

# 流体力学 (下册)

# Fluid Mechanics

高志球 王宝瑞 编著



科学出版社

# 流体力学

(下册)

高志球 王宝瑞 编著

本书由中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室，江苏高校品牌专业建设工程项目(PPZY2015A016)，2015年江苏省高等教育教改研究立项课题(2015JSJG032)联合资助出版

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书主要论述流体力学的基础概念和基本规律。全书分上、下册，上册主要讨论流体的基本性质、流体运动学、流体动力学和理想流体的简单运动。下册重点介绍涡旋运动、不可压缩流体的黏性运动及流体的波动。并在附录中介绍了场论、哈密顿算符和曲线坐标系等知识。

本书可作为大气科学、海洋科学等相关专业的本科生教材，也可作为相关专业的研究生和科研人员的基础理论参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

流体力学. 下册/高志球, 王宝瑞编著. —北京: 科学出版社, 2017.12

ISBN 978-7-03-056212-8

I. ①流… II. ①高… ②王… III. ①流体力学 IV. ①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 325083 号

责任编辑: 胡 凯 王腾飞 / 责任校对: 彭 涛

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 许 瑞

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

保定市**中画美凯印刷有限公司**印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2017 年 12 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2017 年 12 月第一次印刷 印张: 13 3/4

字数: 330 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前 言

流体力学是力学的一个分支,它以流体为研究对象,是研究流体宏观运动规律以及流体与相邻固体之间相互作用规律的一门学科。

流体力学的研究方法有理论、数值和实验三种。理论研究方法是通过对流体性质及流动特性的科学抽象,提出合理的理论模型,并应用已有的普遍规律,建立控制流体运动的闭合方程组,将原来的具体流动问题转化为数学问题,并在一定的初始条件和边界条件下求解。理论研究方法首先由欧拉(Euler)创立,并逐步完善,发展成理论流体力学,成为流体力学的主要组成部分。但由于数学上存在的局限性,许多实际流动问题难以精确求解。而随着高速计算机的出现,人们逐渐开辟了用数值方法研究流体运动的新方向。数值方法就是把流场划分为许多微小的网格或小区域,在各网格点或各小区域中求支配流动方程式的近似解,通过反复计算提高近似精度,进而得到最终解。这一领域已取得了许多重要进展,并逐渐形成一门专门学科——计算流体力学,这是研究流体力学的一种重要手段。实验研究方法在流体力学中占据重要地位,通过对具体流动的观察与测量来归纳流动规律。理论分析结果需要经过实验来验证,而实验又需用理论来指导,流体力学的实验研究主要是模拟实验。上述三种方法必须互相结合,才能更有效地解决流体力学问题。

流体力学与人类生活、工农业生产密切相关,广泛涉及工程技术和科学研究的各个领域,特别是它与大气科学密切相关,已渗透到大气科学的各个领域,成为大气科学的重要理论基础之一。实际上研究大气和海洋运动规律的动力气象学、动力气候学和动力海洋学,都是流体力学领域中的不同分支。

本书是在王宝瑞教授编写的《流体力学》(气象出版社,1988年)的基础上增加了300余道题解而形成。本书由中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室和南京信息工程大学联合资助出版。为了保证书稿质量,多位流体力学的专家学者和研究生参加了书稿编写的研讨会,以确保书稿的正确性和完整性,对此,我表示衷心感谢。特别感谢李煜斌教授、惠伟先生和博士研究生童兵卓有成效的帮助。感谢科学出版社王腾飞编辑的支持。

书中难免有疏漏之处,恳请读者批评指正。

高志球

2017年4月

# 目 录

## 前言

第 5 章 涡旋运动	1
5.1 基本概念	1
5.1.1 涡量场	1
5.1.2 相对涡度之垂直分量	2
5.1.3 涡线	4
5.1.4 涡面和涡管	5
5.2 亥姆霍兹涡管定理	6
5.3 开尔文环流定理	8
5.3.1 速度环流	8
5.3.2 环流定理	9
5.4 涡旋守恒定理	11
5.4.1 流体的正压性和斜压性	11
5.4.2 开尔文环流守恒定理	12
5.4.3 拉格朗日涡旋守恒定理	13
5.4.4 亥姆霍兹涡线保持定理	14
5.4.5 亥姆霍兹涡管强度守恒定理	14
5.5 涡度定理	15
5.5.1 绝对涡度定理	15
5.5.2 相对涡度定理	16
5.5.3 绝对涡度守恒定理	17
5.6 皮叶克尼斯定理	17
5.6.1 皮叶克尼斯定理的推导	17
5.6.2 力管强度	18
5.6.3 应用	19
5.7 非位势力作用下涡旋的产生	21
习题	24
第 6 章 不可压缩流体的黏性流动	27
6.1 基本方程组	27
6.2 常用正交曲线坐标系中基本方程组的正交分解式	28
6.3 黏性流动的基本特性	30
6.3.1 能量的耗散性	30
6.3.2 黏性流动的有旋性	31

