Advanced Mathematics

高等数学同步辅导

（下册）

李秀敏 刘秀君 等 编

（第2版）

清华大学出版社

高等数学同步辅导

（下册）

李秀敏　刘秀君　等　编

（第2版）

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是与同济大学数学教研室编写的《高等数学》（第七版）相配套的辅导教材，可供使用该教材的师生参考.

本书分为上、下册，内容编排与教材编写顺序一致. 上册包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和常微分方程.

每节的内容包括教学基本要求、答疑解惑、经典例题解析和习题选解. 每章后有总习题选解和总复习. 上册书末附有常用公式和三套期末考试模拟试卷及其参考答案，下册书末附有三套期末考试模拟试卷及其参考答案和三套数学竞赛试卷.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导. 下册/李秀敏等编.—2 版.—北京：清华大学出版社，2019
ISBN 978-7-302-52585-1

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①高等数学–高等学校–教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 042958 号

责任编辑：佟丽霞　陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×260mm　　**印　张**：19.25　　**字　数**：469 千字
版　次：2015 年 2 月第 1 版　2019 年 3 月第 2 版　　**印　次**：2019 年 3 月第 1 次印刷
定　价：45.00 元

产品编号：082406-01

前　言

本书是根据同济大学数学教研室主编的《高等数学》（第七版）（以下简称为主教材）编写而成的配套辅导教材，可以作为使用该教材的学生同步学习的参考书，也可以供讲授该课程的教师作为教学参考资料.

作为一本与主教材既密切相关，又相对独立的辅导书，在编写时，我们注意把握以下基本原则：对主教材已有的知识尽量不作机械的罗列和重复，重在梳理和总结；按题型分类选配例题，以便于学生较快地掌握解题思路；注重基本概念和基本方法的训练，忌贪全求难；习题解答补充了主教材之外的典型题目，可供课堂教学及习题课练习使用.

本书按照主教材的章节顺序编排内容，便于学生同步学习使用. 各章包括每节的基本内容、总习题选解和总复习. 每节的基本内容包括以下几个部分：

教学基本要求　主要根据教育部《工科类本科数学基础课程教学基本要求》而确定，体现了对学生学习相关知识的要求层次.

答疑解惑　汇集了学生们在学习本节内容时经常产生的疑惑，这些问题通常具有一定的普遍性，常与某些概念有关. 通过对这些问题的分析和解答，不仅能使学生澄清认识，而且往往对教学内容进行了适当的扩充，进而促使学生作深入的思考.

经典例题解析　这部分的例题是多年从事教学工作的老师在教学中反复使用的例题，是对教材中例题的重要补充，通过按题型分类讲解的方式，使学生强化对教学基本要求的理解，让学习更有针对性. 附于例题之后的注解可以帮助学生总结解题规律，丰富解题经验.

习题选解　对主教材中的部分习题给出了较为详细的解答，此外对补充的习题也给出了解答. 在总习题选解部分，对有代表性的习题给出了解答. 鉴于主教材书后给出了习题答案，为避免重复，本书补充了相当数量的典型练习题并给出解答，同时对主教材的重要题目给出了详细的解题步骤.

每章后的总复习包含了本章的重点、难点、综合练习题和参考答案. 这些内容对每章的知识进行了概括、总结、综合和提高，有助于学生从总体上掌握每章相对独立的知识体系.

在本书最后附有三套期末考试模拟试卷及其参考答案，供学生检验自己的学习效果，了解本课程期末考试的题型、题量和难度.

为了使读者通过使用本书获得更好的学习效果，我们提出以下三点建议. 第一，在阅读本书之前，先仔细阅读主教材的相关内容，带着问题再看本书. 第二，对本书中所列的例题和习题，要先自己动手解答，然后再看书中的分析和解答. 第三，每学完一节或一章后，要用自己的语言进行总结和归纳，化被动接受为主动思考.

参加本书编写的主要有刘秀君（教学基本要求和每章的总复习部分）、周正迁（答疑解惑部分）、李秀敏（经典例题解析部分）、屈玲玲（第一章至第四章习题选解和总习题选解）、

王静（第五章至第八章习题选解和总习题选解）和杨英（第九章至第十二章习题选解和总习题选解）. 本书的编写得到了河北科技大学理学院数学系全体老师的大力支持，在试用过程中，老师们提出了许多中肯的意见和建议，在此一并致以诚挚的谢意.

