直觉模糊二人非合作博弈理论与方法

南江霞　李登峰/著

科学出版社

直觉模糊二人非合作博弈理论与方法

南江霞　李登峰　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书系统阐述了直觉模糊二人非合作博弈的理论模型与求解方法，主要内容包括：直觉模糊集的基本理论，直觉模糊数排序方法的基本理论，二人非合作博弈的基本理论，目标为直觉模糊集的二人零和博弈，支付值为直觉模糊集的二人零和博弈，支付值为直觉模糊数的二人零和博弈，策略带有约束的直觉模糊数二人零和博弈与支付值为直觉模糊数二人非零和博弈的理论模型及求解方法. 每章均通过数值实例介绍理论模型与方法的具体应用.

本书适合运筹学、决策科学、管理科学、模糊数学、系统工程、应用数学等专业的研究人员和高校师生参考与阅读.

图书在版编目(CIP)数据

直觉模糊二人非合作博弈理论与方法 / 南江霞，李登峰著. —北京：科学出版社，2019.6

ISBN 978-7-03-061393-6

Ⅰ. ①直…　Ⅱ. ①南…　②李…　Ⅲ. ①模糊集—研究　Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 110676 号

责任编辑：李　莉 / 责任校对：杨聪敏
责任印制：张　伟 / 封面设计：无极书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京虎彩文化传播有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 6 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2019 年 6 月第一次印刷　印张：10 3/4
字数：220 000

定价：86.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

在人类的社会实践活动中，当人们的利益存在冲突时，每个人所获得的利益不仅取决于自己所采取的行动，还有赖于他人采取的行动，因此每个人都需要针对对方的行为做出对自己最有利的反应．博弈论就是一门研究多个决策主体的行为发生相互作用时的决策活动及其均衡问题的学科．1944 年，冯•诺伊曼 (J. von Neumann) 和奥斯卡•莫根施特恩 (O. Morgenstern) 出版了对博弈论建立具有里程碑意义的著作《博弈论与经济行为》，标志着博弈论的研究开始系统化和公理化，并引起了数学、经济学、管理科学、系统工程等领域研究工作者的浓厚兴趣和广泛研究，逐渐发展成为运筹学的一个分支．半个多世纪以来，博弈论已经发展成为一个相对完善、内容丰富的理论体系，并产生了大量的研究成果．博弈论逐步成熟，应用领域已遍及社会生活的各个方面，成为分析与解决冲突、对抗、矛盾、竞争、合作等问题的重要数学工具．这揭示了博弈论在未来的理论研究和应用中的广阔前景．

由于科学技术不断进步，博弈所涉及的知识、信息日益增加，以及人们认识问题的模糊性、所得信息的不完全性、决策环境的不确定性等复杂因素，所以实际的博弈问题中存在一些模糊的、不确定信息．模糊集理论是表示和量化这些不确定信息的有效工具．因此，以模糊集理论为基础，越来越多的学者开始研究模糊博弈．模糊博弈已经在理论与应用研究上取得了一些成果．已有研究主要是利用 L. Zadeh 提出并发展起来的模糊集理论处理博弈论中的模糊性或模糊现象．模糊集是用单一的隶属度同时表示模糊概念或模糊现象的两个对立面．这样就无法表示其中立状态，即既不支持也不反对的犹豫状态．模糊集概念的这种局限性给解决复杂的实际博弈问题提出了新的研究课题与挑战．Atanassov 提出的两标度 (隶属度和非隶属度) 直觉模糊集能很好地刻画在各个局势下局中人判断的肯定程度、否定程度和犹豫程度三种状态信息．因此，直觉模糊集能更加细腻地表示博弈中的模糊性本质．

本书是以作者最近几年在国内外著名期刊上发表的学术论文，以及第一作者撰写的博士学位论文为基础撰写而成的一部学术专著．本书系统地阐述了直觉模糊二人非合作博弈的理论模型与求解方法．第 1 章阐述相关的直觉模糊集的基本理论．第 2 章阐述直觉模糊数的排序，着重阐述几种直觉模糊数的排序方法．第 3 章阐述二人非合作博弈的基本理论．第 4 章阐述目标为直觉模糊集的二人零和博弈理

论与计算方法. 第 5 章阐述支付值为直觉模糊集的二人零和博弈理论与计算方法. 第 6 章研究支付值为直觉模糊数的二人零和博弈理论与计算方法. 第 7 章讨论策略带有约束的直觉模糊数二人零和博弈理论与计算方法. 第 8 章阐述支付值为直觉模糊数二人非零和博弈理论模型与计算方法. 本书的写作目的是发展和形成直觉模糊非合作博弈的研究新领域.

