时代云图 SHI DAI YUN TU

理工社®

【张宇数学教育系列丛书】

2020

张宇
考研数学
题源探析经典
1000题

（解析分册 · 数学一）

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

时代云图 SHI DAI YUN TU 理工社®

【张宇数学教育系列丛书】

张宇
考研数学
题源探析经典
1000题

（解析分册 · 数学一）

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 解析分册. 数学一 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2019.3(2019.7重印)

ISBN 978-7-5682-6818-9

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第038924号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 蠡县天德印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 21
字　　数 / 524千字
版　　次 / 2019年3月第1版　2019年7月第4次印刷
定　　价 / 66.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 杜　枝
责任印制 / 李志强

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇 高等数学

第 1 章 极限、连续

一、函数极限

1.1【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{-1}{4(\sqrt{1+x})^3}}{2}=-\dfrac{1}{8}$.

1.2【解析】

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}\\
&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{e^x+\dfrac{1}{x-1}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{x-1}\\
&=-\lim_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}\\
&\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\lim_{x\to0}\frac{xe^x}{2x}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

1.3【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}-e^2+e^2\ln(1+x)}{x}$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}-e^2}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^2\ln(1+x)}{x}\\
&=e^2\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}+e^2=e^2\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)-2x}{x^2}+e^2\\
&=e^2\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{x}+e^2=-e^2+e^2=0.
\end{aligned}
$$

1.4【解析】方法一 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x^2)\left\{1-\left[1-\dfrac{1}{2}(2x)^2+\dfrac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)\right]\right\}-2x^2}{x^4}$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)\left(2x^2-\dfrac{2}{3}x^4\right)-2x^2+o(x^4)}{x^4}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

方法二 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{x^2(1-\cos 2x)}{x^4}+\dfrac{(1-\cos 2x)-2x^2}{x^4}\right]$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot 2x^2}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x-4x}{4x^3}$$

$$=2+\lim_{x\to0}\frac{4\cos 2x-4}{12x^2}=2+\frac{1}{3}\cdot(-2)=\frac{4}{3}.$$

方法三 原式$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x^2)\sin^2 x-x^2}{x^4}$

$$=2\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2\sin^2 x}{x^4}+\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}\right)$$

$$=2\left(1+\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x}{x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^3}\right)$$

$$=2\left(1-2\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{3}.$$

1.5【解析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}\sin^2 x-\tan^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x(\sqrt{1-x^2}\cos^2 x-1)}{x^4\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}\cos^2 x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)\cos^2 x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(-x^2)\cdot1}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}.$$

1.6【解析】由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\cos\frac{1}{x}}{3\sin^2 x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$，知$3\sin^2 x+x^3\cos\dfrac{1}{x}\sim3\sin^2 x\sim3x^2(x\to0)$，故

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)^x-1\right]}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{2}{3}\tan x}{3x^2}=\frac{2}{9}.$$

1.7【解析】$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-6}{x^2-4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5}}=\dfrac{1}{8}.$

1.8【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\displaystyle\int_0^x\frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{(\sqrt{x+1}-1)\sqrt{4+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}+1)\sin 2x}{x\sqrt{4+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{4+x^2}}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=2.$$

1.9【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$

$$\xlongequal{\text{令 } x=\frac{1}{t}}\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

1.10【解析】$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^3)}=\lim\limits_{x\to3^+}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\ln(x-3)}{\ln(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^3)}$

$$=\cos 3\cdot\lim_{x\to3^+}\frac{1}{\mathrm{e}^x}\cdot\lim_{x\to3^+}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^3}{x-3}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^3}\cdot\cos 3\cdot\lim_{x\to3^+}\mathrm{e}^x=\cos 3.$$

1.11【解析】原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2}{\dfrac{1}{x^2}}$

$$\xlongequal{\text{令 } u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0}\frac{a^u+a^{-u}-2}{u^2}=\lim_{u\to0}\frac{a^u\ln a-a^{-u}\ln a}{2u}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{a^u(\ln a)^2+a^{-u}(\ln a)^2}{2}=(\ln a)^2.$$

