

游戏中的数学

YOUXI ZHONG DE SHUXUE

◎ 编著 莫海亮

◎ 审校 吴鹤龄



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

游戏中的数学

YOUXI ZHONG DE SHUXUE

莫海亮 编著◎

吴鹤龄 审校◎

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书有 3 部分，共分 15 章，包括骨牌、多联骨牌的样式、多米诺骨牌、三格骨牌、四格骨牌、六格骨牌、七格骨牌和八格骨牌、伤脑筋十二块概说、没有空洞的图形、有空洞的图形、不用整副拼板的拼图游戏、对若干问题的讨论、多联骨牌其他一些问题、多联钻石与多联蜂窝等内容。书中重点介绍了有趣的智力游戏——多联骨牌、多联钻石和多联蜂窝。其中，五格骨牌在我国的民间玩具中，占有重要的地位，通常被叫作“伤脑筋十二块”，以往有一些科普著作有所涉及，但不系统。其他多联骨牌、多联钻石和多联蜂窝则很少被提及。本书比较全面地讨论了这些游戏，以及其中蕴含的数学问题，读起来令人趣味无穷，又能获益匪浅，适合广大的数学爱好者阅读。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

游戏中的数学 / 莫海亮编著. —北京：电子工业出版社，2016.2

ISBN 978-7-121-27637-8

I. ①游… II. ①莫… III. ①中学数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 281638 号

策划编辑：徐云鹏

责任编辑：郝黎明

印 刷：北京千鹤印刷有限公司

装 订：北京千鹤印刷有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本：720×1 000 1/16 印张：10 字数：192 千字

版 次：2016 年 2 月第 1 版

印 次：2016 年 2 月第 1 次印刷

印 数：3 000 册 定价：39.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序



10 余年前，曾经有出版社引进世界科普名著——德国人 H. J. Press 所著的 *Spiel-das Wissen schafft*，中译本以《游戏中的科学》为名出版。如同原著在德国和其他西方国家长期畅销不衰一样，译著在国内也受到读者的欢迎，被认为是科普读物中的佼佼者。

《游戏中的科学》题材十分广泛，涉及物理、化学、天文、地理、生物等许多科学领域和众多自然现象，但数学的内容不多，在全部 428 个题目中，只有 11 个，不到 3%，而且范围比较窄，只涉及平面几何。电子工业出版社现在推出这部《游戏中的数学》，正好可以在一定程度上弥补该书的短缺。

本书作者莫海亮是一个“80 后”，是我的“忘年交”。2003 年，我的第一部有关数学的科普作品《好玩的数学——娱乐数学经典名题》问世。莫海亮当时还是一个中学生，看了这本书以后给我写了一封信，表达他对数学的热爱，并就书中的一些问题发表自己的看法。我们从此经常联系，探讨共同感兴趣的数学问题，成为挚友。我后来又出版了《七巧板、九连环和华容道》《魅力魔方》《迷宫趣话》《走出推理的迷宫》等科普作品，莫海亮都给予了支持和配合。我们的共同研究成果除了反映在我的作品中以外，还发表在《科学世界》杂志上，如《超越魔方皇后——破解六色同堂难题》（2011.5），《走出“华容道”再去“攀高峰”》（2013.12）。在 10 余年的交往和合作过程中，我深感莫海亮不但在数学方面极有天赋和创造力，而且兴趣广泛，勤奋好学，这在同龄青年中是非常难得的。

这部书我有幸先睹为快。作为莫海亮的又一部力作，我认为该书是有一定广度、深度和一定价值的。书中介绍了有趣的智力游戏——多联骨牌、多联钻石和

多联蜂窝。其中，五格骨牌在我国的民间玩具中，占有重要的地位，通常被叫做“伤脑筋十二块”，以往有一些科普著作有所涉及，但不系统；其他多联骨牌、多联钻石和多联蜂窝则很少被提及。这本书比较全面地讨论了这些游戏，以及其中蕴含的数学问题，读来令人趣味无穷，又能获益匪浅。