由于编者水平所限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2018 年 4 月

目　录

第七章　空间解析几何与向量代数

第一节　空间直角坐标系

一、教学基本要求

1. 掌握空间直角坐标系和空间点的直角坐标的概念.
2. 掌握空间两点间的距离公式.

二、答疑解惑

在空间直角坐标系中，xOy 坐标面上方点的坐标有何特征？

答　过 xOy 坐标面上方的点作垂直于 z 轴的平面，与 z 轴的交点一定在 z 轴的正半轴上，其竖坐标大于零，故在空间直角坐标系中，在 xOy 坐标面上方的点 M (x,y,z) 的竖坐标 z 一定大于零.

三、经典例题解析

题型　空间直角坐标的概念

例 1　指出下列各点所在的坐标面或坐标轴：$A(-2,1,0)$，$B(0,-1,3)$，$C(1,0,0)$，$D(0,-1,0)$.

解　$A(-2,1,0)$ 在 xOy 坐标面上，$B(0,-1,3)$ 在 yOz 坐标面上，$C(1,0,0)$ 在 x 轴上，$D(0,-1,0)$ 在 y 轴上.

例 2　求点 $A(1,2,3)$ 分别关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标.

解　（1）点 $A(1,2,3)$ 关于 xOy 坐标面的对称点为 $(1,2,-3)$，关于 yOz 坐标面的对称点为 $(-1,2,3)$，关于 zOx 坐标面的对称点为 $(1,-2,3)$；（2）点 $A(1,2,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $(1,-2,-3)$，关于 y 轴的对称点为 $(-1,2,-3)$，关于 z 轴的对称点为 $(-1,-2,3)$；（3）点 $A(1,2,3)$ 关于坐标原点的对称点为 $(-1,-2,-3)$.

例 3　求点 $A(4,-2,-3)$ 到 xOy 坐标面及 y 轴的距离.

解　点 A 到 xOy 坐标面的距离即为点 A 的竖坐标的绝对值，即点 A 到 xOy 坐标面的距离为 3；过点 A 作垂直于 xOy 坐标面的直线 AB，垂足为点 B，过点 B 再作垂直于 y 轴的直线 BC，垂足为点 C，于是直线 AC 垂直于 y 轴，即线段 AC 的长度为点 A 到 y 轴的距离，而在直角三角形 ABC 中，$|AC|=\sqrt{|AB|^2+|BC|^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，于是点 A 到 y 轴的距离为 5.

四、习题选解

1．求点 $(-2,3,-5)$ 分别关于下列条件对称点的坐标：（1）xOy坐标面；（2）y轴；（3）坐标原点.

解　（1）关于 xOy 坐标面的对称点为 $(-2,3,5)$；（2）关于 y 轴的对称点为 $(2,3,5)$；（3）关于坐标原点的对称点为 $(2,-3,5)$.

2．求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$，z 轴及 xOz 坐标面的距离.

解　到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $d_1=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$，到 z 轴的距离为 $d_2=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，到 xOz 坐标面的距离为 $d_3=3$.

3．在 yOz 坐标面上，求与 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 三点等距离的点.

解　设所求点的坐标为 $(0,y,z)$，因为该点到 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 三点的距离相等，所以 $(z-1)^2+(y-5)^2=(z+2)^2+(y+2)^2+4^2$，并且 $(z-1)^2+(y-5)^2=(z-2)^2+(y-1)^2+3^2$，解得 $y=1$，$z=-2$，所以该点的坐标为 $(0,1,-2)$.

4．在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限：$A(1,-2,3)$，$B(2,3,-4)$，$C(2,-3,-4)$，$D(-2,-3,1)$.

解　$A(1,-2,3)$ 在第四卦限，$B(2,3,-4)$ 在第五卦限，$C(2,-3,-4)$ 在第八卦限，$D(-2,-3,1)$ 在第三卦限.

5．求点 (a,b,c) 分别关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点.

解　（1）关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$，关于 yOz 面的对称点为 $(-a,b,c)$，关于 xOz 面的对称点为 $(a,-b,c)$；

（2）关于 x 轴的对称点为 $(a,-b,-c)$，关于 y 轴的对称点为 $(-a,b,-c)$，关于 z 轴的对称点为 $(-a,-b,c)$；

（3）关于坐标原点的对称点为 $(-a,-b,-c)$.