作者的硕士研究生安京京和汪亭参与了本书部分内容的研究工作, 王盼盼、关晶、魏骊晓和李梦祺参与了本书书稿的校对工作. 作者对研究生在本书的写作过程中付出的辛勤劳动表示感谢.

本书的部分研究成果分别受到国家自然科学基金重点项目(71231003)、国家自然科学基金项目(71561008)、桂林电子科技大学数学与计算科学学院(广西高校数据分析与计算重点实验室)的资助; 科学出版社对本书的出版给予了大力支持, 在此谨致谢意.

由于作者水平有限, 书中难免存在一些有待完善和需改进之处, 恳请各位同行专家批评指正, 并希望本书中的研究内容能起到抛砖引玉的作用.

南江霞

2018 年 5 月 2 日

目　　录

第 1 章　直觉模糊集的基本理论

模糊性在现实决策问题中大量存在, 1965 年 Zadeh 教授提出的模糊集理论为处理模糊性提供了一种有效方法[1]. 然而, 随着社会问题的日益复杂化及科学研究的不断深入, 传统的模糊集理论因不能全面地描述所研究问题的不确定信息而在实际应用中受到越来越多的制约和挑战. 于是模糊集理论出现了各种拓展. 1967 年, Goguen 将模糊集的概念推广到 L-模糊集[2]. L-模糊集是论域 X 到 L 上的一个映射, $(L,\leqslant_L,\ell)$ 表示一个完备格, 其中 ℓ 是一个一元对合逆序算子. 当 L 取作 $[0,1]$, $\ell(x)=1-x$, $\leqslant_L=\leqslant$ 时, L-模糊集就是模糊集.

1975 年, Zadeh 又提出区间值(interval-valued)模糊集的概念[3], 其原因是在许多实际应用中, 获取的数据往往不是精确的数值, 而是一个区间. 这将导致模糊集的隶属度为一个区间, 因而该模糊集形成一个区间模糊集. 区间模糊集最根本的特征是将模糊集中的隶属度用 $[0,1]$ 上的闭子区间表示, 即区间模糊集表示为 $\mu(x)=[\mu_L(x),\mu_U(x)]\subseteq[0,1]$.

不论是模糊集还是区间模糊集都是利用单一标度的隶属度或隶属度区间同时表示模糊性、模糊现象或模糊概念的支持和反对两种对立状态. 然而在现实问题中, 人们往往在确定元素属于某集合的隶属程度的同时又没有绝对的把握, 或者说, 该隶属程度含有一定的犹豫程度或不确定性. 即出现元素对模糊概念既有隶属情况, 又有非隶属情况, 且同时表现出一定程度的犹豫性. 用投票模型解释为: 有赞成票, 有反对票, 同时又有弃权情况的发生. 传统的模糊集理论无法处理这种犹豫性, 即模糊集无法表示其中立状态, 既不支持也不反对. 为此, 1986 年保加利亚学者 Atanassov 提出了直觉模糊集(IFS)的概念[4, 5]. 这一概念通过增加一个新的属性参数——非隶属度, 很好地解决了犹豫性或不确定性这一问题. 直觉模糊集利用双标度的隶属度与非隶属度刻画模糊性, 可以同时表示支持、反对和中立三种状态, 更细腻、全面地描述了客观现象的模糊性的自然属性. Atanassov 等在 *Fuzzy Sets and Systems* 等期刊上发表的一系列论文, 系统地提出并定义了直觉模糊集及其运算, 提出了直觉模糊逻辑的若干基本概念, 还研究了直觉模糊集与其他模糊集之间的关系等[6-17]. 作为后续各章节的基础, 本章简单介绍直觉模糊集的基本概念与运算法则.

1.1　直觉模糊集的基本概念及运算法则

1.1.1　直觉模糊集的定义

Atanassov 最先在 1986 年给出了如下的直觉模糊集定义[4, 5].

