"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

复变函数与积分变换 第五版
学习辅导与习题全解

华中科技大学数学与统计学院
李红 谢松法

高等教育出版社

"普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

复变函数与积分变换 第五版 学习辅导与习题全解

华中科技大学数学与统计学院

李红　谢松法

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是与《复变函数与积分变换（第五版）》（华中科技大学数学与统计学院）配套的学习辅导书，全书共八章：复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分，解析函数的级数表示，留数及其应用，共形映射，傅里叶变换及拉普拉斯变换。每章内容分为四节：1. 基本要求与内容提要，简要介绍每一章的基本要求和内容；2. 典型例题与解题方法，对应掌握的重点以及学生在学习过程中普遍遇到的难点，通过典型例题的解答予以重点分析；3. 教材习题同步解析，详细解答主教材的全部习题；4. 自测题，精选了相当数量的有代表性的习题，供读者自测。

本书可供高等院校理工类专业学习复变函数与积分变换课程的学生选用，也可供有关教师和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换(第五版)学习辅导与习题全解/李红,谢松法编. --北京:高等教育出版社,2019.1

ISBN 978-7-04-050968-7

Ⅰ.①复… Ⅱ.①李… ②谢… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教学参考资料②积分变换-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 258324 号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 杨 帆　封面设计 李小璐　版式设计 马 云
插图绘制 于 博　责任校对 刁丽丽　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	三河市春园印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	18.5		
字　　数	340 千字	版　　次	2019 年 1 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2019 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	35.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 50968-00

前　言

复变函数与积分变换是高等学校理工类专业的专业基础课，为了帮助在校大学生学好复变函数与积分变换这一课程，我们结合华中科技大学数学与统计学院主编的教材《复变函数与积分变换(第五版)》编写了这本学习辅导书。

在本书编写之前，编者首先思考了这样一个问题：作为辅导教材，是否要补充和加深一些内容？是否要加大一些习题的难度？经过讨论并结合这些年来的使用经验及教学体会，我们认为辅导教材应该是对主教材的内容重新进行总结，使其系统化、条理化，从而使学生对所学的内容更加清晰明了，并加深理解；应该是对一些典型的例题进行更详细的分析，并针对同一类问题的解题思路进行总结与拓展，使学生能够利用所学的知识解决问题，并做到举一反三。基于以上思考，我们编写了这本辅导教材。全书共分八章，除教材中第七章外，其余各章均紧扣教材，每章包括下列四个部分：基本要求与内容提要、典型例题与解题方法、教材习题同步解析、自测题。

本书力求做到基本要求明确，内容叙述简练、重点突出，以便读者系统掌握基本知识；典型例题取材适当、难易兼顾，具有较强的针对性与代表性，能帮助读者掌握基本概念和理论，开拓解题思路，提高分析能力；教材习题同步解析对主教材中除“*”号以外的全部习题给出了详尽的解答，以方便读者在学习过程中进行对照分析，起到了释疑解难的作用。此外，我们还为读者设计了一套反映该章内容重点和难点的自测题，旨在提高读者的综合解题能力，巩固和提高学习效果。

由于编者水平有限，书中还有许多不足之处。俗语有云：“百尺竿头，更进一步”，因此，敬请读者及时批评指正，以便使本书进一步完善。

编　者

hongli@ hust.edu.cn

xiesongfa@ 126.com

2018年3月于华中科技大学

目　录

第一章　复数与复变函数

§1.1　基本要求与内容提要

1.1.1　基本要求

1. 熟练地对复数进行加、减、乘、除、乘方、开方和共轭运算.

2. 熟练掌握和运用复数模的三角不等式.

3. 能用复数及其共轭表示复数的实部、虚部及模.

4. 了解复数的球面表示,正确理解无穷远点的概念.

5. 弄清什么是开集、区域、闭区域、单连通区域与多连通区域.

6. 弄清什么是简单曲线、简单闭曲线、光滑曲线和分段光滑曲线,能用复数的方程或不等式来表示一些常见的简单区域和曲线.

7. 牢固掌握复变函数的概念,能把复变函数解释为复平面上两个集合间的映射,能把一个复变量的函数看作两个实的二元函数,也能把两个实的二元函数写成一个复变量函数.

8. 掌握复变函数的连续性概念.

1.1.2　内容提要

复变函数论中所研究的函数的自变量与因变量均取复数,因此,首先对于复数域以及复变量的函数要有清晰的认识.

1. 复数

复数的基本概念、复数的四则运算、复平面.

