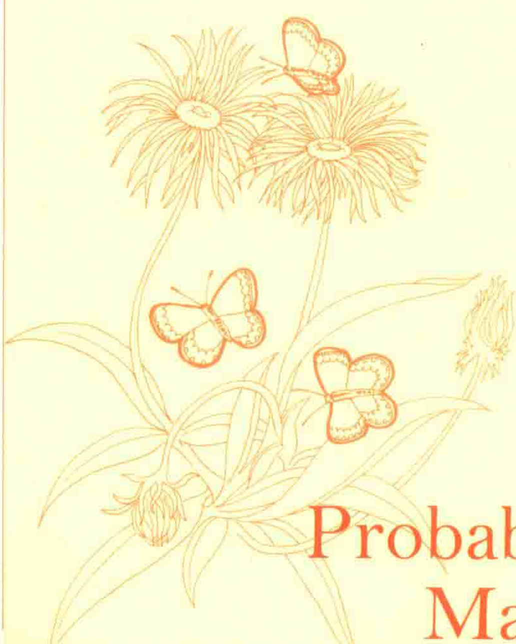
工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目
21 世纪高等学校规划教材

概率论与数理统计

刘家春 关明 ◎ 主 编
王晓丹 王贺平 ◎ 副主编



Probability Theory & Mathematical Statistics

- 循序渐进 推陈出新
- 例题丰富 解题详细
- 深入浅出 通俗易懂

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

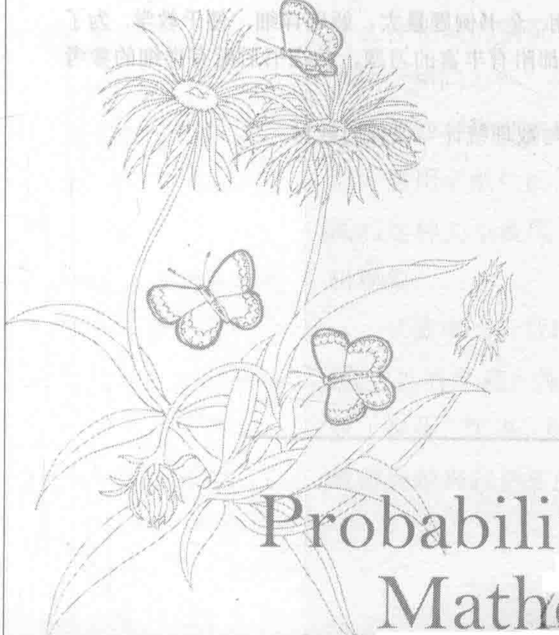
工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目

21 世纪高等学校规划教材

概率论与数理统计

刘家春 关明 ◎ 主 编

王晓丹 王贺平 ◎ 副主编



Probability Theory &

Mathe[redacted]tical Statistics

人 民 邮 电 出 版 社

北 京

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 刘家春，关明主编. — 北京：人民邮电出版社，2015.9
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-39451-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①刘… ②关… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第177324号

内容提要

本书根据高等学校理工类专业“概率论与数理统计”课程的教学大纲编写而成，系统地讲解了“概率论与数理统计”的相关知识. 全书共有8章，内容包括概率论的基本概念、一维和多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等知识. 本书力求深入浅出，通俗易懂，突出应用. 全书例题量大，解题详细，便于教学. 为了便于读者学习和检验学习效果，把握学习进度，每章都附有丰富的习题，并在书后配有详细的参考答案.

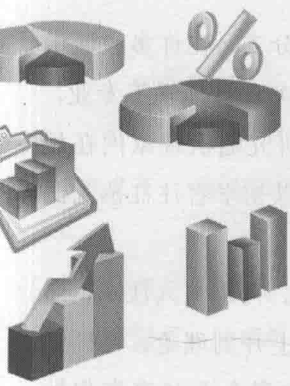
本书可作为应用型高等院校本科各专业“概率论与数理统计”课程的教材.