定义 1.1　设 U 是一个有限论域. U 上的一个直觉模糊集 A 为

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\upsilon_A(x)\rangle \mid x\in U\}$$

式中

$$\mu_A:U\to[0,1]$$
$$x\in U\mapsto \mu_A(x)\in[0,1]$$

和

$$\upsilon_A:U\to[0,1]$$
$$x\in U\mapsto \upsilon_A(x)\in[0,1]$$

分别表示 A 的隶属函数和非隶属函数, 且对于 A 上的所有 $x\in U$, 满足

$$0\leqslant \mu_A(x)+\upsilon_A(x)\leqslant 1$$

记

$$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\upsilon_A(x)$$

则称 $\pi_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉模糊指标. 记全体直觉模糊集集合为 IFS(X).

直觉模糊指标 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\upsilon_A(x)$ 是 x 对 A 的犹豫程度的一种测度. 显然, 对于任意 $x\in U$, 有

$$0\leqslant \pi_A(x)\leqslant 1$$

任意模糊集均可表示为直觉模糊集

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$$

反之, 若直觉模糊集 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\upsilon_A(x)\rangle \mid x\in U\}$ 满足 $\mu_A(x)+\upsilon_A(x)=1$, 则可表示为模糊集

$$A=\{\langle x,\mu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$$

因此, 直觉模糊集是模糊集的拓展, 而模糊集是直觉模糊集的特殊情况.

对于一个模糊集 A, 其单一隶属度 $\mu_A(x)\in[0,1]$ 既包含了支持 x 的程度 $\mu_A(x)$, 也包含了反对 x 的程度 $1-\mu_A(x)$, 但它不可能表示既不支持也不反对的“非此非彼”的中立状态的程度. 而一个直觉模糊集 A, 其隶属度 $\mu_A(x)\in[0,1]$、非隶属度 $\upsilon_A(x)\in[0,1]$ 与直觉模糊指标 $\pi_A(x)\in[0,1]$ 可分别表示对象 x 属于直觉模糊集 A 的支持、反对、中立这三种状态的程度. 可见, 直觉模糊集有效地扩展了模糊集对模糊性或模糊现象的描述和表示能力.

当 X 为连续空间时，直觉模糊集 A 可表示为

$$A=\int_{x\in X}\langle\mu_A(x),\upsilon_A(x)\rangle/x$$

当 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为离散空间时，直觉模糊集 A 也可表示为

$$A=\sum_{i=1}^{n}\langle\mu_A(x_i),\upsilon_A(x_i)\rangle/x_i$$

下面用投票选举模型来解释直觉模糊集的含义. 假设一个直觉模糊集为 $A=\langle 0.5, 0.3\rangle/x$，即隶属度 $\mu_A(x)=0.5$、非隶属度 $\upsilon_A(x)=0.3$. 从而，直觉模糊指标

$$\pi(x)=1-\mu(x)-\upsilon(x)=0.2$$

或者说，对象 x 支持 A 的程度为 0.5、反对 A 的程度为 0.3、既不支持也不反对的程度为 0.2. 用投票选举模型可以做如下解释：假设有 10 个选民对某个候选人 x 进行投票表决，投票结果是 5 个选民投赞成票、3 个选民投反对票、2 个选民投弃权票.

下面通过一个例子来说明如何用直觉模糊集表示不确定信息.

例 1.1　假设有 10 个专家参加对 3 种装备 x_1,x_2 和 x_3 可维护性的评价. 要求每个参与评价的专家在认真了解装备状况的基础上，对这 3 种装备可维护性是“好”“不好”还是“无法确定”（即不表态或弃权）做出回答. 经过统计可得到：认为装备 x_1 可维护性是“好”“不好”“无法确定”的专家人数分别为 5, 3, 2；认为装备 x_2 可维护性是“好”“不好”“无法确定”的专家人数分别为 7, 1, 2；认为装备 x_3 可维护性是“好”“不好”“无法确定”的专家人数分别为 4, 5, 1. 试用直觉模糊集表示 3 种装备 x_1,x_2 和 x_3 可维护性的评价结果.