2. 复数的三角表示

1）复数的模与辐角

一个复数 $z\neq 0$ 的辐角

$$\theta=\operatorname{Arg} z$$

是多值的,z 的辐角的主值 $\arg z$ 是其中满足条件 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 的那一个,则有

$$\theta=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots, \tag{1.1}$$

且

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0, y\text{ 为任意实数},\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geqslant 0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y<0.\end{cases}$$

2）复数模的三角不等式

3）复数的三角表示

设 $z\neq 0$, r 是 z 的模, θ 是 z 的任意一个辐角,则

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

4）用复数的三角表示作乘除法

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$,有

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)], z_2\neq 0.$$

5）复数的乘幂与开方

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

当 $r=1$ 时,有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta\text{（棣莫弗公式）}.$$

设 $z^{\frac{1}{n}}=w$,则

$$w=|z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)\right)\right],$$

或

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}(\theta+2k\pi)\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{n}(\theta+2k\pi)\right)\right].$$

3. 平面点集的一般概念

开集与闭集、区域、平面曲线

4. 无穷大与复球面

5. 复变函数

1）复变函数的概念

定义 1.1 设 D 是复平面上的一点集，如果对于 D 中任意的一点 z，有确定的（一个或多个）复数 w 同它对应，则称在 D 上定义了一个复变函数，记作 $f(z)$.

一个复变函数也可看作一个映射，设 $f(z)$ 的定义域为 D，$f(z)$ 的值的集合为 G，则 $f(z)$ 将点集 D 的点 z 映射为点集 G 的点 w，集 D 映射为集 G，则称点 w 为点 z 的像，点 z 为点 w 的原像.

2）复变函数的极限与连续性

定义 1.2 设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义.若有确定的复数 $A(A\neq\infty)$ 存在，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，使得对满足 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta\leqslant\rho)$ 的一切 z，都有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(z)$ 当 z 趋向 z_0 时的**极限**.记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 或 $f(z)\to A$（当 $z\to z_0$）.

这个定义的几何意义是：当变点 z 在 z_0 的一个充分小的 δ 邻域时，它们的像点就在 A 的一个给定的 ε 邻域.

z_0 是复平面上的点，因此 z 可以任意方式趋近于 z_0，但不论怎样趋近，$f(z)$ 的值总是趋近于 A.

复变函数极限有类似于实函数极限的性质.例如，当

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A,\quad \lim_{z\to z_0}g(z)=B$$

时，有

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq0).$$

复变函数极限的计算，可归结为实数极限的计算，具体来说，有下面的定理：

定理 1.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

定义 1.3 若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$ 成立，则称 $f(z)$ 在 z_0 处**连续**. 若 $f(z)$ 在区域 D 中每一点连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

由定义 1.3 与定理 1.1 知

定理 1.2 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是

$u(x,y)$与$v(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

上面引进的复变函数极限与连续性的定义与实函数的极限与连续性的定义形式上完全相同,因此微积分中证明的关于连续函数的和、差、积、商(分母不为0)及复合函数仍连续的定理依然成立.由此可知幂函数$w=z^n$(n为正整数)与更一般的多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

是复平面上的连续函数,而有理函数

$$R(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$$

除在分母为0的点外在复平面上也处处连续.

同二元实函数一样,在有界闭区域上的复连续函数,具有下列几个性质:

1. 有界闭区域$\overline{D}$上的连续函数$f(z)$是有界的.

2. 有界闭区域$\overline{D}$上的连续函数$f(z)$,在$\overline{D}$上其模$|f(z)|$至少取得最大值与最小值各一次.

3. 有界闭区域$\overline{D}$上的连续函数$f(z)$在$\overline{D}$上是一致连续的,即对任意给定$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,对任何满足$|z-z'|<\delta$的$z,z'\in\overline{D}$,有$|f(z)-f(z')|<\varepsilon$.

§1.2　典型例题与解题方法

例1　求复数$-1-\mathrm{i}$与$-1+3\mathrm{i}$的辐角及其主值.

解　根据公式(1.1),我们有

$$\mathrm{Arg}(-1-\mathrm{i})=\arg(-1-\mathrm{i})+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

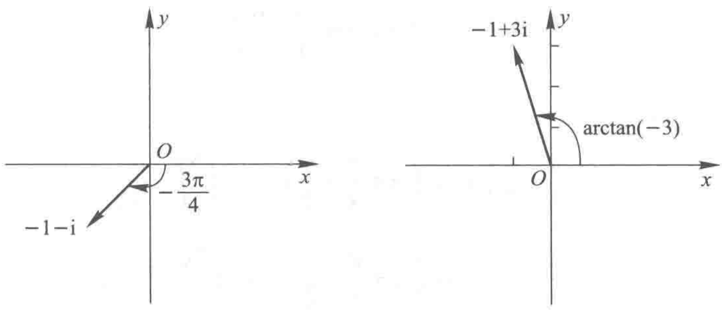
与

$$\arg(-1-\mathrm{i})=\arctan\frac{-1}{-1}-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}.$$