1.12【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}.$$

1.13【解析】令 $x=\dfrac{1}{t}$,有

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+2t+t^3}-\mathrm{e}^t}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}(1+2t+t^3)^{-\frac{2}{3}}(2+3t^2)-\mathrm{e}^t}{1}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot1\cdot2-1=-\frac{1}{3}.$$

1.14【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x(1-\mathrm{e}^{-x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

1.15【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)\ln x}$,

$$\lim_{x\to0^+}\ln x\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)=\lim_{x\to0^+}\ln x\ln\left(1+\frac{-2}{\ln x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\ln x\cdot\frac{-2}{\ln x+1}=-2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}=\mathrm{e}^{-2}$.

1.16【解析】原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\tan\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)}{x}\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sec^2\dfrac{\pi x}{1+2x}}{\tan\dfrac{\pi x}{1+2x}} \cdot \frac{\pi}{(1+2x)^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2\pi}{(1+2x)^2}}{\sin\dfrac{2\pi x}{1+2x}}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{8\pi}{(1+2x)^3}}{\cos\dfrac{2\pi x}{1+2x}\cdot\dfrac{2\pi}{(1+2x)^2}}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{1+2x}\right\} = e^0 = 1.$$

1.17【解析】 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{x\sin x}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

1.18【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)}{x^2}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

1.19【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-x\left[1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)\right]}{x-\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)}{\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)} = 2.$$

1.20【解析】 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}x^2-\left[1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{\left\{\left[1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]-\left[1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\right\}\cdot\dfrac{x^2}{2}}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{4}.$$

1.21【解析】 原式 $\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{\left[1+\dfrac{1}{6}t+o(t)\right]-\left[1-\dfrac{1}{6}t+o(t)\right]}{t} = \frac{1}{3}.$$

1.22【解析】 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}-\tan\dfrac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\frac{(2+t^2)e^t-2\sqrt{1+t^6}}{2t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(2+t^2)\left[1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)\right]-2\left[1+\frac{1}{2}t^6+o(t^6)\right]}{2t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{2t+o(t)}{2t^3}=+\infty.$$

1.23【解析】 当 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x$，$x\sin^2 x\sim x^3$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

1.24【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

1.25【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a-\frac{a}{1+ax}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$

1.26【解析】

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}-\frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right],$$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}=-1$，故原极限 $=\frac{e}{2}$.

1.27【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,dt}{\frac{1}{3}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot2\sin x\cdot\cos x}{\frac{4}{3}x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^3 x}{\frac{4}{3}x^3}=\frac{3}{2}.$$

1.28【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{\frac{1}{2}x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,dt}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

1.29【解析】 原式 $=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^x\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

【注】常用的公式：$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$.

1.30【解析】因为当 $x\to0$ 时，有

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)；\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)；e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2 2!}+o(x^4).$$

故原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+o(x^4)}=\dfrac{1}{6}.$

1.31【解析】因为当 $x\to0$ 时，$\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}$，又

$$\ln\frac{2+\cos x}{3}=\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\sim\frac{\cos x-1}{3}\sim\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3}=-\frac{1}{6}x^2,$$

故原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\dfrac{1}{6}.$

1.32【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\frac{\sin^2x+e^x}{e^x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2+e^{2x}}{e^{2x}}\right)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{e^x}\cdot\frac{e^{2x}}{x^2}=\lim_{x\to0}e^x=1.$$

1.33【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{-1+\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{1-x}+1=1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}=1+1=2.$$

1.34【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，因为

$$\lim_{x\to0}\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{nx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{n}\left(\frac{a_1^x-1}{x}+\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\frac{a_n^x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n),$$

故原极限 $=e^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$

1.35【解析】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A$，所以$\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$. 又当$x\to 0$时，

$$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a.$$

所以 $\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim Ax\ln a+\alpha\cdot x\ln a\sim Ax\ln a(x\to 0)$，因此

$$f(x)\sim Ax\ln a\cdot\sin x(x\to 0),$$

于是得到$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ax\ln a\cdot\sin x}{x^2}=A\ln a$.