解　根据题设，认为装备 x_1 可维护性是“好”“不好”“无法确定”的专家人数分别为 5, 3, 2，则装备 x_1 可维护性属于模糊概念 A “好”“不好”“无法确定”的程度分别为

$$\mu_A(x_1)=\frac{5}{10}=0.5$$

$$\upsilon_A(x_1)=\frac{3}{10}=0.3$$

$$\pi_A(x_1)=\frac{2}{10}=0.2$$

而 $\pi_A(x_1)$ 正好就是直觉模糊指标

$$\begin{aligned}\pi_A(x_1)&=1-\mu_A(x_1)-\upsilon_A(x_1)\\&=1-0.5-0.3\\&=0.2\end{aligned}$$

这样可将 x_1 可维护性的评价结果表示为直觉模糊集

$$\langle\mu_A(x_1),\upsilon_A(x_1)\rangle/x_1=\langle 0.5,0.3\rangle/x_1$$

类似地，可将 x_2 和 x_3 可维护性的评价结果分别表示为直觉模糊集

$$\langle \mu_A(x_2), \upsilon_A(x_2) \rangle / x_2 = \langle 0.7, 0.1 \rangle / x_2$$

和

$$\langle \mu_A(x_3), \upsilon_A(x_3) \rangle / x_3 = \langle 0.4, 0.5 \rangle / x_3$$

于是, 10 个专家对上述 3 种装备 x_1, x_2 和 x_3 可维护性的评价结果可统一用直觉模糊集表示为

$$\begin{aligned} A &= \langle \mu(x_1), \upsilon(x_1) \rangle / x_1 + \langle \mu(x_2), \upsilon(x_2) \rangle / x_2 + \langle \mu(x_3), \upsilon(x_3) \rangle / x_3 \\ &= \langle 0.5, 0.3 \rangle / x_1 + \langle 0.7, 0.1 \rangle / x_2 + \langle 0.4, 0.5 \rangle / x_3 \end{aligned}$$

1.1.2　直觉模糊集的几何意义

论域 U 上的直觉模糊集 A 可用三维空间来表示, 如图 1.1 所示. 在图 1.1 中, 三角形 CBD 内的每一点都存在一个确定的直觉模糊集与之一一对应; 反之, 任意一个直觉模糊集都可找到三角形 CBD 内的一个确定的点与之一一对应. 特别地, 当直觉模糊指标为 0 时, 则相应的直觉模糊集已退化为模糊集, 此时其与线段 CB 上的某个点一一对应. 图 1.1 中的三角形 CBD 的顶点 $C(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ 和 $D(0,0,1)$ 分别对应于三个特殊的直觉模糊集 $C = \langle 1,0 \rangle, B = \langle 0,1 \rangle$ 和 $D = \langle 0,0 \rangle$.

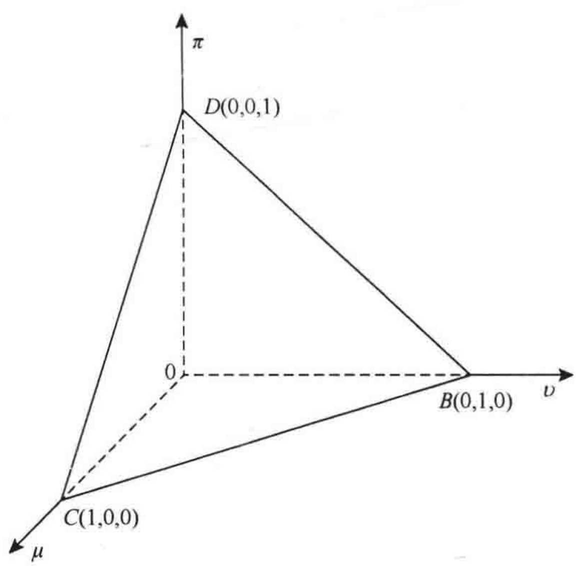

图 1.1　直觉模糊集的几何表示

1.1.3　直觉模糊集的运算

定义 1.2[4, 5]　设 A 和 B 是给定论域 U 上的两个直觉模糊集, 实数 $\lambda > 0$, 则

(1) 直觉模糊集包含关系: $A \subseteq B$ 当且仅当对任意 $x \in U$, 有

$$\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x), \quad \upsilon_A(x) \geqslant \upsilon_B(x)$$

(2) 直觉模糊集相等关系: $A = B$ 当且仅当对任意 $x \in U$, 有

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \upsilon_A(x) = \upsilon_B(x)$$