◆ 主　　编　刘家春　关　明
副 主 编　王晓丹　王贺平
责任编辑　张孟玮
执行编辑　税梦玲
责任印制　沈　蓉　彭志环
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京艺辉印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
印张：15.5　　2015 年 9 月第 1 版
字数：364 千字　　2015 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：38.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

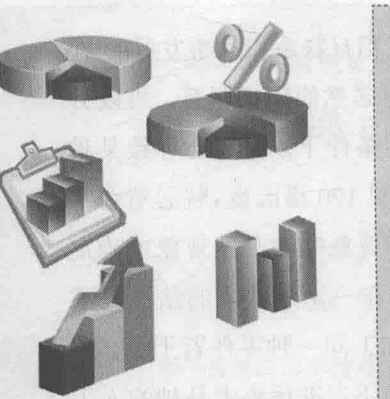
序言 Preface



在自然界和现实生活中，一些事物都是相互联系和不断发展的.在它们彼此的联系和发展中，根据它们是否有必然的因果联系，可以分成两大类：一类是确定性的现象，指在一定条件下，必定会导致某种确定的结果.例如，在标准大气压下，水加热到100摄氏度，就必然会沸腾.事物间的这种联系是属于必然性的，这种现象叫做必然现象或确定性现象.另一类是不确定性的现象.这类现象在一定条件下的结果是不确定的.例如，同一个工人在同一台机床上加工同一种零件若干个，它们的尺寸总会有一点差异.又如，在同样条件下，进行小麦品种的人工催芽试验，各颗种子的发芽情况也不尽相同，有强弱和早晚之别等.为什么在相同的情况下，会出现这种不确定的结果呢？ 这是因为，我们说的“相同条件”是指一些主要条件来说的，除了这些主要条件外，还会有许多次要条件和偶然因素是人们无法事先预料的.这类现象，我们无法用必然性的因果关系，对现象的结果事先做出确定的答案.事物间的这种关系是属于偶然性的，这种现象叫作偶然现象，或者叫作随机现象.

“概率论与数理统计”是研究随机现象内在规律性的一门数学学科.它具有严密、深刻的理论体系.同时，它又是一门应用学科，在工业、农业、军事、医学、公共事业及尖端科学等几乎所有科学技术领域得到越来越重要的应用.

前　言 Foreword



“概率论与数理统计”作为数学的一个重要分支，在许多领域中有着广泛的应用.现在，不但理工学科，而且经济学、管理学等专业，对概率统计的要求也越来越高.由于概率统计是研究随机现象内在规律的，它所用的方法不同于以往学过的数学，所以初学者往往感到比较难学.

本书针对应用型本科教育和职业教育的特点，力求深入浅出，通俗易懂，从实际问题出发，引出基本概念，进而上升到理论，特别强调了处理各种问题的思路、方法和步骤，力求做到全面并富有启发性，以便使读者能够举一反三，触类旁通，开拓处理问题的思路，提高解决问题的能力.本书的主要内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理，数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、单因素试验的方差分析及一元正态线性回归.同时，本书对各章课后习题都做了较详细的解答.书中有“*”的部分为选修内容.

本书的第 1～2 章由王晓丹编写，第 3、4 章由关明编写，第 6～8 章由刘家春编写，预备知识、第 5 章及参考答案由王贺平编写，王双、张晓楠、于佳彤、杨德彬参加了本书部分章节的编写及附表和答案的校对工作.全书由刘家春统稿.

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正.

编　者

2015 年 4 月

预备知识

1. 加法原理

设完成一件事有 m 种方式，其中第一种方式有 n_1 种方法，第二种方式有 n_2 种方法，……，第 m 种方式有 n_m 种方法，无论通过哪种方法都可以完成这件事，则完成这件事的方法总数为 $n_1+n_2+\cdots+n_m$.

2. 乘法原理

设完成一件事有 m 个步骤，其中第一个步骤有 n_1 种方法，第二个步骤有 n_2 种方法，……，第 m 个步骤有 n_m 种方法；完成该件事必须通过每一步骤才算完成，则完成这件事的方法总数为 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$.

3. 排列、组合

(1) 选排列

从 n 个不同的元素中，任意选取 r 个($0<r\leqslant n$，不许重复)，然后按顺序排成一列，称为从 n 个元素中取 r 个元素的一种选排列，其排列总数记为 P_n^r，则

$$P_n^r=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

特别地，当 $n=r$ 时，这种选排列称为全排列，排列数为 $P_n^n=n!$.

(2) 有重复排列

从 n 个不同的元素中，任意选出 m 个(每个元素可重复选取)，然后按顺序排成一列，称为有重复排列，其排列数为 n^m.