6.3.3	黏性流动的涡旋扩散性	31
6.4	不可压缩黏性流体的定常平行直线流动——黏性流动的准确解	33
6.4.1	二维平板间平行直线流动	33
6.4.2	直圆管中的平行直线流动	36
6.5	两共轴转动圆柱面之间的不可压缩黏性流体的定常圆周运动	38
6.6	二维平板非定常流动的瑞利问题	40
6.6.1	突然加速平板表面附近的层流	40
6.6.2	瑞利问题的一般情况	43
6.7	基本方程组的无量纲化与相似分析	45
6.7.1	基本方程组的无量纲化	45
6.7.2	相似分析	49
6.7.3	特征无量纲数的物理意义	51
6.8	小雷诺数条件下绕小球流动	52
6.8.1	近似方法	52
6.8.2	问题及其求解	52
6.8.3	小球所受之阻力	55
6.9	大雷诺数流动——边界层理论	57
6.9.1	大雷诺数的流动特征及其近似处理	57
6.9.2	边界层概念	58
6.9.3	边界层厚度的各种定义	60
6.9.4	不可压缩流体层流边界层基本方程组	62
6.10	普朗特方程的布拉休斯解	66
6.10.1	方程的建立	66
6.10.2	方程的求解	68
6.10.3	方程解的分析	70
6.11	卡门边界层动量积分方程	72
6.11.1	方程的建立	72
6.11.2	动量积分方程的物理意义	76
6.11.3	波尔豪森法	77
6.12	层流边界层	77
6.13	边界层分离	79
6.13.1	边界层分离	79
6.13.2	纵向压力梯度对边界层的影响	79
6.13.3	逆压力梯度与边界层流动分离	79
6.14	湍流	80
6.14.1	两种流动状态	81
6.14.2	层流与湍流间的相互转变	81
6.14.3	湍流的脉动性	83
6.14.4	平均值	83

6.14.5	平均值的计算规则	85
6.14.6	湍流运动基本方程组	85
6.14.7	普朗特动量传递理论	90
6.14.8	流经无界平面固壁的定常平面平行直线流动的时均速度分布	94
6.14.9	湍流能量方程	98
6.14.10	湍流流场运动中应力及能量耗散的量纲分析	103
	习题	104
<b>第 7 章</b>	<b>流体的波动</b>	<b>109</b>
7.1	波动的基本概念	109
7.2	基本方程组	110
7.2.1	不可压缩理想流体在重力作用下的波动是无旋的势流运动	110
7.2.2	重力表面波的基本方程组	111
7.2.3	边界条件和初始条件	112
7.3	二维表面波	114
7.4	驻波	116
7.4.1	波形	116
7.4.2	波长和周期	117
7.4.3	驻波中个别流体质点的运动情况	118
7.4.4	驻波的压力分布	120
7.5	行进波	120
7.5.1	波形	121
7.5.2	行进波中个别流体质点的运动情况	121
7.5.3	行进波的压力分布	124
7.6	波动能量及其传递	124
7.6.1	波动的势能	124
7.6.2	波动的动能	125
7.6.3	驻波及行进波的能量计算	126
7.6.4	波动能量的传递	127
	习题	128
	答案	130
	主要参考文献	179
	附录 1 场论	180
	附录 2 哈密顿算符	193
	附录 3 曲线坐标系	199
	后记	209

## 第5章 涡旋运动

表征流体质点旋转的特征量为涡度矢量  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ 。流体运动是否属涡旋运动则由流场中涡度矢量是否存在而确定。若在流场某区域中  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ ，该区域内的流体运动即为涡旋运动。若在整个流场范围内  $\boldsymbol{\Omega} = 0$ ，则该流场是无旋的。

流体的涡旋运动在自然界中是大量存在的。例如大气运动中的气旋、反气旋、龙卷风等。地球大气运动中涡旋的形成及变化与天气系统的形成及变化密切相关。因而对涡旋运动的研究在气象上有重大的实际意义。