(3) 直觉模糊集的补:

$$A^{\mathrm{c}} = \overline{A} = \{\langle x, \upsilon_A(x), \mu_A(x)\rangle \mid x \in U\}$$

(4) 直觉模糊集的交:

$$A \cap B = \{\langle x, \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\upsilon_A(x), \upsilon_B(x)\}\rangle \mid x \in U\}$$

(5) 直觉模糊集的并:

$$A \cup B = \{\langle x, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\upsilon_A(x), \upsilon_B(x)\}\rangle \mid x \in U\}$$

(6) 直觉模糊集的和:

$$A + B = \{\langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \upsilon_A(x)\upsilon_B(x)\rangle \mid x \in U\}$$

(7) 直觉模糊集的积:

$$AB = \{\langle x, \mu_A(x)\mu_B(x), \upsilon_A(x) + \upsilon_B(x) - \upsilon_A(x)\upsilon_B(x)\rangle \mid x \in U\}$$

(8) 直觉模糊集与数的积:

$$\lambda A = \{\langle x, 1 - (1 - \mu_A(x))^{\lambda}, (\upsilon_A(x))^{\lambda}\rangle \mid x \in U\}$$

(9) 直觉模糊集的乘方:

$$A^{\lambda} = \{\langle x, (\mu_A(x))^{\lambda}, 1 - (1 - \upsilon_A(x))^{\lambda}\rangle \mid x \in U\}$$

下面通过一个例子来说明上述直觉模糊集的运算.

例 1.2 设两个直觉模糊集分别为 $A = \langle 0.6, 0.2\rangle / x$ 和 $B = \langle 0.4, 0.3\rangle / x$. 试求直觉模糊集 A 的补 A^{c}、直觉模糊集 A 与数的积 $2A$、直觉模糊集 A 的乘方 A^2 及直觉模糊集 A 与 B 的交 $A \cap B$、并 $A \cup B$、和 $A + B$、积 AB.

解 由定义 1.2, 可得直觉模糊集 A 的补 A^{c} 为

$$A^{\mathrm{c}} = \langle 0.2, 0.6\rangle / x$$

类似地, 直觉模糊集 A 与数的积 $2A$ 为

$$2A = \langle 1 - (1 - 0.6)^2, (0.2)^2\rangle / x = \langle 0.84, 0.04\rangle / x$$

直觉模糊集 A 的乘方 A^2 为

$$A^2 = \langle (0.6)^2, 1 - (1 - 0.2)^2\rangle / x = \langle 0.36, 0.36\rangle / x$$

直觉模糊集 A 与 B 的交为

$$A \cap B = \langle \min\{0.6, 0.4\}, \max\{0.2, 0.3\}\rangle / x = \langle 0.4, 0.3\rangle / x$$

直觉模糊集 A 与 B 的并为

$$A\cup B=\langle\max\{0.6,0.4\},\min\{0.2,0.3\}\rangle/x=\langle 0.6,0.2\rangle/x$$

直觉模糊集 A 与 B 的和为

$$A+B=\langle 0.6+0.4-0.6\times 0.4,0.2\times 0.3\rangle/x=\langle 0.76,0.06\rangle/x$$

直觉模糊集 A 与 B 的积为

$$AB=\langle 0.6\times 0.4,0.2+0.3-0.2\times 0.3\rangle/x=\langle 0.24,0.44\rangle/x$$

1.2　直觉模糊集的集成算子

为了对直觉模糊信息进行集成, 加权算术集成算子是直觉模糊集集成的常用方法. 下面给出直觉模糊集的加权算术集成算子的概念.

定义 1.3[18]　设 $A_j=\{\langle x,\mu_{A_j}(x),\upsilon_{A_j}(x)\rangle\mid x\in U\}(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊集, 且 $\mathrm{IFWAA}_{\omega}:\Omega^n\to\Omega$. 若

$$\mathrm{IFWAA}_{\omega}(A_1,A_2,\cdots,A_n)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j A_j \tag{1.1}$$

其中, Ω 表示所有直觉模糊集的集合, $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $A_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量, 且 $\omega_j\in[0,1],\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$, 则称函数 IFWAA_{ω} 为直觉模糊集的加权算术集成算子.