(3) 不同元素的组合

从 n 个不同元素中，每次不重复地取出 r 个($r\leqslant n$)元素组成一组，不计较组内各元素的次序，叫作从 n 个不同元素中取出 r 个元素的一个组合，其组合数为

$$C_n^r=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\ r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots(2)(1)}$$

性质 1. $C_n^r=C_n^{n-r}$(剩余公式)

2. $C_n^0=C_n^n=1$

(4) 有重复的组合

从 n 个不同元素中，每次取 r 个为一组，各组的对象可以任意重复，则此种组合称为取的重复组合，其重复组合数以符合 H_n^r 表示，且

$$H_n^r=C_{n+r-1}^r$$

4. 二项式公式

对任意正整数 n 及非负整数 r，

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^r x^{n-r} y^r + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n \\
&= \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r} y^r
\end{aligned}
$$

于是有

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^r x^r + \cdots + C_n^n x^n$$

目 录 Content

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机事件 /1

1.1.1　随机试验 /1

1.1.2　随机事件 /1

1.1.3　样本空间 /2

1.1.4　事件的关系和运算 /2

1.2　随机事件的概率 /6

1.2.1　概率的公理化定义 /6

1.2.2　概率的性质 /6

1.3　古典概率/8

1.3.1　古典概率的定义 /8

1.3.2　古典概率的计算举例 /9

1.4　几何概率与统计概率 /12

1.4.1　几何概率 /12

1.4.2　统计概率 /13

1.5　条件概率 /14

1.5.1　条件概率的概念 /14

1.5.2　乘法公式 /16

1.5.3　全概率公式和贝叶斯公式 /17

1.6　事件的独立性 /18

1.6.1　两个事件的独立性 /18

1.6.2　多个事件的独立性 /19

1.6.3　相互独立性的性质 /20

1.6.4　贝努里概型 /20

习题 1 /23

第 2 章　随机变量及其分布

2.1　随机变量的概念 /26

2.1　离散型随机变量及其概率分布 /27

2.2.1　离散型随机变量及其概率分布 /27

2.2.2　几种重要的离散型分布 /29

2.3　随机变量的分布函数 /31

2.3.1 分布函数的概念 /32

2.3.2 分布函数的基本性质 /32

2.3.3 离散型随机变量的分布函数 /33

2.4 连续型随机变量 /35

2.4.1 连续型随机变量及其概率密度的定义 /35

2.4.2 概率密度的性质 /35

2.4.3 常用的连续型分布 /37

2.5 随机变量函数的分布 /42

2.5.1 随机变量的函数 /42

2.5.2 离散型随机变量函数的分布 /43

2.5.3 连续型随机变量函数的分布 /44

习题 2 /48

第 3 章 多维随机变量

3.1 二维随机变量及联合分布 /51

3.1.1 二维随机变量 /51

3.1.2 联合分布函数的概念 /51

3.1.3 n 维随机变量 /51

3.1.4 联合分布函数的基本性质 /52

3.1.5 边缘分布函数 /52

3.2 二维离散型随机变量 /53

3.2.1 二维离散型随机变量的定义 /53

3.2.2 边缘分布列 /54

3.3 二维连续型随机变量 /56

3.3.1 二维连续型随机变量及其概率密度 /56

3.3.2 概率密度的性质 /56

3.3.3 边缘概率密度 /57

3.3.4 两个重要的二维连续型分布 /58

*3.4 条件分布 /59

3.4.1 二维离散随机变量的条件分布列 /60

3.4.2 二维连续型随机变量的条件概率密度 /62

3.5 随机变量的独立性 /63

3.6 二维随机变量函数的分布 /66

3.6.1 二维离散型随机变量函数的分布 /66

3.6.2 连续型随机变量和的密度 /67

3.6.3 分布函数法 /68

3.6.4 $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布 /70

习题 3 /71

第 4 章 随机变量的数字特征和极限定理

4.1 数学期望 /74

4.1.1 离散型随机变量的数学期望 /74

4.1.2 连续型随机变量的数学期望 /75

4.1.3 随机变量函数的数学期望 /77