1.36【解析】 设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$，令$x-1=t$，则

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+\lim_{x\to 1}\left[2x^2e^{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}f(x)\right]$$

$$\Rightarrow A=\lim_{t\to 0}\frac{t-\arctan t}{t^3}+2A$$

$$\Rightarrow A=-\lim_{t\to 0}\frac{t-\arctan t}{t^3}=-\lim_{t\to 0}\frac{t-\left[t-\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)\right]}{t^3}=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}-\frac{2}{3}x^2e^{x-1}.$$

1.37【解析】 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$$=e^{\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$=e\cdot\left\{1+\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]+\frac{1}{2!}\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]^2+o(x^2)\right\}$$

$$=e\cdot\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right]=e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2),$$

故$A=-\dfrac{e}{2}$，$B=\dfrac{11}{24}e$.

1.38【解析】 因$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e\cdot\left[1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{24}x^2-\dfrac{7}{16}x^3+o(x^3)\right]$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e-A)+\left(-\dfrac{e}{2}-B\right)x+\left(\dfrac{11e}{24}-C\right)x^2-\dfrac{7e}{16}x^3+o(x^3)}{x^3}=D.$$

于是$\begin{cases}e-A=0,\\-\dfrac{e}{2}-B=0,\\\dfrac{11e}{24}-C=0,\\-\dfrac{7e}{16}=D,\end{cases}$ 即$\begin{cases}A=e,\\B=-\dfrac{e}{2},\\C=\dfrac{11e}{24},\\D=-\dfrac{7e}{16}.\end{cases}$

1.39【解析】 当$x<0$时，$g(x)<0$，且$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=0$；

当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+(e^{\frac{1}{x}})^2}=0$.

故 $$\lim_{x\to0^-}f[g(x)]\xlongequal{令\ g(x)=u}\lim_{u\to0^-}f(u)=\lim_{u\to0^-}\frac{\ln(1+u^3)}{\arcsin u-u}=\lim_{u\to0^-}\frac{u^3}{\frac{1}{6}u^3}=6,$$

$$\lim_{x\to0^+}f[g(x)]\xlongequal{令\ g(x)=u}\lim_{u\to0^+}f(u)=\lim_{u\to0^+}\frac{e^{-u}+\frac{1}{2}u^2+u-1}{\frac{1}{6}u^2}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{1-u+\frac{(-u)^2}{2}+\frac{1}{2}u^2+u-1+o(u^2)}{\frac{1}{6}u^2}=6.$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]=6$.

【注】本题若试图先去求 $f[g(x)]$ 的表达式，再进行极限计算，将在形式上产生极大的复杂性而导致各种错误. 事实上，本题的命制特点在于考查考生的整体观和换元思想，是一道区分度高的优秀试题，是中等难度题.

1.40【解析】当 $k\leqslant0$ 时，$I=-\infty$，极限不存在；

当 $k>0$ 时，$I\xlongequal[x=\frac{1}{t}]{\infty-\infty}\lim\limits_{t\to0^+}\left[\left(\dfrac{1}{t^\alpha}+\dfrac{8}{t^4}+2\right)^k-\dfrac{1}{t}\right](\alpha\geqslant5)$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^k-t^{\alpha k-1}}{t^{\alpha k}},$$

只有当 $\alpha k-1=0$，即 $k=\dfrac{1}{\alpha}$ 时，极限才为"$\dfrac{0}{0}$"型，否则极限为 ∞，不存在. 故

$$I=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{\alpha}(8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)}{t},$$

当 $\alpha=5$ 时，$I=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{5}\dfrac{8t+2t^5}{t}=\dfrac{8}{5}$，此时 $k=\dfrac{1}{5}$；

当 $\alpha>5$ 时，$I=0$，此时 $k=\dfrac{1}{\alpha}$.