在计算后一式时要注意到点$-1-\mathrm{i}$是在第三象限的(图1.1(a)).从而

$$\mathrm{Arg}(-1-\mathrm{i})=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

同样,



(a) (b)

图 1.1

$$\operatorname{Arg}(-1+3\mathrm{i})=\arg(-1+3\mathrm{i})+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

由于$-1+3\mathrm{i}$在第二象限(图 1.1(b)),所以

$$\arg(-1+3\mathrm{i})=\arctan\frac{3}{-1}+\pi=\arctan(-3)+\pi,$$

从而

$$\operatorname{Arg}(-1+3\mathrm{i})=\arctan(-3)+(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

例 2 把复数$z=1+\sin\alpha+\mathrm{i}\cos\alpha,-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$化为三角表示式与指数表示式，并求$z$的辐角的主值.

解
$$\begin{aligned}z&=1+\sin\alpha+\mathrm{i}\cos\alpha\\&=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\\&=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

因为$-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$.因此

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)<0,$$

故

$$r=|z|=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

由于

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

从而得 z 的三角表示式：

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

及指数表示式：

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

注意，这里的辐角 $\theta=\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ 不是主值，因为

$$\frac{3\pi}{2}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{7}{4}\pi,$$

但它只能与主值相差一个 2π 的整数倍，从上式容易看出，如果不等式的每项各加 (-2π)，得

$$-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<-\frac{\pi}{4}.$$

$-\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ 就符合关于主值的要求了. 因此 $\arg z=-\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. 如果 θ 取主值，那么 z 的三角表示式与指数表示式分别为

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

例 3　设复数 z_1,z_2,z_3 对应于等边三角形的三个顶点，试证：

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=0.$$

证一 由图 1.2 可知,向量$\overrightarrow{z_1z_2}$逆时针转过$\frac{\pi}{3}$得到向量$\overrightarrow{z_1z_3}$,$\overrightarrow{z_2z_3}$逆时针转过$\frac{\pi}{3}$成为$\overrightarrow{z_2z_1}$,并注意复数 $e^{i\frac{\pi}{3}}$的模为 1,辐角为$\frac{\pi}{3}$. 根据复数的乘法有

$$z_3-z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_2-z_1),z_1-z_2=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_3-z_2).$$

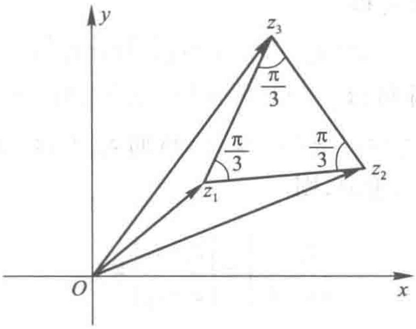


图 1.2

由此得

$$(z_3-z_1)(z_3-z_2)=(z_2-z_1)(z_1-z_2),$$

即

$$z_3^2-z_1z_3-z_2z_3+z_1z_2=z_1z_2-z_1^2-z_2^2+z_1z_2.$$

故

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=0.$$

注 $\overrightarrow{z_1z_2}$表示$\vec{z_2}-\vec{z_1}$,不是$\vec{z_1}-\vec{z_2}$.$\overrightarrow{z_1z_2}$逆时针转过$\frac{\pi}{3}$得到$\overrightarrow{z_1z_3}$,而$\overrightarrow{z_1z_3}$逆时针转过$\frac{\pi}{3}$得到的不是$\overrightarrow{z_1z_2}$,却是$\overrightarrow{z_2z_3}$(设想向量可以平行移动),只有逆时针转过$\frac{5\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{3}$,才能得到$\overrightarrow{z_1z_2}$.

证二 等式 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$可写成

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}, \tag{1}$$

若复数 z_1,z_2,z_3满足式(1),则有

$$|z_3-z_1|^2=|z_1-z_2||z_2-z_3|, \tag{2}$$

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}-1=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-1,$$

即

$$\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}. \tag{3}$$

式(3)两边取绝对值,又可得

$$|z_2-z_3|^2=|z_1-z_2|\,|z_3-z_1|. \tag{4}$$

上面式(2)与式(4)相除可得 $|z_3-z_1|^3=|z_2-z_3|^3$,即 $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.再代入式(2)可知 $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|=|z_1-z_2|$,从而 z_1,z_2,z_3 为一等边三角形的顶点.反之,若 $\Delta z_1z_2z_3$ 为等边三角形,则

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|=1.$$

$$\begin{cases}\arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=\arg(z_2-z_1)-\arg(z_3-z_1)=\pm\dfrac{\pi}{3},\\[2ex] \arg\left(\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)=\arg(z_1-z_3)-\arg(z_2-z_3)=\pm\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

且正负号取法相同,故

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}.$$

例 4　求复数 $z=\dfrac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$的模.