本章将讨论涡旋发生、发展及消失的规律。

### 5.1 基本概念

#### 5.1.1 涡量场

在流体的涡旋运动中，空间各点的涡度矢量  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$  形成一矢量场，称为涡量场。一般说来，涡量应与空间点的坐标  $x, y, z$  及时间  $t$  有关，即

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(x, y, z, t) \quad (5.1.1)$$

由于

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (5.1.2)$$

由高斯公式得

$$\oint_{\sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (5.1.3)$$

即在涡量场中，通过任意封闭曲面的净涡度通量等于零，可知涡量场是无源场。

研究地球大气运动时，常需考虑地球的自转效应，此时与绝对速度  $\mathbf{V}$  及相对速度  $\mathbf{V}_r$  相对应的涡度矢量分别称作绝对涡度及相对涡度，并分别以  $\boldsymbol{\Omega}$  及  $\boldsymbol{\Omega}_r$  表示之，由于

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.1.4)$$

式中， $\boldsymbol{\omega}$  为地球自转角速度。今以算矢乘上式得

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}_r + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (5.1.5)$$

即

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_r + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (5.1.6)$$

其中

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega} \quad (5.1.7)$$



称为地转涡度, 参见图 5.1.1。

故有

$$\Omega = \Omega_r + 2\omega \quad (5.1.8)$$

绝对涡度在  $z$  坐标系中的分量式为

$$\begin{cases} \Omega_x = \Omega_{rx} \\ \Omega_y = \Omega_{ry} + 2\omega \cos \varphi \\ \Omega_z = \Omega_{rz} + 2\omega \sin \varphi \end{cases} \quad (5.1.9)$$

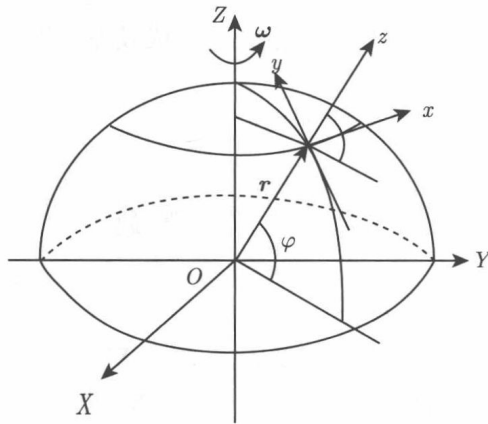


图 5.1.1 涡度示意图

### 5.1.2 相对涡度之垂直分量

在大气学及动力气象学中主要涉及涡度的垂直分量。现在本书来推导相对涡度之垂直分量在自然坐标系中的表达式。为方便, 令  $\xi = \mathbf{k} \cdot \Omega_r = \Omega_{rz}$ 。涡度的垂直分量可以定义为水平面内某一点的环流密度。

$$\xi \equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma} \quad (5.1.10)$$

式中,  $\sigma$  为水平面上以  $l$  为周界的面积。今取封闭曲线  $l$  由两相邻的流线上的线元及其间的法向线元组成。取回路方向为  $p_0 p_1 p_3 p_2 p_0$ , 设  $p_0$  点速度为  $V$ ,  $p_0 p_1 = \delta s$ ,  $p_0 p_2 = \delta n$ , 如图 5.1.2 所示, 于是

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{l} &= \int_{p_0}^{p_1} \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{l} + \int_{p_3}^{p_2} \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{l} \\ &= V \delta s - \left[ V \delta n + \frac{\partial(V \delta s)}{\partial n} \delta n \right] \\ &= -\frac{\partial(V)}{\partial n} \delta s \delta n - V \frac{\partial(\delta s)}{\partial n} \delta n \end{aligned}$$

由图 5.1.2 可知

$$-\frac{\partial(\delta s)}{\partial n} = \delta \beta$$

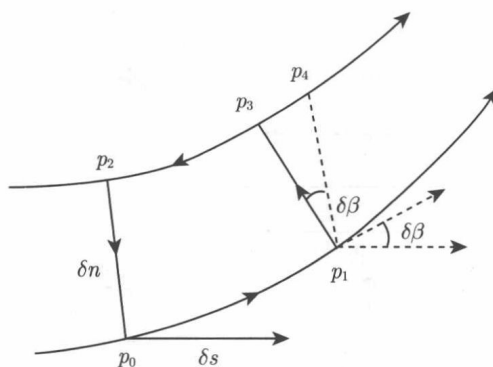


图 5.1.2 相对涡度垂直分量的变化

其中  $\delta\beta$  是流速方向沿流线元  $\delta s$  所产生的变化, 即流线的曲率  $k_s = \frac{\partial\beta}{\partial s}$ 。因此

