，行列式值不变.

性质 1.7 行列式 D 任意一行 (列) 的元素与另一行 (列) 对应元素的代数余子式乘积之和为零.

1.1.3 行列式的计算

利用行列式的定义和性质 1.3 可得到行列式的按行展开公式为

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

按列展开公式为

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

行列式的按行 (列) 展开公式是研究行列式理论的重要公式. 通常，对于 2 阶和 3 阶行列式，可利用 "对角线法则" 来计算；对于 n 阶行列式可采用按照零元素较多的行 (列) 展开的形式来计算.

1.1.4 常见的行列式

1. 上 (下) 三角行列式

主对角线下方的元素全为零的行列式称为上三角行列式，其值等于主对角线元素的乘积，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

主对角线上方的元素全为零的行列式称为下三角行列式，其值等于主对角线元素的乘积，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 雅可比行列式

设 n 个 n 元连续函数 $f_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n), j = 1, 2, \cdots, n$ 对每个变量的偏导数 $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, j = 1, 2, \cdots, n;\ i = 1, 2, \cdots, n$ 存在，则称行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

为函数组 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 处的雅可比行列式，记为

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

雅可比行列式在研究多元函数的隐函数存在定理、计算多重积分的变量代换、寻求从复杂区域到规则区域的变换以及将复杂的微分方程化成其标准形的特征变换中起着关键作用. 同时，雅可比行列式在解析几何、微分几何、热力学统计物理、自动化等学科中也有广泛的应用.

3. 范德蒙德行列式

形如

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式称为 n 阶范德蒙德行列式，记为 V_n，其值为

$$V_n = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

当 $x_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 两两互异时，范德蒙德行列式 $V_n \neq 0$. 范德蒙行列式在信号处理、纠错码、复杂网络和多项式插值理论中都有重要应用.

1.1.5 克拉默法则

定理 1.1 若 n 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 D 不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中，$D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中的第 j 列用右端的常数项 $b_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 替换得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2　应用案例分析

1.2.1　机械手的空间位置

若 n 个 n 元函数 $f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n),(j = 1,2,\cdots,n)$ 组成的函数组 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 均可微，则

$$\begin{cases} \mathrm{d}f_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \\ \mathrm{d}f_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \\ \quad\cdots\cdots \\ \mathrm{d}f_n = \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \end{cases}$$

将变量和函数间的微分关系表示成矩阵形式

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1 \\ \mathrm{d}f_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix}
$$

或简记为

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}x
$$

其中，$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = [\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_2, \cdots, \mathrm{d}f_n]^{\mathrm{T}}$，$\mathrm{d}x = [\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{J}$ 表示雅可比矩阵

$$
\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}
$$

雅可比矩阵在机器人运动学分析、静力学分析和动力学分析以及图形识别等理论中均有重要应用，是机器人运动学研究中的重要工具，对应的雅可比行列式在机器人运动学分析中扮演着重要角色.

例 1.1 考虑两自由度的平面机械手，如图 1.1 所示. 设两杆机械手只在铅垂平面内运动. 已知机械手末端的坐标值为 (x, y)，两个机械手臂长为 l_1 和 l_2，与 x 轴正向夹角分别为 θ_1 和 θ_2. 试给出机械手在操作空间和关节空间的位置关系.

【分析】 若能利用机械手臂长度与 x 轴正向夹角来刻画机械手的位置，可借助函数的微分关系来描述关节与机械手的微小运动.

【模型建立与求解】 根据几何关系建立机械手在操作空间和关节空间的位置关系. 水平 x 方向满足关系：$x = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2$，铅直 y 方向满足关系：$y = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2$，则机械手末端位置为

$$
\begin{cases} x = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \\ y = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 \end{cases}
$$

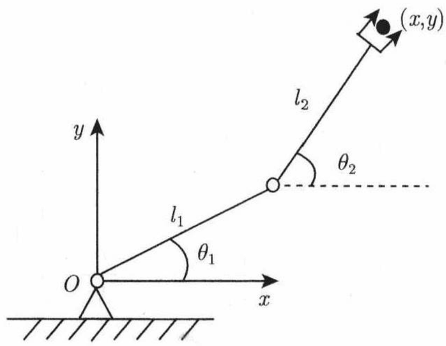

图 1.1 两自由度的平面机械手

两边微分可得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -l_1 \sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 - l_2 \sin\theta_2 \mathrm{d}\theta_2 \\ \mathrm{d}y = l_1 \cos\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \mathrm{d}\theta_2 \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 & -l_2 \sin\theta_2 \\ l_1 \cos\theta_1 & l_2 \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}\theta_1 \\ \mathrm{d}\theta_2 \end{bmatrix}$$

简记为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{J}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

其中，$\boldsymbol{J}$ 为机械手的雅可比矩阵，该矩阵反映了机械手关节微小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 与手部微小运动 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 之间的关系.

对 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{J}\mathrm{d}\theta$ 两端同除以 $\mathrm{d}t$，得 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{w}$. 其中，$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别表示关节速度 $\boldsymbol{w} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}\right]^{\mathrm{T}}$ 和手部速度 $\boldsymbol{v} = \left[\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]^{\mathrm{T}}$. 雅可比矩阵给出了关节的微小运动 (或速度) 与手部微小运动 (或速度) 之间的传递关系.

当雅可比行列式不为零时，若已知机械手手部的微小运动，则可通过计算雅可比矩阵的逆得到机械手关节上的微小运动 (或速度)，进而得到每个关节需要以多快的速度运动，才能使机械手的手部产生所期望的微分运动 (或速度).

【结论】 雅可比矩阵建立了手部操作所在的空间与关节所在空间的联系，它清晰刻画了机械手随时间变化的关系. 雅可比行列式可进一步分析两者之间的联系.