本书介绍的游戏属于同一类型，内容略显单一和单薄，但据我了解，莫海亮对许多智力游戏都有很深入的研究，相信他会推出更精彩的作品。让我们祝贺莫海亮的成功，并期待他的新作问世。

吴鹤龄

2015年盛夏

前言



智力游戏中通常都包含一些困难的问题，往往需要一定的知识才能解决，有些困难的问题甚至动用大型计算机也无法解决。从小孩到老人、从普通人到顶级科学家，很多人为此耗费了大量的时间和精力，从中获得无穷的乐趣，同时增长了知识。

智力游戏一方面以游戏的形式锻炼玩家的脑、眼、手等的能力（魔方是一个典型的代表），使人们身心健康，并增强思维的敏捷性。历史上，很多科学天才从小就是某些智力游戏的高手。另一方面，智力游戏往往蕴含很深的科学原理，对推动科学，尤其是数学和计算机科学的发展作出了很大的贡献。因此，智力游戏在世界广受欢迎。

本书主要介绍智力游戏中的多联骨牌、多联钻石和多联蜂窝，重点是五格骨牌，也就是在我国被称为“伤脑筋十二块”的游戏。

多联骨牌、多联钻石和多联蜂窝的拼图千变万化，趣味无穷。本书正文只讨论同数学有关的图形。读者可以充分发挥创造力和想象力，拼出有趣美丽的图形来。

笔者学识有限，书中错误和不足在所难免，希望读者不吝指教，多提宝贵意见，谢谢大家。

莫海亮

目录



第一部分 多联骨牌

■ 第 1 章 骨牌	002
1-1 骨牌的起源和历史	002
1-2 骨牌的组成	003
1-3 风靡世界的多米诺	003
■ 第 2 章 多联骨牌的样式	005
2-1 常规多联骨牌的构成原则	005
2-2 多联骨牌样式	006
2-3 多联骨牌拼块的数量	007
■ 第 3 章 多米诺骨牌	009
3-1 覆盖缺角棋盘问题	009
3-2 覆盖棋盘线问题	010
■ 第 4 章 三格骨牌	013
4-1 L 形三格骨牌的棋盘覆盖问题	013
4-2 用奇数块 L 形三格骨牌拼出正方形	015
4-3 用奇数块 L 形三格骨牌拼出最小矩形	016
4-4 L 形三格骨牌的相邻问题	017
4-5 “I” 形三格骨牌的棋盘覆盖问题	018
■ 第 5 章 四格骨牌	020
5-1 用非轴对称拼板拼轴对称图形	020
5-2 拼板装盒问题	020
5-3 拼板装盒的最大数量	021
■ 第 6 章 六格骨牌	027
6-1 用六格骨牌拼矩形	027



- 6-2 用六格骨牌拼“平行四边形”/029
- 6-3 用六格骨牌覆盖正方体表面/031
- 6-4 六格骨牌拼图/032

■ 第7章 七格骨牌和八格骨牌 ----- 034

- 7-1 用七格骨牌拼矩形/034
- 7-2 用七格骨牌覆盖正方体/035
- 7-3 用八格骨牌拼矩形/035

第二部分 伤脑筋十二块

■ 第8章 伤脑筋十二块概说 ----- 037

- 8-1 伤脑筋十二块的由来/037
- 8-2 伤脑筋十二块的玩法/038

■ 第9章 没有空洞的图形 ----- 040

- 9-1 拼出矩形/040
- 9-2 拼出长方形和正方形/043
- 9-3 双胞胎和三胞胎/044
- 9-4 双孪生和三孪生/044
- 9-5 双似问题和三倍问题/046
- 9-6 半围半/047