$$\begin{aligned}\oint_l \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{l} &= \left( -\frac{\partial V}{\partial n} + V \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \delta s \delta n \\ &= \left( -\frac{\partial V}{\partial n} + k_s V \right) \delta s \delta n\end{aligned}$$

$$\xi = \lim_{\substack{\delta n \rightarrow 0 \\ \delta s \rightarrow 0}} \frac{\oint_l \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{l}}{\delta s \delta n} = -\frac{\partial V}{\partial n} + k_s V$$

即

$$\xi = k_s V - \frac{\partial V}{\partial n} \quad (5.1.11)$$

沿流线垂直线的流动,  $k_s = 0$ , 所以

$$\xi = -\frac{\partial V}{\partial n}$$

由式 (5.1.11) 可知相对涡度的垂直分量由两部分组成: ①沿流线流速方向的偏转  $k_s V$ , 称为曲率涡度; ②垂直于气流方向上流速的变化率  $-\frac{\partial V}{\partial n}$ , 称为切变涡度。因此在流体的直线运动中, 只要在运动的垂直方向上流速有变化, 就会有涡度产生。例如在西风急流中, 在最大风速之北, 由于  $\frac{\partial V}{\partial n} < 0$ , 因此  $\xi = -\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ , 即有气旋性涡度, 而最大风速之南, 由于  $\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ ,  $\xi < 0$ , 故有反气旋性涡度, 见图 5.1.3 和图 5.1.4。

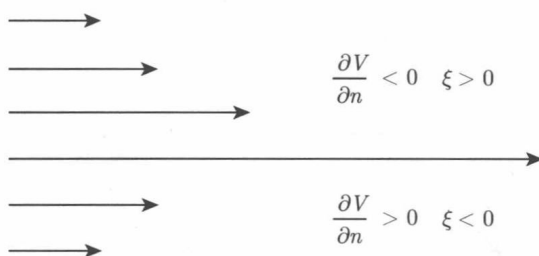


图 5.1.3 相对涡量垂直分量与切变涡度

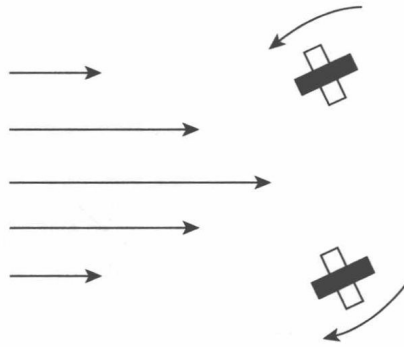


图 5.1.4 气旋性涡度与反气旋性涡度

当流线是曲线情况时,  $\xi$  将由曲率涡度与切变涡度的总和决定, 如图 5.1.5(a) 所示, 曲率涡度  $k_s V > 0$ , 切变涡度  $-\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ , 故得  $\xi > 0$ , 即气旋性涡度。而在图 5.1.5(b) 中, 因为  $\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ , 即切变涡度  $-\frac{\partial V}{\partial n} < 0$ , 而曲率涡度  $k_s V > 0$ , 此时  $\xi$  要由两者的代数和来决定, 若两者大小相等, 则此时涡度  $\xi = 0$ 。

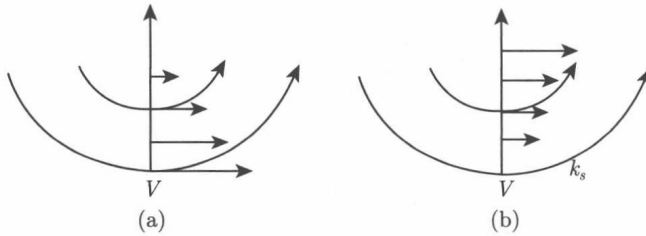


图 5.1.5 曲率涡度与切变涡度的代数关系

应注意流线曲率  $k_s$  之正负是这样规定的: 当流线呈气旋性弯曲时,  $k_s > 0$ ; 当流线呈反气旋性弯曲时,  $k_s < 0$ 。采用自然坐标, 可以很方便地由流线图对涡度  $\xi$  作出定性判断, 因而在天气学及动力气象学中有广泛的应用。