4.1.4 数学期望的性质 /79

4.2 方差 /80

4.2.1 方差的概念 /80

4.2.2 方差的性质 /81

4.2.3 常用分布的方差 /81

4.3 协方差和相关系数 /84

4.3.1 协方差的定义 /84

4.3.2 协方差的性质 /85

4.3.3 相关系数的定义 /86

4.3.4 相关系数的性质 /86

4.4 矩、协方差矩阵 /89

4.4.1 矩 /89

*4.4.2 协方差矩阵 /89

4.5 大数定理及中心极限定 /90

4.5.1 大数定理 /90

4.5.2 中心极限定理 /92

习题 4 /94

第 5 章 数理统计的基本概念

5.1 总体和样本 /97

5.1.1 数理统计的基本问题 /97

5.1.2 总体 /98

5.1.3 样本 /98

5.2 直方图和经验分布函数 /100

5.3 χ^2,t 和 F 分布 /103

5.3.1 χ^2 分布 /103

5.3.2 t 分布 /104

5.3.3 F 分布 /104

5.4 统计量及抽样分布 /105

5.4.1 统计量 /105

5.4.2　抽样分布——统计量的分布 /106

习题 5 /107

第 6 章　参数估计

6.1　点估计 /110

6.1.1　求估计量的方法 /110

6.1.2　鉴定估计量的标准 /114

6.2　区间估计 /117

6.2.1　区间估计的概念 /118

6.2.2　单个正态总体参数的区间估计 /118

6.2.3　两个正态总体参数的区间估计 /120

6.2.4　大样本区间估计 /122

习题 6 /124

第 7 章　假设检验

7.1　假设检验的基本概念 /127

7.1.1　假设检验的问题 /127

7.1.2　假设检验的概念 /127

7.1.3　参数假设检验的一般步骤 /128

7.2　单个正态总体参数的显著性检验 /128

7.2.1　u 检验 /128

7.2.2　t 检验 /129

7.2.3　χ^2 检验 /130

7.3　两个正态总体参数的显著性检验 /131

7.3.1　t 检验 /131

7.3.2　F 检验 /132

7.4　非参数假设检验 /134

7.4.1　χ^2 统计量 /134

7.4.2　分布函数的拟合优度检验 /136

习题 7 /138

第 8 章　单因素试验的方差分析及一元正态线性回归

8.1　单因素试验的方差分析 /140

8.1.1　问题的提出 /140

8.1.2　数学模型 /141

8.1.3　平方和分解 /141

8.2　一元正态线性回归 /147

8.2.1　一元正态线性回归的数学模型 /147

8.2.2　未知参数的估计 /148

8.2.3　估计量 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 的性质 /151

8.2.4　回归方程的显著性检验 /153

8.2.5　利用回归方程进行预测和控制 /156

8.2.6　一元非线性回归 /159

习题 8 /161

参考答案 /163

附表 1　泊松分布累计概率值表 /221

附表 2　标准正态分布函数值表 /222

附表 3　χ 分布表 /223

附表 4　t 分布表 /226

附表 5　F 分布表 /228

附表 6　相关系数检验表 /237

参考文献 /238

第1章 随机事件及其概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

概率论是一门研究随机现象内在规律性的数学学科.为了研究随机现象,就要对客观要求进行观察和试验,我们把这种观察和试验统称为试验.概率论中所研究的试验具有下列特点:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个,并且在试验前能明确知道所有可能的结果;

(3) 试验前无法预知哪一个结果出现.

我们把具有上述特点的试验称为**随机试验**,简称为**试验**,记为 E.例如,观察某射手对固定目标进行射击;抛一枚硬币三次,观察出现正面的次数;记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等均为随机试验.

1.1.2 随机事件

在随机试验中可能发生也可能不发生的事情称为**随机事件**,简称为**事件**,常用字母 A、B、…表示.

例如,抛一枚均匀硬币,"正面朝上"是一个随机事件,将其记作 A,简写为

$$A=\text{“正面朝上”}$$

同样地,有

$$B=\text{“正面朝下”}$$

1. 基本事件与复合事件

随机试验的每一个可能结果,它是最基本的不能再分的事件称为**基本事件(或样本点)**,记为 e.

例如,掷一枚骰子这一试验,出现"1 点""2 点""3 点""4 点""5 点""6 点",都是基本事件,可分别用

$$e_i=\text{“出现 } i \text{ 点”}(i=1,2,\cdots,6)$$

表示.