1.41【解析】通分，可得

$$I=\lim_{x\to0}\frac{ax^3+bx+c\int_0^x e^{-t^2}\,dt}{x^5},\tag{*}$$

由泰勒公式 $e^u=1+u+\dfrac{1}{2}u^2+o(u^2)(u\to0)$，有

$$e^{-t^2}=1-t^2+\frac{1}{2}t^4+o(t^4)(t\to0),$$

则 $$\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\int_0^x\left(1-t^2+\frac{1}{2}t^4\right)dt+o(x^5)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)(x\to0),$$

代入（*）式得

$$I=\lim_{x\to0}\frac{ax^3+bx+c\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5\right)+o(x^5)}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(a-\frac{c}{3}\right)x^3+(b+c)x+\frac{c}{10}x^5}{x^5} = 1,$$

则 $a-\frac{c}{3}=0, b+c=0, \frac{c}{10}=1$，即 $a=\frac{10}{3}, b=-10, c=10$.

【注】如何处理 $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ 是本题的核心难点，绝大多数考生未能正确处理这个表达式，导致做不下去，本题属中等难度题.

1.42【解析】 令 $\sqrt[6]{\cos x}=t$，则 $\sin^2 x = 1-t^{12}$，故

$$\text{原式} = \lim_{t\to 1^-}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}} = -\lim_{t\to 1^-}\frac{t-1}{t^{12}-1} = -\lim_{t\to 1^-}\frac{t-1}{(t-1)(t^{11}+t^{10}+\cdots+t+1)}$$

$$= -\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{t^{11}+t^{10}+\cdots+t+1} = -\frac{1}{12}.$$

【注】① 换元后，写到 $\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}$，亦可直接用洛必达法则，则有原式 $=\lim\limits_{t\to 1^-}\frac{3t^2-2t}{-12t^{11}} = -\frac{1}{12}$；

② 若考生想到当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$，还有一种解法：

由 $\sqrt{\cos x}-1=(1+\cos x-1)^{\frac{1}{2}}-1 \sim \frac{1}{2}(\cos x-1) \sim -\frac{1}{4}x^2$，

$\sqrt[3]{\cos x}-1=(1+\cos x-1)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}(\cos x-1) \sim -\frac{1}{6}x^2$，

故
$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{\cos x}-1)-(\sqrt[3]{\cos x}-1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}.$$

1.43【分析】 先在草稿纸上试一下，看 $\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$，令 $x^{\frac{1}{3}}=t$，即 $x=t^3$，这样便化作 $\frac{1-t}{1-t^3}=\frac{1}{t^2+t+1}$.

当 $x\to 1$ 时，$t\to 1$，于是 $\lim\limits_{t\to 1}\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}$，心中有数了，下面求解.

【解析】 令 $x^{\frac{1}{i}}=t\,(i=3,4,\cdots,n)$，则 $\frac{1-x^{\frac{1}{i}}}{1-x}=\frac{1-t}{1-t^i}=\frac{1}{1+t+\cdots+t^{i-1}}$，

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{\frac{1}{i}}}{1-x} = \lim_{t\to 1}\frac{1}{1+t+\cdots+t^{i-1}} = \frac{1}{i},$$

故
$$\text{原式} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x^{\frac{1}{3}}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1-x}\cdot\cdots\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{n}}}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n} = \frac{2}{n!}.$$

1.44【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}[(1-\cos x)+\cos x\cdot(1-\sqrt{\cos 2x})+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot(1-\sqrt[3]{\cos 3x})]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1-\cos x)+\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1-\sqrt{\cos 2x})+\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1-\cos 3x)$$

$$= \frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.$$

【注】下面是题源，作为一个有用的结论介绍给大家.

求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$.