### 5.1.3 涡线

流量场的矢量线就是涡线(图 5.1.6)。

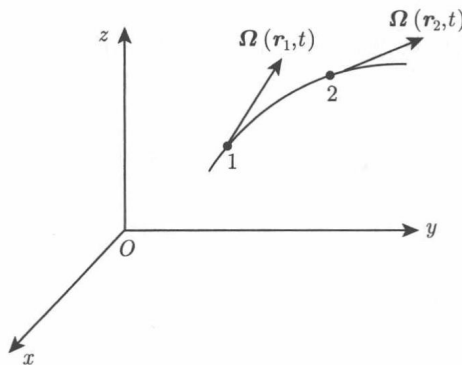


图 5.1.6 某点的涡线

在某一确定时刻，涡线上每一点的切线方向和该点之涡度矢量方向重合。与流线相类似，涡线的微分方程是

$$\frac{dx}{\Omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\Omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\Omega_z(x, y, z, t)} \quad (5.1.12)$$

式中， $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  为涡度矢量在直角坐标系中的分量， $t$  为参量。为了直观地理解涡线的概念，可设想在某一瞬时  $t$  处于某一涡线上的所有流体质点看作刚化了的小珠，这些小珠都具有供穿线用的小孔，用一根线将这些小珠连续地串联起来，使每个小珠均绕该曲线轴旋转，则这条串联小珠的曲线就形成涡线的图像，如图 5.1.7 所示。

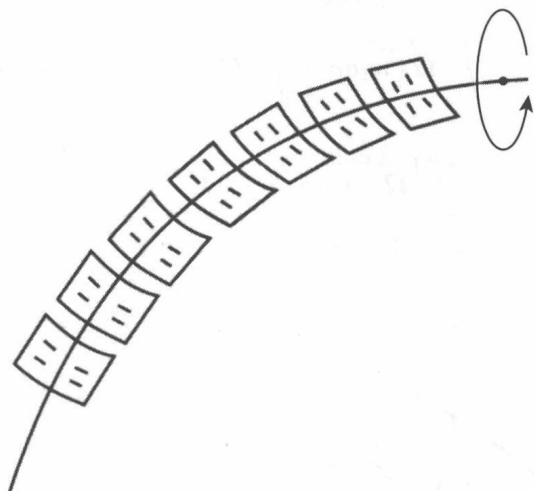


图 5.1.7 类似串联小珠的涡线

应注意这些刚性小珠只反映了流体质点的旋转方向而未涉及其转速和变形。因此，涡线给出的是某一瞬时处于其上的流体质点的瞬时转轴的连线。

#### 5.1.4 涡面和涡管

在涡量场内取一非涡线的曲线，在同一时刻，过该曲线上每点非涡线，由这些涡线所组成的曲面即称为涡面，如图 5.1.8(a) 所示。

在涡量场内取一非涡线的封闭曲线  $l$ ，在同一时刻，过其上每点作涡线，这些涡线所组成的管状曲面称作涡管，如图 5.1.8(b) 所示。

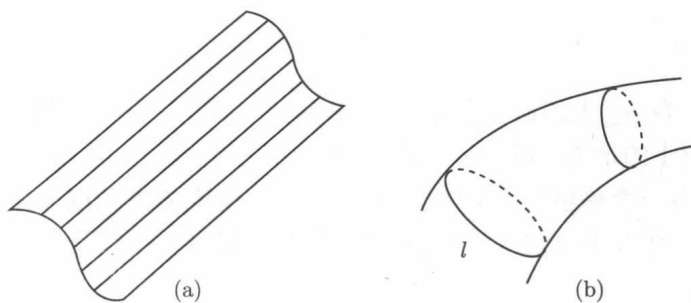


图 5.1.8 涡面与涡管

## 5.2 亥姆霍兹涡管定理

亥姆霍兹(Helmholtz) 涡管定理可表述为, 在某一确定时刻, 同一涡管的不同截面上的涡度通量相等。

证明: 在某一时刻, 任取一段涡管, 如图 5.2.1 所示,  $\sigma_1, \sigma_2$  为涡管的两个任意截面,  $\sigma_3$  为涡管侧面。则由涡量场是无源场的基本性质, 可得

$$\oint_{\sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

$$\oint_{\sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \int_{\sigma_1} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_1 d\sigma + \int_{\sigma_2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_2 d\sigma + \int_{\sigma_3} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_3 d\sigma = 0$$

即有

$$\int_{\sigma_1} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_1 d\sigma = \int_{\sigma_2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_2 d\sigma \quad (5.2.1)$$