■ 第10章 有空洞的图形 ----- 049

- 10-1 有空洞的矩形和正方形/049
- 10-2 有空洞的双胞胎和三胞胎/061
- 10-3 覆盖棋盘问题/062
- 10-4 自相似问题/066
- 10-5 管道图/067
- 10-6 空洞形状同拼块一样的图形/068
- 10-7 关于空洞数量问题/077
- 10-8 空洞面积问题/079
- 10-9 最长空洞路径/083

■ 第11章 不用整副拼板的拼图游戏 ----- 085

- 11-1 单一拼块拼出矩形/085
- 11-2 单一拼块拼出有空洞的图形/089



- 第 12 章 对若干问题的讨论 ----- 100
 - 12-1 拼块的邻居数量问题/100
 - 12-2 一个图形有多少不同拼法? /102
 - 12-3 封装拼块问题/103
 - 12-4 绳子问题/105
 - 12-5 用拼板覆盖立体表面问题/106
 - 12-6 不可能图形/115

- 第 13 章 多联骨牌其他一些问题 ----- 116
 - 13-1 用单格骨牌到六格骨牌的 56 个拼块拼出矩形/116
 - 13-2 用 n 格骨牌的单一拼块拼出对称图形/116
 - 13-3 用单一拼块铺满平面问题/119

- 第三部分 多联钻石与多联蜂窝**

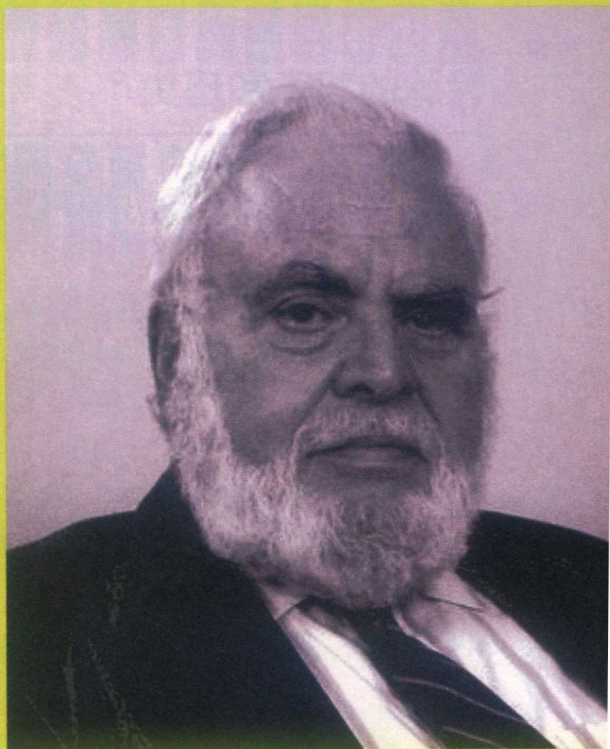
- 第 14 章 多联钻石 ----- 122
 - 14-1 多联钻石/122
 - 14-2 多联钻石的拼块/122
 - 14-3 六格钻石拼凸多边形/124
 - 14-4 用六格钻石拼出有最大空洞的图形/127
 - 14-5 用六格钻石拼出有最多空洞的图形/128
 - 14-6 孪生和多孪生图形/129
 - 14-7 自相似图形/130
 - 14-8 覆盖正四面体/130
 - 14-9 拼出拼块形状空洞/134
 - 14-10 多联钻石拼块数量统计/136

- 第 15 章 多联蜂窝 ----- 137
 - 15-1 多联蜂窝/137
 - 15-2 用四格蜂窝拼出“凸多边形” /138
 - 15-3 拼出空洞数量最多的图形/142
 - 15-4 拼出空洞面积最大的图形/142
 - 15-5 覆盖正八面体/143
 - 15-6 五格蜂窝/145
 - 15-7 多联蜂窝拼块数量统计/146