6．试证明以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明　由空间直角坐标系中两点距离公式得三角形三条边长分别为

$$AB=\sqrt{(4-10)^2+(1+1)^2+(9-6)^2}=7,\quad AC=7,\quad BC=7\sqrt{2}.$$

显然有 $AB=AC=7, AB^2+AC^2=BC^2$，所以此三角形不仅是等腰的还是直角的，即为等腰直角三角形.

第二节　向量及其加减法　向量与数的乘法

一、教学基本要求

1. 理解向量的概念.
2. 掌握向量的线性运算.
3. 理解向量的几何表示.

二、答疑解惑

1．任何向量都有确定的方向吗？

答　应当说，任何非零向量都有确定的方向，而零向量的方向是任意的.

2．设向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$均为非零向量，它们满足什么条件，可以使下面的式子成立？

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； （2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； （3）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$．

答 （1）由向量加、减法的平行四边形法则可知，在以向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形中，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$都表示平行四边形两条对角线的长度．若两条对角线的长度相等，则该平行四边形应是矩形，故当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$垂直时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$．

（2）根据前面的讨论可知，当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})>\dfrac{\pi}{2}$时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$成立．

（3）根据向量减法的三角形法则知，一般来说，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，仅当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$时，才有$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$．

3．向量之间可以比较大小吗？

答 不能．向量是既有大小，又有方向的量，无所谓大小．但是，向量的模是一个实数，所以说，两个向量可以比较它们模的大小．

4．下列式子的几何意义是什么？（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$；（2）$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，其中$\lambda,\mu$为实数．

答 根据多个向量相加的法则，（1）表示当三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$依次首尾相接时，第三个向量的终点与第一个向量的起点相接，所以（1）表示或是三个向量共线，或是以三个向量为边构成一个三角形．

（2）表示向量$\boldsymbol{c}$可由向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$经线性运算得到（也称$\boldsymbol{c}$能由$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$线性表示），因此，当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行时，$\boldsymbol{c}$平行于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$确定的平面，即$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行时，$\boldsymbol{c}$平行于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$．

三、经典例题解析

题型 有关向量的运算问题

例1 设$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$．

解 $3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}=3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-2(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$．

例2 已知非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，求一个向量$\boldsymbol{c}$，使之平分向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之间的夹角．

解 因为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为非零向量，所以其单位向量$\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$存在，且$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$．以$\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$为邻边所生成的平行四边形是一个菱形，这个菱形的对角线平分对角，于是可取$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$．

例3 在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，证明四边形$ABCD$为梯形．

分析 利用向量关系证明四边形$ABCD$中的一组对边互相平行，则可知四边形$ABCD$为梯形．

证明 在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{BC}$，所以向量$\overrightarrow{AD}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$，即四边形$ABCD$中的一组对边$AD$和$BC$互相平行，于是四边形$ABCD$为梯形．

例 4　设$\triangle ABC$的边AB被点M和N三等分，已知$\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{n}$，求$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$.

解　将CM延长到D，使得$|\overrightarrow{MD}|=|\overrightarrow{CM}|$，连接$AD$, ND，则$ACND$是平行四边形. 因此有$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CM}$，即$\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$. 同理可得$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$.

四、习题选解

1．如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

解　如图 7-1 所示，点M为对角线AC与BD的交点，则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，于是四边形$ABCD$是平行四边形.

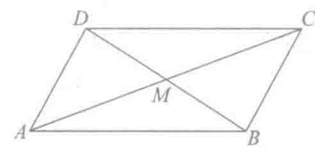

图　7-1

2．设$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

第三节　向量的坐标

一、教学基本要求

1. 理解向量在坐标轴上的投影.
2. 理解向量的坐标.
3. 掌握向量的模与方向余弦的坐标表达式.
4. 掌握单位向量的坐标表达式.

二、答疑解惑

1．如何确定一个向量？

答　确定向量通常有两种方法，一是依据向量既有大小又有方向的特点，分别求出它的大小（模）和方向（方向角或方向余弦）；二是求出向量的三个坐标，不妨设为a_x,a_y,a_z，即可写出向量$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$.