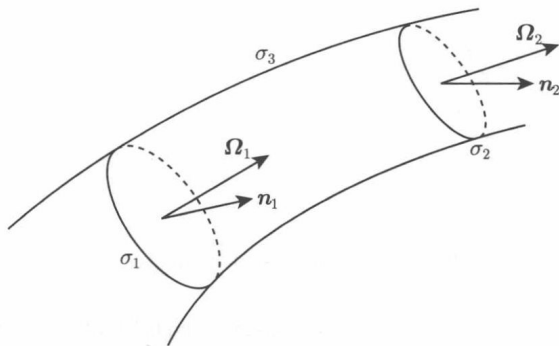


图 5.2.1 所取涡管

因截面  $\sigma_1, \sigma_2$  是沿涡管任意选取的, 由此可知, 在同一时刻, 沿同一涡管各截面的涡度通量不变, 即涡度通量沿涡管守恒。

既然涡度通量对涡管的每一截面都相等, 因此它是涡管的特征量, 称为涡管强度, 用以表征涡管内涡旋的强弱, 上述定理亦可称为亥姆霍兹涡强守恒定理。截面无限小的涡管称为涡管元或涡索。对涡管元而言, 由式 (5.2.1) 可得

$$\boldsymbol{\Omega}_1 \sigma_1 = \boldsymbol{\Omega}_2 \sigma_2 \quad (5.2.2)$$

式中,  $\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2$  为  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  上的涡度矢量, 且设  $\boldsymbol{\Omega}_1 \parallel \mathbf{n}_1, \boldsymbol{\Omega}_2 \parallel \mathbf{n}_2$ 。因此可知, 对于同一涡管元来说, 截面积越小的地方, 流体质点旋转的角速度越大。

具有涡管强度为一个单位的涡管称为单位涡管。在流体中任取一曲面  $\sigma$ , 将  $\sigma$  分成  $\sigma_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$  等  $N$  块 (图 5.2.2), 在每一分块上组成一个涡管, 并使每一涡管具有的涡强为一个单位。即

$$\left| \int_{\sigma_i} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \right| = 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (5.2.3)$$

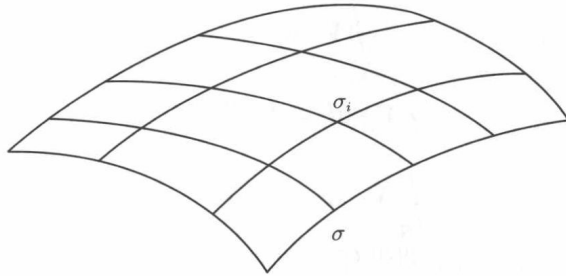


图 5.2.2 表面上的涡管

如各块面积  $\sigma_i$  上的涡度矢沿正法向  $n_i$  的分量为正, 即  $\Omega_{n_i} = \Omega \cos(\Omega, n_i) > 0$  时, 则该涡管称为外出单位涡管。反之, 如  $\Omega_{n_i} = \Omega \cos(\Omega, n_i) < 0$  时, 则称为内进单位涡管。因此以曲面  $\sigma$  为截面之涡管强度可表示为

$$\int_{\sigma} \Omega \cdot d\sigma = \sum_{i=1}^N \int_{\sigma_i} \Omega \cdot d\sigma = \text{外出和内进单位涡管数的差} \equiv N_1 - N_2$$

式中,  $N_1, N_2$  分别为穿过曲面  $\sigma$  的外出、内进单位涡管数。若  $\sigma$  为任意封闭曲面, 则有

$$\oint_{\sigma} \Omega \cdot d\sigma = \sum_{i=1}^N \int_{\sigma_i} \Omega \cdot d\sigma = N_1 - N_2 = 0$$

或

$$N_1 = N_2$$

即穿过任意闭曲面  $\sigma$  的外出单位涡管数等于内进单位涡管数。

$$\left| \oint_{\sigma} \Omega \cdot d\sigma \right| = 1$$

$$\oint_{\sigma} \Omega \cdot d\sigma = \begin{cases} +1, & \text{外出单位涡管} \\ -1, & \text{内进单位涡管} \end{cases}$$