特别地, 若 $\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{T}}$, 则称函数 IFWAA 为直觉模糊集的算术集成算子

$$\mathrm{IFWAA}(A_1,A_2,\cdots,A_n)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}A_j$$

IFWAA_{ω} 算子的特点是: 对每个直觉模糊集加权后进行集成.

由定义 1.2 中的(6)和(8), 并利用数学归纳法可证定理 1.1.

定理 1.1[17]　设 $A_j=\{\langle x,\mu_{A_j}(x),\upsilon_{A_j}(x)\rangle\mid x\in U\}(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊集, 则由式(1.1)集成得到的结果仍为直觉模糊集, 且

$$\mathrm{IFWAA}_{\omega}(A_1,A_2,\cdots,A_n)=\left\{\left\langle x,1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{A_j}(x))^{\omega_j},\prod_{j=1}^{n}(\upsilon_{A_j}(x))^{\omega_j}\right\rangle\middle| x\in U\right\} \tag{1.2}$$

1.3　直觉模糊集的截集

截集是直觉模糊集中的重要概念，是建立直觉模糊集和普通集之间的桥梁.

定义 1.4[18]　设 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\upsilon_A(x)\rangle \mid x\in U\}$ 为有限论域 U 上的一个直觉模糊集. 对任意 $\alpha\in[0,1]$ 和 $\beta\in[0,1]$，且 $0\leqslant\alpha+\beta\leqslant1$，称集合

$$A_\beta^\alpha=\{x\mid \mu_A(x)\geqslant\alpha,\upsilon_A(x)\leqslant\beta,x\in U\}$$

为直觉模糊集 A 的 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 截集，称 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 为置信水平或置信度. 当 $\alpha=1$ 和 $\beta=0$ 时，截集 A_0^1 称为直觉模糊集 A 的核. 当 $\alpha=0$ 和 $\beta=1$ 时，截集 A_1^0 称为直觉模糊集 A 的支撑.

不难看出，对于给定的一个有序对 $\langle\alpha,\beta\rangle$，截集 A_β^α 都是 U 上的一个普通集合. 事实上，它是直觉模糊集 A 在置信程度 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 上的逆像.

易于看出，直觉模糊集的 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 截集也是模糊集的截集概念的推广.

显然，如果 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant1$ 和 $0\leqslant\beta_2\leqslant\beta_1\leqslant1$，且 $0\leqslant\alpha_1+\beta_1\leqslant1$ 和 $0\leqslant\alpha_2+\beta_2\leqslant1$，则

$$A_{\beta_2}^{\alpha_2}\subseteq A_{\beta_1}^{\alpha_1}$$

特别地，对固定的 $\beta\in[0,1]$，若 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant1$，且 $0\leqslant\alpha_1+\beta\leqslant1$ 和 $0\leqslant\alpha_2+\beta\leqslant1$，则

$$A_\beta^{\alpha_2}\subseteq A_\beta^{\alpha_1}$$

同样，对固定的 $\alpha\in[0,1]$，若 $0\leqslant\beta_2\leqslant\beta_1\leqslant1$，且 $0\leqslant\alpha+\beta_1\leqslant1$ 和 $0\leqslant\alpha+\beta_2\leqslant1$，则

$$A_{\beta_2}^{\alpha}\subseteq A_{\beta_1}^{\alpha}.$$

类似地，直觉模糊集 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\upsilon_A(x)\rangle \mid x\in U\}$ 的 α 截集和 β 截集可分别定义为

$$A^\alpha=\{x\mid \mu_A(x)\geqslant\alpha,x\in U\}$$

和

$$A_\beta=\{x\mid \upsilon_A(x)\leqslant\beta,x\in U\}$$

例 1.3　设 $A=\langle x_1,0.3,0.5\rangle+\langle x_2,0.4,0.58\rangle+\langle x_3,0.6,0.3\rangle$ 是论域 $U=\{x_1,x_2,x_3\}$ 上的一个直觉模糊集，试求截集 $A^{0.35},A_{0.5}$ 和 $A_{0.5}^{0.35}$.