2．怎样求向量的坐标？

答　求向量的坐标，要根据已知的条件，采取不同的方法.

（1）若已知向量$\boldsymbol{a}$按基本单位向量的分解式，即$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$.

（2）若已知向量的起点坐标$M_1(x_1,y_1,z_1)$和终点坐标$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

（3）若已知向量$\boldsymbol{a}$的模和方向角α,β,γ，则$\boldsymbol{a}=\{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,|\boldsymbol{a}|\cos\beta,|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\}$.

（4）若已知$\boldsymbol{a}$平行于$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则$\boldsymbol{a}=\{\lambda b_x,\lambda b_y,\lambda b_z\}$，其中数$\lambda$由$\boldsymbol{a}$的模和方向确定.

（5）根据向量的运算性质确定.

三、经典例题解析

题型　有关向量的坐标问题

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 3，且其方向角为 $\alpha=\gamma=60^\circ$，$\beta=45^\circ$，求向量 $\boldsymbol{a}$.

解　根据已知条件，可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，于是

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha\boldsymbol{i}+|\boldsymbol{a}|\cos\beta\boldsymbol{j}+|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\boldsymbol{k}=\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+\frac{3}{2}\boldsymbol{k}.$$

例 2　从点 $A(2,-1,7)$ 沿着向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的方向取 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{38}$，求点 B 的坐标.

解　设点 B 的坐标为 (x,y,z)，则向量 $\overrightarrow{AB}=\{x-2,\ y+1,\ z-7\}$. $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{3,\ 5,\ -2\}$，于是向量 $\overrightarrow{AB}$ 和向量 $\boldsymbol{s}$ 互相平行且方向一致，可得 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-7}{-2}$. 令 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-7}{-2}=k(k>0)$，则

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3k)^2+(5k)^2+(-2k)^2}=\sqrt{38},$$

解得 $k=1$，于是 $x=3k+2=5$，$y=5k-1=4$，$z=-2k+7=5$，所以点 B 的坐标为 $(5,4,5)$.

例 3　求与向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 平行的单位向量.

解　与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量有无数多个，但与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量只有两个，它们是 $\pm\boldsymbol{a}^0=\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}\{1,3,-2\}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$.

四、习题选解

1．已知 $A(1,0,2)$，$B(4,5,10)$，$C(0,3,1)$，$D(2,-1,6)$ 和 $\boldsymbol{m}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求：（1）向量 $\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}$ 在三个坐标轴上的投影及分向量；（2）$\boldsymbol{a}$ 的模；（3）$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦；（4）与 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量.

解　（1）$\overrightarrow{AB}=\{3,5,8\}$, $\overrightarrow{CD}=\{2,-4,5\}$, $\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}=\{13,7,51\}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $a_x=13$，$a_y=7$，$a_z=51$，在三个坐标轴上的分向量分别为 $a_x\boldsymbol{i}=13\boldsymbol{i}$，$a_y\boldsymbol{j}=7\boldsymbol{j}$，$a_z\boldsymbol{k}=51\boldsymbol{k}$.

（2）$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{13^2+7^2+51^2}=\sqrt{2819}$.

（3）$\cos\alpha=\dfrac{13}{\sqrt{2819}}$，$\cos\beta=\dfrac{7}{\sqrt{2819}}$，$\cos\gamma=\dfrac{51}{\sqrt{2819}}$.

（4）与 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{2819}}\{13,7,51\}$ 与 $-\dfrac{1}{\sqrt{2819}}\{13,7,51\}$.

2．已知 $A(2,-1,7)$，$B(4,5,-2)$，线段 AB 交 xOy 面于点 P，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，求 λ 的值.

解　设点 $P(x,y,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=\{x-2,y+1,-7\}$，$\overrightarrow{PB}=\{4-x,5-y,-2\}$，又因为

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，可得$\begin{cases}x-2=\lambda(4-x),\\ y+1=\lambda(5-y),\\ -7=\lambda(-2),\end{cases}$解得$\lambda=\dfrac{7}{2}$.

3．一个向量的终点在点$B(2,-1,7)$，它在x轴、y轴和z轴上的投影依次为4，-4和7，求这个向量的起点A的坐标.