由此可知涡管不能起始于也不能终止于流体内, 而只能在流体的边界处开始或终止, 或者在流体内形成环形或者伸展到无穷远处, 参见图 5.2.3。

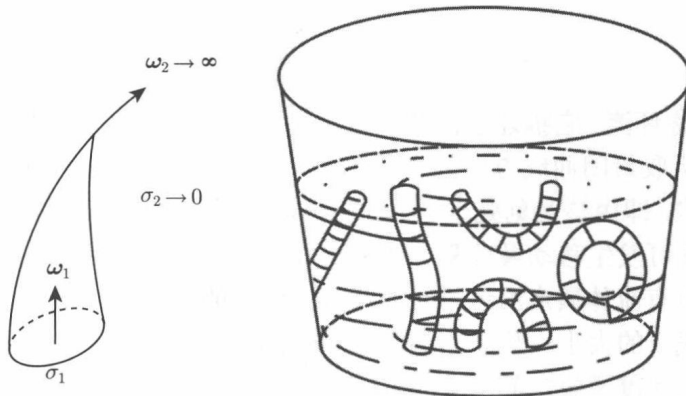


图 5.2.3 涡管及其形象表现

根据斯托克斯公式, 速度环流  $\Gamma = \oint_l \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$  与涡度通量  $\int_\sigma \boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  借下式联系起来:

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \oint_\sigma (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (5.2.4)$$

$$\oint_{l_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{l_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.2.5)$$

式中,  $\sigma$  是以  $l$  为周界的任意曲面, 即沿任意闭曲线  $l$  的速度环流等于以该曲线  $l$  为周界的任意曲面的涡度通量。因此可从涡强守恒定理 (详见 5.4 节) 得出下述推论: 在同一涡管上绕涡管的任意封闭曲线的速度环流相等。应注意, 涡强守恒定理是就同一时刻而言的, 而完全未涉及涡强如何随时间变化的问题。另外, 从上述定理的推证过程可知, 它是涡量场无源性的直接结果, 而对流体性质未作任何限制, 因此该定理对理想流体或真实流体、可压缩流体或不可压缩流体均适用。

## 5.3 开尔文环流定理

### 5.3.1 速度环流

在某一时刻, 在流场内任取一封闭曲线  $l$ , 速度环流定义为

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.3.1)$$

式中,  $d\mathbf{r}$  为  $l$  上的弧元素,  $\mathbf{V}$  为  $d\mathbf{r}$  上的速度矢量, 见图 5.3.1。

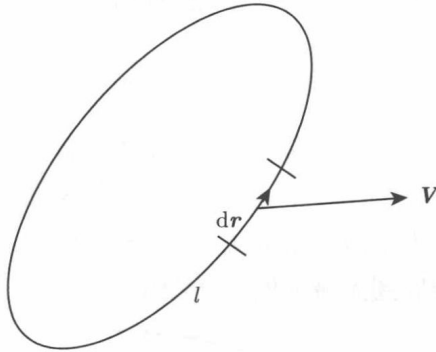


图 5.3.1 封闭曲线上的速度矢量

速度环流  $\Gamma$  简称环流。它描述了流体质点沿封闭曲线  $l$  的运动趋势。如环流  $\Gamma > 0$ , 则表示流体质点有沿所取封闭曲线方向的运动趋势。反之亦然。应注意这里的封闭曲线  $l$  应理解为物质封闭曲线, 即由该时刻处于  $l$  上的流体质点所构成的封闭曲线。在流体运动过程中, 该物质封闭曲线可发生移动及变形。环流  $\Gamma$  描述的是流场的积分性质, 它表示的是该时刻封闭曲线  $l$  上所有流体质点沿该封闭曲线方向运动的总趋势。环流  $\Gamma$  的值须由速度场的分布以及封闭曲线  $l$  的大小、形状、位置、方向来决定。

根据速度环流与涡度通量之间的关系式 (5.2.4), 速度环流  $\Gamma$  与涡度通量均可用来描述涡旋强度。在许多情况下用速度环流来研究涡旋运动更为方便, 因此在流体力学、动力气象学中常采用。

### 5.3.2 环流定理

由于流场的非定常性, 以及流体封闭曲线  $l$  的移动和变形, 沿流体封闭曲线  $l$  的速度环流又将随时间而变化。环流定理给出了环流随时间的变化规律。

#### 1. 运动学形式的环流定理

沿某一封闭流体的速度环流的随体变化率等于对该封闭流体的加速度环流。即

$$\frac{d}{dt} \oint_l \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r} = \oint_l \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (5.3.2)$$