第一部分 多联骨牌

在国外,以正方形为基础构成的拼板类游戏称为“Polyomino”。美国数学家所罗门·哥伦布(Solomon Wolf Golomb, 1932 图 1-1)在 1954 年 12 月的《美国数学月刊》(The American Mathematical Monthly)上发表的《棋盘与多联骨牌》(Checker Boards and Polyominoes)一文中最早使用了“Polyomino”这个名称。Polyomino 译为“多格骨牌”或“多联骨牌”。但具体到由 n 个正方形格子的骨牌,我国主要翻译为“ n 格骨牌”,如:“三格骨牌、五格骨牌”等。当然,也可以叫做“三联骨牌、五联骨牌”等,意思差不多。

这类拼板游戏极具魅力,它的起源应该追溯到我国古代的“骨牌”游戏,但真正将其发扬光大的,却是西方人。西方人在中国骨牌的基础上开发出大量妙趣横生的游戏,盛行全世界,而且对它进行了非常深入的研究,由此发现了很多重要的数学定理。



▶▶ 图 1-1 所罗门·哥伦布

▶▶ 1-1

骨牌的起源和历史

宋徽宗宣和二年(公元 1120 年),民间流行一种名叫“骨牌”(图 1-2)的赌博游戏。宋高宗时由朝廷诏令颁布后,迅速在全国盛行。

据明朝张自烈在《正字通》(图 1-3)中说,“牙牌,今戏具。俗传宣和二年设,臣某疏请设牙牌三十二扇,计点一百二十有七,以按星宿布列之,高宗时诏如式颁行天下,谓之骨牌,如博塞格五之类,非必自宣和始也。”

由此可以看出,骨牌是朝廷诏令颁布而流行的赌博游戏。具体起源时间已无从考证。现在有些人说始自宣和二年,但从张氏记载中可以看出,张氏对此是持怀疑态度的,他认为在宋宣和以前就已有骨牌。



▶▶ 图 1-2 骨牌

当时骨牌多用牛骨制成,故称“骨牌”,也有用象牙制成,故亦称“牙牌”。因始流行于宣和时期,因此又将骨牌称为“宣和牌”,民间则称之为“牌九”或“天九牌”。

骨牌由骰子演变而来,牌面为两个骰子点数,较骰子复杂,因而骨牌的玩法也比骰子更为多变和有趣,打天九、推牌九、相十副、过五关、接龙、碰和等,都是在明清时期盛行的玩法。各地也有用纸牌做的纸骨牌,名称、牌数都有差异,也能作为占卜用,如流传于清代的占卜书《牙牌灵数》,以牌组的好坏查询签诗来占卜吉凶。



▶▶ 图 1-3 正字通

1-2 骨牌的组成

现在常见的骨牌一般一副有 32 张 (图 1-4), 由 22 张文子和 10 张武子组成, 点数由 2 到 12。文子中有 11 款不同点数的牌, 每款有不同名称、各有两张; 武子不同点数的牌只有一张, 以数字为名; 武子的“丁三”和“二四”组合称为“至尊宝”, 为最大牌。

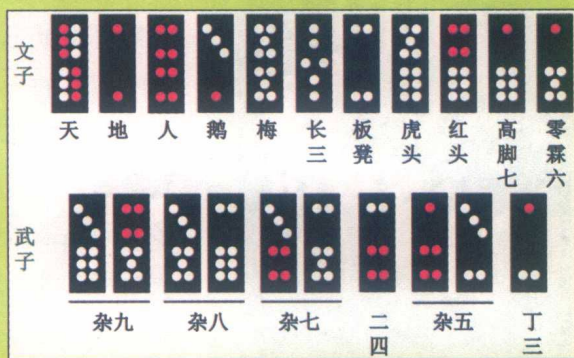


图 1-4 骨牌

1-3 风靡世界的多米诺

19 世纪, 骨牌从中国传入欧洲。据说 1849 年 8 月, 意大利传教士多米诺从中国回到阔别 8 年的米兰。他拿出一件件珍贵的礼物分送给家人。然而, 多米诺的女儿对这些礼物丝毫不感兴趣。为取悦女儿, 多米诺最后拿出一套“牌九”逗她。没有想到, 她女儿一下就被精致的 28 张骨制牌九所吸引, 爱不释手。