解　设$A(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AB}=\{2-x,-1-y,7-z\}$，由题意知$\overrightarrow{AB}=\{4,-4,7\}$，解得$x=-2$，$y=3$，$z=0$，于是点$A$的坐标是$(-2,3,0)$.

4．设向量$\boldsymbol{a}$的模为4，它与u轴的夹角为$60°$，求$\boldsymbol{a}$在u轴上的投影.

解　$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos 60°=4\times\dfrac{1}{2}=2$.

5．设向量的方向余弦分别满足（1）$\cos\alpha=0$；（2）$\cos\beta=1$；（3）$\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解　（1）此向量垂直于x轴，平行于yOz坐标面.

（2）此向量指向与y轴正方向一致，垂直于xOz坐标面.

（3）此向量平行于z轴，垂直于xOy坐标面.

第四节　数量积　向量积　混合积

一、教学基本要求

1. 熟练掌握用坐标表达式进行向量的数量积与向量积的运算.
2. 掌握两个向量夹角的求法.
3. 熟练掌握两个向量互相垂直、平行的条件.

二、答疑解惑

1．设$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，或$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，那么$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$成立吗？

答　在数量积和向量积的运算中，这种消去律不成立. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$等价于$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，因此只要$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$垂直就有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，但是$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$垂直不一定有$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 例如$\boldsymbol{a}=\{1,0,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,1,0\}$，$\boldsymbol{c}=\{0,1,1\}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1$，显然$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$等价于$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，因此只要$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$共线，就有$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$. 但是$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$共线不一定有$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 例如$\boldsymbol{a}=\{1,0,1\},\boldsymbol{b}=\{1,1,0\},\boldsymbol{c}=\{0,1,-1\}$，则$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\{-1,1,1\}$，显然$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

2．若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是单位向量，那么$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$也是单位向量吗？

答　不一定. 由于$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是个向量，只有当$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=1$时，它才是单位向量，但是$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，所以当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是单位向量且它们相互垂直时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$才是单位向量.

3．以下等式成立吗？为什么？

（1）$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$；（2）$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2$.

答 在一般情况下，以上二式都不对.

（1）的左端是与$\boldsymbol{a}$平行的向量，而右端是与$\boldsymbol{b}$平行的向量. 只有当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$时，（1）才成立.

（2）的左端$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=\left(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\right)^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cdot\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，而右端却没有$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，所以只有当$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$时，（2）才成立.

4．数量积的主要用途有哪些？

答 （1）求向量的模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

（2）求两个向量的夹角：当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\arccos\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

（3）求一个向量在另一个向量上的投影：$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{b}$.

特别地，向量$\boldsymbol{a}$在直角坐标系中的坐标为：$a_x=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}$；$a_y=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}$；$a_z=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}$.

（4）向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$或$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

5．向量积的主要用途有哪些？

答 （1）求与两个非共线向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同时垂直的向量$\boldsymbol{s}$，可取$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

（2）求由两个非共线向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$所确定的平面的法向量$\boldsymbol{n}$，可取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

（3）求以向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

（4）给定不共线的三点A,B,C，求点C到直线AB的距离：$d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$.

（5）向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行（即共线）的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$或$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

三、经典例题解析

题型 有关向量的数量积与向量积的运算

例 1 填空：（1）设向量$\boldsymbol{a}=\{3,2,1\}$，$\boldsymbol{b}=\left\{2,\dfrac{4}{3},k\right\}$，若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，则$k=$________；若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，则$k=$________.（2）设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，则$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$________.

解 （1）应分别填$-\dfrac{26}{3}$和$\dfrac{2}{3}$. 因为若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$3\cdot2+2\cdot\dfrac{4}{3}+1\cdot k=0$，从而解得$k=-\dfrac{26}{3}$；若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，则对应坐标成比例，即$\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{k}$，从而解得$k=\dfrac{2}{3}$.

（2）应填 24．因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$，注意到已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，故

$$\left|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right|=2\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\right|=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{2}=2\times3\times4\times1=24.$$

例 2 求向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 上的投影.

解 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3\times1+1\times(-2)+2\times2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}$.

例 3 求向量 $\boldsymbol{b}$，使得它与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$.