解　根据直觉模糊集的 α 截集的定义，并结合直觉模糊集 A，可得

$$A^{0.35}=\{x\mid \mu_A(x)\geqslant0.35,x\in U\}=\{x_2,x_3\}$$

根据直觉模糊集的 β 截集的定义，并结合直觉模糊集 A，可得

$$A_{0.5}=\{x\mid \upsilon_A(x)\leqslant0.5,x\in U\}=\{x_1,x_3\}$$

根据定义 1.4, 并结合直觉模糊集 A, 可得

$$A_{0.5}^{0.35}=\{x \mid \mu_A(x) \geqslant 0.35, \upsilon_A(x) \leqslant 0.5, x \in U\}=\{x_3\}$$

显然, $A^{0.35} \cap A_{0.5}=\{x_3\}=A_{0.5}^{0.35}$.

一般地, 对任意直觉模糊集 $A=\{\langle x, \mu_A(x), \upsilon_A(x)\rangle \mid x \in U\}$, 都有下列关系式成立

$$A_\beta^\alpha=A^\alpha \cap A_\beta$$

其中 $\alpha \in[0,1]$ 和 $\beta \in[0,1]$, 且 $0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant 1$.

1.4 直觉模糊集的排序

直觉模糊集是一个有序对, 本身不一定存在序关系, 即直觉模糊集的集合 Ω 是个偏序集, 因而在不确定性决策问题中, 如果用直觉模糊集表示选择或方案的某种度量, 则必须首先确定直觉模糊集的大小比较问题或定义某种“序”关系. 本节介绍几类直觉模糊集的排序方法.

1.4.1 直觉模糊集的记分函数排序方法

若对某一模糊决策问题, 决策方案 A_i 的评价值用直觉模糊集 $\langle \mu_{A_i}, 1-\upsilon_{A_i}\rangle$ 来表示. Chen 和 Tan[19]用记分函数 $S(A_i)$ 表示该方案满足决策者要求的程度

$$S(A_i)=\mu_{A_i}-\upsilon_{A_i} \tag{1.3}$$

并根据 $S(A_i)$ 的值进行备选方案的排序.

Hong 和 Choi[20]分析了 $S(A_i)$ 的不足, 增加一个精确函数 $H(A_i)$ 为

$$H(A_i)=1-\pi_{A_i}$$

即

$$H(A_i)=\mu_{A_i}+\upsilon_{A_i} \tag{1.4}$$

$H(A_i)$ 反映方案满足决策者要求的精确程度.

根据记分函数 $S(A_i)$ 的弊端, 李凡和饶勇[21]定义如下两个记分函数 $S_1(A_i)$ 和 $S_2(A_i)$ 来表示方案 A_i 适合决策者要求的程度

$$S_1(A_i)=\mu_{A_i}, \quad S_2(A_i)=1-\upsilon_{A_i} \tag{1.5}$$

或

$$S_1(A_i)=\mu_{A_i}-\upsilon_{A_i}, \quad S_2(A_i)=1-\upsilon_{A_i}$$

其决策的排序规则为: 先根据 $S_1(A_i)$ 的值进行选择, 该值越大, 则方案 A_i 越适合决策要求; 当 $S_1(A_i)$ 的值相同时, 再根据函数 $S_2(A_i)$ 进行选择, 该值越大, 则方案 A_i 越适合决策要求.

然而，上述两个记分函数均忽视了弃权部分对决策的影响，决策时丢失的信息较多. 考虑到弃权部分中可能有一部分人倾向肯定程度，而有一部分人倾向否定程度，还有一部分人仍是犹豫不定. 为此，将弃权部分又细化成三部分：$\mu_{A_i}\pi_{A_i},\upsilon_{A_i}\pi_{A_i}$，$\pi_{A_i}\pi_{A_i}$，Liu[22]给出如下的修正记分函数

$$L(A_i)=\mu_{A_i}+\mu_{A_i}\pi_{A_i} \tag{1.6}$$

$L(A_i)$ 的值越大，方案 A_i 越满足决策者的要求.

式(1.6)的记分函数忽视了反对部分和弃权部分对决策者态度的影响，是一种过于乐观的决策方法，悲观的决策者却得不到满意的决策结果.

对式(1.6)进行补充，进一步给出辅助记分函数如下

$$L'(A_i)=\upsilon_{A_i}+\upsilon_{A_i}\pi_{A_i} \tag{1.7}$$

它表示方案 A_i 不满足决策者要求的程度. $L'(A_i)$ 的值越小，表示方案 A_i 越满足决策者的要求.