多米诺的女儿有个男友阿伦德。阿伦德虽然对多米诺的女儿一往情深、百依百顺, 但是, 平素对其他人却总是粗鲁暴躁, 是米兰城当时出名的坏脾气。为了纠正阿伦德的陋习, 多米诺女儿想出了用牌九“治疗”他的方案。她要求阿伦德在规定的时间内把 28 张牌一张挨着一张整齐地竖起来 (图 1-5), 不许倒下, 如果不成功就一周不同他约会, 也不同他参加任何舞会。

多米诺女儿的这一办法很有效果。码牌时, 骨牌会因意外一次次倒下, 玩家时刻面临着失败的打击, 对玩家的体力和意志力是很大的考验。经过两个月的练习, 阿伦德不仅每次都能又快又好地摆放牌九, 而且无意中养成了耐心细致的好习惯, 坏脾气大有改观。就这样, 传教士多米诺女儿“教训”男友的做法逐步成



了米兰人的趣谈，堆放牌九的游戏也一传十、十传百，成为米兰城人们喜闻乐见的游戏。

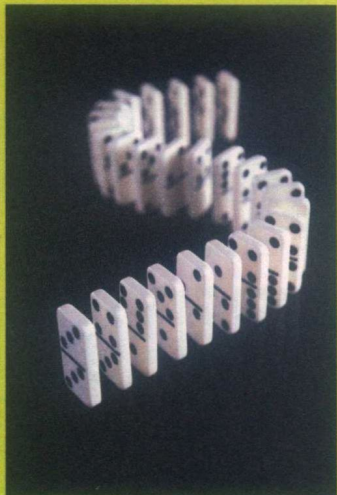


图 1-5 多米诺骨牌

骨牌游戏不仅考验玩家的意志力，而且是发挥玩家想象力和创造力的很好的游戏。为了推广骨牌游戏，多米诺将骨牌改为木制材质，不久，木制骨牌就迅速在意大利及整个欧洲传播，它成了欧洲人的一项高雅运动。

为了感谢多米诺的创造，人们把这种骨牌游戏命名为“多米诺 (Domino)”。从 19 世纪开始，多米诺逐渐成为世界性的运动。现在的多米诺游戏所用的道具已经不止骨牌一种，几乎所有可以立起来又能够直挺挺倒下的东西都可以成为游戏道具，出现了例如人体多米诺、床垫多米诺。码放骨牌分单人 and 团队两种，其中单人码放骨牌需要经历长达数十天甚至数月的辛苦和孤独，对意

志力是不小的考验。

多米诺骨牌给予世界的贡献不仅仅局限于各类游戏，意义更为重大的是，人们在这项游戏中受到启发而明白一个原理：“在一个相互联系的系统中，一个很小的初始能量就可能产生一连串的连锁反应”。这个原理称作“多米诺骨牌效应”，简称“多米诺效应” (Domino Effect)，它在许多领域都有重要应用。

“多米诺效应”和“蝴蝶效应 (Butterfly Effect)”有所不同，多米诺效应强调的是过程的连锁反应，而蝴蝶效应强调的是在混沌 (Chaos) 系统中的放大效应。