【解析】令 $f(x)=\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}$，则 $f(0)=1$，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left[e^{\ln f(x)}\right]'=f(x)\cdot\left[\ln f(x)\right]'\\&=f(x)\cdot\left(\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln\cos 2x+\cdots+\frac{1}{n}\ln\cos nx\right)'\\&=f(x)\cdot\left(\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sin 2x}{\cos 2x}\cdot 2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{-\sin nx}{\cos nx}\cdot n\right)\\&=f(x)(-\tan x-\tan 2x-\cdots-\tan nx)\\&=-f(x)\cdot\sum_{k=1}^{n}\tan kx.\end{aligned}$$

故 $I\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f'(x)}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\tan kx}{2x}$$

$$=\frac{f(0)}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\tan kx}{x}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{4}.$$

这样，本题的结果便唾手可得了，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\dfrac{3(3+1)}{4}=3$.

1.45【解析】由于对任意的 x，都有 $f'(x)>0$，知 $f(x)$ 单调增加，所以有 $t>1$，$f(t)>f(1)=1$，故

$$f'(t)=\frac{1}{t^2+f^2(t)}<\frac{1}{t^2+1}(t>1),$$

于是
$$f(x)=1+\int_1^x f'(t)\,dt<1+\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt.$$

由极限保号性知

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)<1+\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt=1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=1+\arctan t\Big|_1^{+\infty}=1+\frac{\pi}{4}.$$

1.46【解析】由 $f'(x)>0$，知 $f(x)$ 单调增加. 又 $f(0)=1$，所以，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$，于是有

$$f'(x)\leqslant\frac{1}{1+x^2}(x\geqslant 0).$$

于是
$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt\leqslant\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x(x\geqslant 0),$$

故

$$f(x)\leqslant 1+\arctan x<1+\frac{\pi}{2}.$$

由单调有界准则知，极限存在，且极限值小于 $1+\dfrac{\pi}{2}$.

二、无穷小比阶

1.47 3 【解析】当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+2x^3)\sim \frac{1}{2}x^2\cdot 2x^3=x^5$，

$$x\sin x^n\sim x^{n+1},\mathrm{e}^{x\tan^2 x}-1\sim x\tan^2 x\sim x^3.$$

由题意得 $n+1=4,n=3$.

1.48 $\frac{3}{2}$ 【解析】当 $x\to 0^+$ 时，

$$\sqrt{1+\tan\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sin\sqrt{x}}=\frac{\tan\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1+\tan\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sin\sqrt{x}}}\sim\frac{1}{2}\tan\sqrt{x}(1-\cos\sqrt{x})\sim\frac{1}{4}(\sqrt{x})^3,$$

所以 $k=\frac{3}{2}$.

【注】本题运用了“分子有理化”和“等价无穷小”技巧.

1.49 (C) 【解析】当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(\mathrm{e}^x-1)^2}=x^2-2x^{\frac{2}{3}}+o(x^{\frac{2}{3}})\sim -2x^{\frac{2}{3}}$.

1.50 (C) 【解析】当 $x\to 0$ 时，$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln(1+x+\sqrt{1+x^2}-1)\sim x+\frac{1}{2}x^2\sim x$，一阶无穷小；

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，二阶无穷小；

$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$，三阶无穷小；

$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right)+\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right)-2\sim x^2$，二阶无穷小.

1.51 (A) 【解析】选项(A)，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x(x\to 0^+)$，一阶无穷小.

【注】当 $x\to 0^+$ 时，选项(B)，$\ln(1+x)-x=\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]-x\sim-\frac{1}{2}x^2$，二阶无穷小；

选项(C)，$\cos(\sin x)-1\sim-\frac{1}{2}\sin^2 x\sim-\frac{1}{2}x^2$，二阶无穷小；

选项(D)，$x^x-1=\mathrm{e}^{x\ln x}-1\sim x\ln x$，不是一阶无穷小.

1.52 (A) 【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x^2\mathrm{e}^{x^2}}{kx^{k-1}}(k=3)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2\mathrm{e}^{x^2}}{3x^2}=\frac{1}{2}.$$

1.53 【解析】因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2}=0,$$