解一　我们当然可以先把 z 化成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式,然后求它的模.但利用复数的共轭运算更为方便.

$$\begin{aligned}|z|^2=z\bar{z}&=\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\cdot\frac{\overline{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}}{\overline{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}}\\&=\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\cdot\frac{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=1,\end{aligned}$$

故 $|z|=1$.

解二　由于本题的特殊性,还可以很快地得出

$$|z|=\frac{|3+\mathrm{i}|\cdot|2-\mathrm{i}|}{|3-\mathrm{i}|\cdot|2+\mathrm{i}|}=1$$（因为一对共轭复数的模相等）.

例 5 如果 $|z|=1$，试证对任何复数 a 与 b，有

$$\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1.$$

证一

$$\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|^2=\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\cdot\frac{\overline{az}+\overline{b}}{b\,\overline{z}+a}$$

$$=\frac{a\,\overline{a}z\,\overline{z}+b\,\overline{b}+az\,\overline{b}+\overline{a}b\,\overline{z}}{b\,\overline{b}z\,\overline{z}+a\,\overline{a}+az\,\overline{b}+\overline{a}b\,\overline{z}}$$

$$=\frac{|a|^2|z|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(az\,\overline{b})}{|b|^2|z|^2+|a|^2+2\mathrm{Re}(az\,\overline{b})}$$

$$=\frac{|a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(az\,\overline{b})}{|b|^2+|a|^2+2\mathrm{Re}(az\,\overline{b})}=1,$$

所以 $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1$.

证二 因为 $|z|=1$，所以 $z=\dfrac{1}{\overline{z}}$.这样，

$$\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=\left|\frac{az+b}{\overline{b}+\overline{az}}\cdot\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{az+b}{\overline{az+b}}\right|\cdot\frac{1}{|z|}=1.$$

例 6 证明：复数 α,β 所表示的向量互相垂直的充要条件为 $\mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta})=0$.

证 由图 1.3 可见，向量 α 与 β 互相垂直的充要条件是

$$|\beta-\alpha|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$

但由于

$$|\beta-\alpha|^2=(\beta-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})=(\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})$$

$$=\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}-(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)$$

$$=|\beta|^2+|\alpha|^2-2\mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta}),$$

所以 α 与 β 互相垂直的充要条件可以改写为

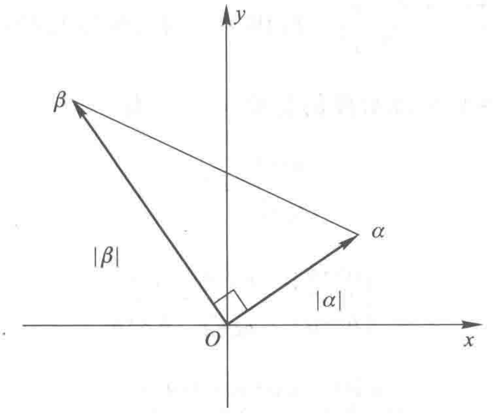


图 1.3

$$\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})=0.$$

例 7　设 n 为自然数,证明等式

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

分析　上面涉及复数 n 次幂的等式,通常需要先将复数化为三角形式,然后再用棣莫弗公式 $(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi$ 证明.

证　令 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$,可知

$$\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}=\frac{1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}{1+\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}$$

$$=\frac{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}-2\mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{\cos\dfrac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{2}}$$

$$=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi,$$

故

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi$$

$$=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

例 8 把 $\cos 3\theta$ 与 $\sin 3\theta$ 用 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 来表示.

分析 由棣莫弗公式显然可见,如果把等式左端用二项式定理展开,并令右端的实部与虚部分别与左端的实部与虚部相等,就可得到 $\cos n\theta$ 与 $\sin n\theta$ 用 $\cos\theta$与 $\sin\theta$ 来表示的表达式.

解 $\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta$

$$=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3$$

$$=\cos^3\theta+\mathrm{i}3\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),$$

从而有

$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$$

例 9 计算$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\right)^{10}$的值.

解 先把括号中的两个复数化成三角形式:

$$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

再由复数的除法和求乘幂的方法,得

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\right)^{10}=\left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}\right]^{10}$$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}$$