在一个试验中,由两个或两个以上基本事件复合而成的事件称为**复合事件**.

例如,掷一枚骰子这一试验,出现偶数点是一复合事件,它是由出现"2 点""4 点""6 点",这三个基本事件复合而成的复合事件,当且仅当上述三个基本事件中的一个发生它才发生,可用 $e_2+e_4+e_6$ 表示.

2. 必然事件

在一定条件下必然会发生的事件称之为**必然事件**,记为 S(或 Ω).

3. 不可能事件

在一定条件下必定不会发生的事件称为**不可能事件**,记为$\varnothing$.

为讨论方便,必然事件、不可能事件作为极端情况都视为随机事件.

1.1.3 样本空间

试验 E 的所有基本事件构成的集合,称为 E 的**样本空间**,记为 S(或 Ω).

例如,"从标号为 1,2,…,10 的 10 个完全相同的球中任取一个"为一个随机试验,记 e_i="取得 i 号球"($i=1,2,\cdots,10$),则其样本空间

$$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_{10}\}$$

它的子集$\{e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$表示"取到的号码大于 5"这一事件,$\{e_1,e_3,e_5,e_7,e_9\}$表示"取到奇数号球"这一事件,……,可见,样本空间的某个子集就是一个事件,今后我们称样本空间的某个子集为**随机事件**.

空集$\varnothing$不包含任何基本事件,在每次试验中都不会发生,称为**不可能事件**.

全集 S 作为自身的子集,包含所有的基本事件,在每次试验中必然发生,称为**必然事件**.

例 1.1 同时掷两枚骰子,试写出该试验的样本空间和事件 A="点数之和等于 10",B="点数之和大于 8".

解 样本空间为

$$S=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\}$$

$$A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$

$$B=\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

1.1.4 事件的关系和运算

1. 事件的关系和运算

(1) 事件的包含和相等

设有事件 A 与 B,如果 A 发生,则 B 必然发生,则称 B 包含 A,或 A 包含于 B,如图 1.1 所示,记为

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

如果事件 A 包含事件 B,同时事件 B 也包含事件 A,则称事件 A 与 B 相等,记为

$$A=B$$

特别地,对任一个事件 A,有

$$\varnothing\subset A\subset S$$

如图 1.2 所示.

(2) 事件的和(并)

A 与 B 两个事件中至少有一个发生,称这一事件为事件 A 与事件 B 的和(或并),如图 1.3 所示,

记为

$$A \cup B \text{ 或 } A+B$$

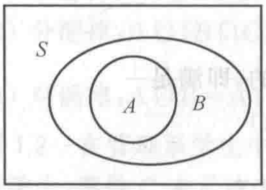


图 1.1

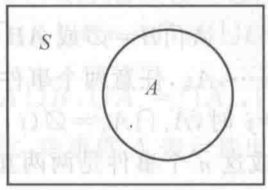


图 1.2

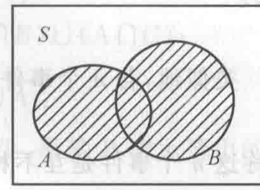


图 1.3

类似地，可定义 n 个事件及可列无穷个事件的和.若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，则称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为

$$A_1+A_2+\cdots+A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

若可列无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生，则称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和，记为

$$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

(3) 事件的积(交)

两事件 A 与 B 同时发生，称这一事件为事件 A 与事件 B 的积或交，如图 1.4 所示，记为

$$A \cap B \text{ 或 } AB$$

类似地，可定义 n 个事件及可列无穷个事件的积.

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，则称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积，记为

$$A_1A_2\cdots A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

若可列无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生，则称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积，记为

$$A_1A_2\cdots A_n\cdots \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

(4) 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，称这一事件为事件 A 与事件 B 的差，如图 1.5 所示，记为

$$A-B \text{ 或 } A\bar{B}$$

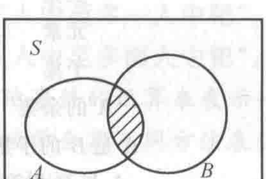


图 1.4

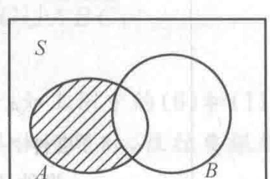


图 1.5

这时，各部分的表示如图 1.6 所示.