解 设向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $\{x,y,z\}$，由已知可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x-y+2z=-18$，又因为向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 平行，所以令 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2}=k$，则 $x=2k,\ y=-k,\ z=2k$，将它们代入到 $2x-y+2z=-18$ 中，得到 $k=-2$．于是 $x=-4,\ y=2,\ z=-4$，所以向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $\{-4,2,-4\}$.

例 4 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求向量 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模和它与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解 $|\boldsymbol{d}|^2=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=14$，所以 $|\boldsymbol{d}|=\sqrt{14}$．又

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{14}\times2}=\frac{2}{\sqrt{14}},$$

故 $\theta=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

例 5 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$|\boldsymbol{c}|=7$，并且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 的值.

解 因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，又因为 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=|-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 同向，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 反向，向量 $\boldsymbol{b}$ 也与向量 $\boldsymbol{c}$ 反向，于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=2\times5\cos0+5\times7\cos\pi+7\times2\cos\pi=10-35-14=-39.$$

进一步地，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin0=0$，$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\pi=0$，$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\sin\pi=0$，因此

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

例 6 若 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，求：（1）向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角；（2）以向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

解 （1）设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 α，则 $\cos\alpha=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}$．由题设可知

$$|\boldsymbol{a}|^2=3,\ |\boldsymbol{b}|^2=1,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right)=\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2},\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7,$$

即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$．$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，即 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$.

又因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=2$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，即 $\alpha=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

（2）所求平行四边形的面积为

$$|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=|-5(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

注 平行四边形的面积是由向量积的模的几何意义得到的，在这里向量积 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 的模 $|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|$ 表示以向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

例 7 证明：（1）若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线；（2）$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$.

证明 （1）要证两个向量共线，即证两个向量平行，亦即证 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$. 因为

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

（2）设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta$，所以

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta+|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$$

例 8 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{b}$，且两个向量的夹角为 θ. 过点 M_2 作线段 M_1M_3 所在的直线的垂线，垂足为点 D. （1）证明 $\triangle M_1M_2D$ 的面积等于 $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{b}|^2}$；（2）求向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为何值时，$\triangle M_1M_2D$ 的面积取得最大值？

解 （1）设 $\triangle M_1M_2D$ 的面积为 S，则 $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{M_1D}|\cdot|\overrightarrow{M_2D}|=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\cos\theta||\boldsymbol{a}|\sin\theta=\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2|\sin 2\theta|$. 又因为 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，所以

$$\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin\theta|\cos\theta|}{2|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2|\sin 2\theta|=S.$$

（2）由 $S(\theta)=\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2|\sin 2\theta|$，可得当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$\triangle M_1M_2D$ 的面积取得最大值.

四、习题选解

1. 判断题：

（1）若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. （ ）

（2）若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. （ ）

（3）若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. （ ）

（4）若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. （ ）

（5）若 $\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{b}^0$ 均是单位向量，则 $\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{b}^0$ 也是单位向量. （ ）

（6）若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，并且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相互垂直且均为单位向量. （ ）

（7）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.　（　）

（8）若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均为单位向量，且$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.　（　）

解　（1）×；（2）×；（3）×；（4）×；（5）×；（6）√；（7）×；（8）×.

2．求向量$\boldsymbol{a}=\{4,-3,4\}$在向量$\boldsymbol{b}=\{2,2,1\}$上的投影.

解　$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=2$.

3．设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；（2）$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$；（3）$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的余弦.

解　（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$.

（2）$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=(-6)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$，$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}$.

（3）$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

4．已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求$\triangle OAB$的面积.

解　因为$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，所以

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}\sqrt{9+9+1}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

5．试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

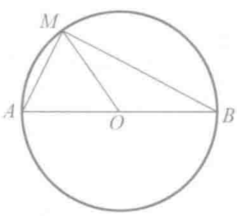

图　7-2

证明　如图7-2所示，给定一个圆O，$\angle AMB$是直径AB所对的圆周角. 因为

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=(-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$
$$=-|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OM}|^2=0,$$

所以$\angle AMB$是直角.

6．设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为单位向量，且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解　由$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$得$\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以

$$2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$
$$=\boldsymbol{b}\cdot(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\cdot(-\boldsymbol{c})=-3,$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

7．已知$M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$和$M_3(3,1,3)$. 求与$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,4,-1\}$，$\overrightarrow{M_2M_3}=\{0,-2,2\}$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\{6,-4,-4\}$，所求单