证明:  $t$  时刻在封闭流体线上取一线元  $\delta \mathbf{r}$ 。在  $t + dt$  时刻封闭流体线上相应的线元变成  $\delta \mathbf{r} + d(\delta \mathbf{r})$  (注意: 这里用符号 “ $\delta$ ” 表示对空间的微分, 而用符号 “ $d$ ” 表示随体微分)。其间的关系如图 5.3.2 所示。因为

$$\mathbf{V} dt + \delta \mathbf{r} + d(\delta \mathbf{r}) = \delta \mathbf{r} + (\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}) dt$$

即

$$\frac{d(\delta \mathbf{r})}{dt} = \delta \mathbf{V}$$

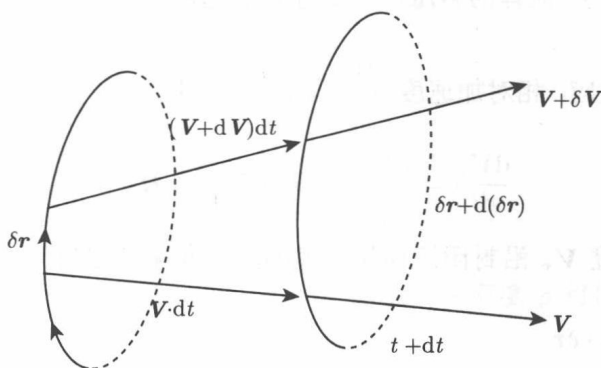


图 5.3.2 无限小时间内封闭流线上线元的变化

所以速度环流  $\Gamma$  的随体变化率可以写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_l \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r} &= \oint_l \left( \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{V} \cdot \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} \right) \\ &= \oint_l \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \oint_l \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{V} \\ &= \oint_l \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \oint_l \delta \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \\ &= \oint_l \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} \end{aligned}$$

其中考虑

$$\oint_l \delta \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = 0$$



于是定理得证。

## 2. 动力学形式的环流定理

### 1) 绝对环流定理

已知 N-S 方程为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) + \nu\nabla^2\mathbf{V}$$

即

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) - \nu\nabla\times\boldsymbol{\Omega} + \nu\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) \quad (5.3.3)$$

将上式代入式 (5.3.2) 得

$$\frac{d}{dt}\oint_l \mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{r} = \oint_l \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} - \oint_l \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\mathbf{r} - \nu\oint_l (\nabla\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\delta\mathbf{r} \quad (5.3.4)$$

式 (5.3.4) 是绝对环流定理, 它表明沿封闭流体线绝对速度环流的随体变化率由作用于流体上的外体力  $\mathbf{F}$ 、压力梯度力  $-\frac{1}{\rho}\nabla p$  及黏性力  $-\nu\nabla\times\boldsymbol{\Omega}$  沿该封闭流体线的环流元代数和决定。由此可知, 非位势力、流体的斜压性及黏性是引起环流变化的三种因素。

### 2) 相对环流定理

考虑到地球自转效应, 相对加速度  $\frac{d\mathbf{V}_r}{dt}$  由下式给出:

$$\frac{d\mathbf{V}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} - 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r) + \mathbf{R}\omega^2 \quad (5.3.5)$$

根据式 (5.3.2) 相对速度  $\mathbf{V}_r$  沿封闭流体线环流的随体变化率应为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\oint_l \mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{r} &= \oint_l \frac{d\mathbf{V}_r}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} \\ &= \oint_l \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} - \oint_l \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\mathbf{r} - \nu\oint_l (\nabla\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\delta\mathbf{r} + \oint_l \omega^2\mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{r} - \oint_l 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r)\cdot\delta\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

其中

$$\oint_l \omega^2\mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{r} = \oint_l \nabla\left(\frac{\omega^2 R^2}{2}\right)\cdot\delta\mathbf{r} = \oint_l \delta\left(\frac{\omega^2 R^2}{2}\right) = 0$$

因此上式可改写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\oint_l \mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{r} &= \oint_l \frac{d\mathbf{V}_r}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} \\ &= \oint_l \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} - \oint_l \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\mathbf{r} - \nu\oint_l (\nabla\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\delta\mathbf{r} - \oint_l 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r)\cdot\delta\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

式 (5.3.7) 就是相对环流定理。它指出, 相对速度  $\mathbf{V}_r$  沿封闭流体线环流的随体变化率由作用于流体的外体力  $\mathbf{F}$ 、压力梯度  $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ 、黏性力  $-\nu\nabla\times\boldsymbol{\Omega}$  及地转偏向力  $-(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r)$  沿该封闭流体线的环流之代数和决定。