此外，Liu[22]还提出了几类其他的记分函数，

$$M(A_i)=\mu_{A_i}-\upsilon_{A_i}-\frac{1}{2}(1-\mu_{A_i}-\upsilon_{A_i})=\frac{1}{2}(3\mu_{A_i}-\upsilon_{A_i}-1) \tag{1.8}$$

$M(A_i)$ 的值越大，表示方案 A_i 越满足决策者的要求.

$$L(A_i)=\mu_{A_i}+\frac{1}{2}\pi_{A_i} \tag{1.9}$$

或

$$L(A_i)=\mu_{A_i}+\frac{\mu_{A_i}}{\mu_{A_i}+\upsilon_{A_i}}\pi_{A_i} \tag{1.10}$$

或

$$L(A_i)=\mu_{A_i}+\frac{1+\mu_{A_i}-\upsilon_{A_i}}{2}\pi_{A_i} \tag{1.11}$$

式(1.9)的含义是，假设直觉模糊指标所表征的中立证据中，支持与反对的程度呈均衡状态，该方法易于处理，但不能直观刻画中立者的倾向性，因为没有考虑到支持证据与反对证据的大小对中立的影响.

式(1.10)的含义是，将中立证据的倾向性按照支持与反对的比例来赋值.

式(1.11)的含义是，首先将中立者可能倾向于支持的比例认为是 0.5，再通过支持证据与反对证据之差的一半来修正其赋值比例，从而体现出支持者越多，则中立者倾向支持的比例越大，反之越小.

通过比较分析可见，上述诸多记分函数均为下面一般形式的记分函数

$$L(A_i)=\lambda_1\mu_{A_i}+\lambda_2\upsilon_{A_i}+\lambda_3\pi_{A_i} \tag{1.12}$$

的特例.

理论上，式(1.12)同时考虑了赞成、反对和弃权三个方面，是个较好的结果. 但系数 λ_1,λ_2 与 λ_3 的具体选择是难点，也制约了其实际应用. 总之，不同的记分函数法各有优劣，均适合某些具体情况，满足某些决策问题的要求. 但该类方法不具有客观通用性，同时均要求决策者给出承担风险的态度，并且决策结果的最终排序完全受到决策者的主观影响.

例 1.4　设直觉模糊集 $A_1=\langle 0.2,1\rangle$, $A_2=\langle 0.3,0.9\rangle$, $A_3=\langle 0.4,0.8\rangle$, $A_4=\langle 0.5,0.7\rangle$, $A_5=\langle 0.6,0.6\rangle$ 和直觉模糊集 $B_1=\langle 0.2,0.7\rangle$, $B_2=\langle 0.4,0.4\rangle$，分别做出最佳选择.

解　根据式(1.3)得

$$S(A_1)=S(A_2)=S(A_3)=S(A_4)=S(A_5)=0.2$$

$$S(B_1)=-0.1,\quad S(B_2)=-0.2$$

上述结果表明，记分函数 S 反映出直觉模糊集 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 满足决策的程度相同，无法进行选择；而 $S(B_1)\geqslant S(B_2)$ 表明 B_1 比 B_2 更满足决策需要，这与人们的直觉相悖.

利用式(1.6)得

$$L(A_1)=0.2+0.2(1-0.2-0)=0.36$$

$$L(A_2)=0.3+0.3(1-0.3-0.1)=0.48$$

$$L(A_3)=0.4+0.4(1-0.4-0.2)=0.56$$

$$L(A_4)=0.5+0.5(1-0.5-0.3)=0.6$$

$$L(A_5)=0.6+0.6(1-0.6-0.4)=0.6$$

$$L(B_1)=0.2+0.2(1-0.2-0.3)=0.3$$

$$L(B_2)=0.4+0.4(1-0.4-0.6)=0.4$$

于是，得出在直觉模糊集 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 中，A_4 和 A_5 是最佳选择；在 B_1 与 B_2 中，B_2 是最佳选择.

利用式(1.7)得

$$L'(A_1)=0+0(1-0.2-0)=0$$

$$L'(A_2)=0.1+0.1(1-0.3-0.1)=0.16$$

$$L'(A_3)=0.2+0.2(1-0.4-0.2)=0.28$$

$$L'(A_4)=0.3+0.3(1-0.5-0.3)=0.36$$

$$L'(A_5)=0.4+0.4(1-0.6-0.4)=0.4$$