特别地，对任一个事件 A，有

$$A-A=\varnothing,\ A-\varnothing=A$$

(5) 互不相容(互斥)

若两事件 A 与 B 不能同时发生,则称事件 A 与事件 B 是互不相容(互斥)的,如图 1.7 所示,记为

$$A \cap B = \varnothing \text{或} AB = \varnothing$$

类似地,若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,任意两个事件是互不相容的,即满足

$$\text{当 } i \neq j \text{ 时}, A_i \cap A_j = \varnothing (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称这 n 个事件是互不相容的,或这 n 个事件是两两互不相容的.

(6) 对立(逆)事件

由事件 A 不发生所确定的事件称为 A 的对立(逆)事件,如图 1.8 所示,记作$\overline{A}$,由定义可知

$$\overline{(\overline{A})} = A$$

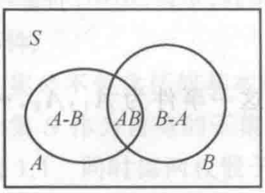


图 1.6

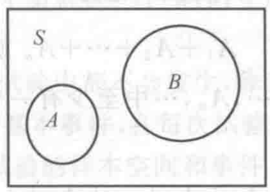


图 1.7

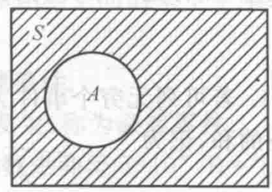


图 1.8

在一次试验中,A 和$\overline{A}$不会同时发生,且 A 与$\overline{A}$至少有一个发生,因此 A 和$\overline{A}$满足

$$A + \overline{A} = S, A \cap \overline{A} = \varnothing, \overline{A} = S - A$$

人们注意到,随机试验的所有基本事件都是两两互斥的,因为每次试验只能出现一个结果,任何两个不同结果都不能同时出现,但基本事件彼此未必互为逆事件. 例如,在掷一骰子的试验中,"掷出 3 点"与"掷出 4 点"是互斥事件,但不是互逆事件,因为不掷出 3 点还可能掷出 2 点,5 点,1 点,6 点来,因此,互斥未必互逆,但互逆必定互斥.

2. 事件的运算规律

事件间的关系及运算与集合的关系及运算是一致的,给出下列对照表 1.1.

表 1.1

记　号	概　率　论	集　合　论
S	样本空间,必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A \subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同的元素

根据集合的运算性质，可推得事件的运算性质如下：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

例 1.2 在管理系学生中任选一名学生，令事件 A 表示选出的是男生，事件 B 表示选出的是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义；

(2) 什么条件下 $C\subset B$ 成立？

(3) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(4) 什么条件下 $\overline{A}=B$ 成立？

解 (1) $AB\overline{C}$ 是指当选的学生是三年级男生，但不是运动员.

(2) $C\subset B$ 表示全部运动员都是三年级学生，也就是说，若当选的学生是运动员，那么一定是三年级学生，即除三年级学生之外其他年级没有运动员条件下才有 $C\subset B$.

(3) 只有在 $C\subset AB$，即 $C\subset A$，$C\subset B$ 同时成立的条件下才有 $ABC=C$ 成立，即只有在全部运动员都是男生，且全部运动员都是三年级学生的条件下才有 $ABC=C$.

(4) $\overline{A}\subset B$ 表示当选的女生一定是三年级学生，且 $B\subset\overline{A}$ 表示当选的三年级学生一定是女生.换句话说，若女生都在三年级且三年级学生都是女生，在这样的条件下，$B=\overline{A}$ 成立.

例 1.3 甲，乙，丙三人各射一次靶，记 $A=$“甲中靶”，$B=$“乙中靶”，$C=$“丙中靶”，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1)“甲未中靶”： $\overline{A}$；

(2)“甲中靶而乙未中靶”： $A\overline{B}$；

(3)“三人中只有丙未中靶”： $AB\overline{C}$；

(4)“三人中恰好有一人中靶”： $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(5)“三人中至少有一人中靶”： $A\cup B\cup C$；

(6)“三人中至少有一人未中靶”： $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；或 $\overline{ABC}$；

(7)“三人中恰有两人中靶”： $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(8)“三人中至少两人中靶”： $AB\cup AC\cup BC$；

(9)“三人均未中靶”： $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(10)“三人中至多一人中靶”： $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(11)“三人中至多两人中靶”： $\overline{ABC}$；或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

注：用其他事件的运算来表示一个事件，方法往往不唯一，如上例中的(6)和(11)实际上是同一事件，读者应学会用不同方法表达同一事件，特别在解决具体问题时，往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

例 1.4 指出下列各等式命题是否成立，并说明理由.

(1) $A\cup B=(A\overline{B})\cup B$；

(2) $\overline{A}B=A\cup B$；

(3) $\overline{A\cup B}\cap C=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$.

解 (1)成立.$(A\overline{B})\cup B=(A\overline{B})\cup(AB\cup B)=A(\overline{B}\cup B)\cup B=A\cup B$.

(2) 不成立.若 A 发生,则必有 $A\cup B$ 发生,A 发生,必有$\overline{A}$不发生,从而$\overline{A}B$ 不发生,故$\overline{A}B=A\cup B$ 不成立.

(3) 不成立.若$\overline{A\cup B}\cap C$ 发生,即 C 发生且$\overline{A\cup B}$发生,即必然有 C 发生.由于 C 发生,故$\overline{C}$必然不发生,从而 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 不发生,故(3)不成立.

(4) 成立.$(AB)(A\overline{B})=(AB)(\overline{B}A)=A(B\overline{B})A=(A\cap\varnothing)A=\varnothing\cap A=\varnothing$.

1.2 随机事件的概率

在一个随机试验中,往往有多个随机事件,有些事件出现的可能性大些,有些出现的可能性小些.事件出现的可能性大小是客观存在的,它揭示了随机现象的内在规律性.

为了研究事件发生的可能性,就需要用一个数字来描述这种可能性的大小.我们称描述一个事件出现的可能性大小的实数为该事件的概率.事件 $A,B,C,\cdots$ 的概率分别用 $P(A),P(B),P(C),\cdots$ 表示.

对于随机试验,给定的事件 A 发生的概率 $P(A)$ 到底是一个什么数? 怎样能求出这个数? 本节我们就来讨论这些问题.

1.2.1 概率的公理化定义

任何一个数学概念都是对现实世界的抽象,这种抽象使得其具有广泛的适用性.从概率论有关问题的研究算起,经过近三个世纪的漫长探索历程,人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义.1933 年,前苏联著名的数学家柯尔莫哥洛夫,在他的《概率论的基本概念》一书中给出了现在已被广泛接受的概率公理化体系,第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上.

定义 1.1 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间,对于 E 的每一个事件 A 赋于一个实数,记为 $P(A)$,若 $P(A)$满足下列三个条件(称为概率的三条公理):

(1) 非负性:对每一个事件 A,有

$$P(A)\geqslant 0 \tag{1.1}$$

(2) 规范性:对于必然事件 S,有

$$P(S)=1 \tag{1.2}$$

(3) 可列可加性:设 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件,即若 $i\neq j$,则 $A_iA_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.3}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

1.2.2 概率的性质

性质 1 $$P(\varnothing)=0 \tag{1.4}$$

证 令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$,由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

由概率的非负性知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

性质2(有限可加性)　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的 n 个事件，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.5}$$

上式称为概率的**有限可加性**.

证　令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，即有 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质3(减法公式)　设 A、B 是两个事件，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB) \tag{1.6}$$

特别地，若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，从而 $P(B)\geqslant P(A)$.

证　$B=AB\cup(B-A)$，且 $AB\cap(B-A)=\varnothing$，再由概率的有限可加性，得

$$P(B)=P(AB)+P(B-A)$$

故

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

若 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$，由减法公式得

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

又由概率的非负性，$P(B-A)\geqslant 0$ 知

$$P(B)\geqslant P(A)$$

性质4　对于任一事件 A，

$$P(A)\leqslant 1 \tag{1.7}$$

证　因 $A\subset S$，由性质3得

$$P(A)\leqslant P(S)=1$$

性质5(逆事件的概率)　对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1.8}$$

证　因 $A\cup\overline{A}=S$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，得

$$1=P(S)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

性质6(加法公式)　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意的 n 个事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1.9}$$

特别地，对于任意两事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.10}$$

对于三个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.11}$$

证(仅证两个事件的情况)　因

$$A\cup B=A\cup(B-AB)$$