▶▶ 2-1

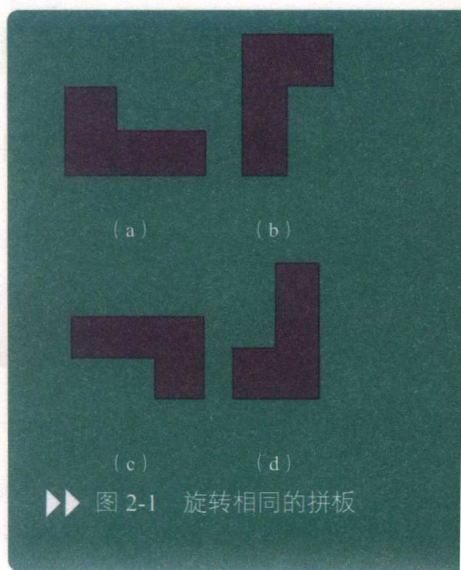
常规多联骨牌的构成原则

骨牌的基本组成单元是正方形。由一个正方形构成的骨牌可以叫做“单格骨牌”。由 $n \geq 2$ 个正方形构成的骨牌就叫做“ n 格骨牌”，一副 n 格骨牌的拼板常规的组成原则是：

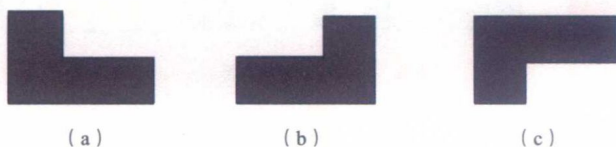
1. 所有正方形必须边边相连且成为一个整体拼板；
2. 一个形状的拼板在一副 n 格骨牌中只允许有一块。

在一般情况下，多联骨牌中的拼板是不分正反面的，所以必须去除旋转反射相同的拼板。图 2-1 中，我们假定某副多联骨牌中有图 (a) 那样的一个拼板，它旋转 90° 、 180° 、 270° 以后的图形分别如图 (b)、(c)、(d) 所示。显然，图 (a)、(b)、(c)、(d) 这四者是同一块拼板，只是摆放位置不同而已，所以只能取其中之一。

我们再来看图 2-2，其中的图 (b) 是图 (a) 的水平反射形成的，图 (c) 是图 (a) 的垂直反射形成的。显然，图 (a)、(b)、(c) 这三者是同一块拼板，因此，在一副 n 格骨牌中也只能任取其一。



▶▶ 图 2-1 旋转相同的拼板



▶▶ 图 2-2 反射相同的拼板

对于 n 格骨牌来说, $n=6$ 是一个分水岭。 $n \leq 6$ 的多联骨牌中间没有空洞, $n > 6$ 的多联骨牌中间存在带空洞的拼块了。

2-2

多联骨牌样式

一副单格骨牌只有一个拼板,是个正方形(图 2-3),是构成其他多格骨牌的基础。

骨牌或叫双格骨牌,在西方也叫“多米诺”或“多米诺骨牌”。

多米诺由 2 个正方形组成。除去旋转反射相同的情况,它只有一种形式,如图 2-4 所示。



图 2-3 单格骨牌



图 2-4 双格骨牌、多米诺骨牌

由三个正方形可以得到“三格骨牌”,除去旋转或反射相同的情况,有两种不同的拼板(图 2-5),分别叫做“I”形和“L”形三格骨牌。

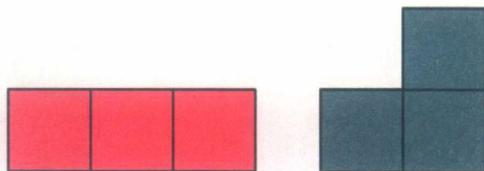


图 2-5 三格骨牌

一副四格骨牌有 5 个拼块(图 2-6)。



图 2-6 四格骨牌

由五个正方形组成的拼块,除去旋转反射相同的情况,总共有 12 种不同的图形(图 2-7)。这 12 个拼板构成的拼图游戏,难度恰到好处,深受欢迎,是人们娱

乐最多，也是研究最深入的多联骨牌智力游戏。在国外称作“Pentomino”，音译为“潘多米诺”，这就是“五格骨牌”。也许因为 Pentomino 游戏有十二种拼块，我国多将其称为“伤脑筋十二块”，也有叫“五连方”。后面我们把它作为重点，将专门有一部分来讨论这个游戏。

为了方便描述，世界上统一根据拼块的形状用英文字母“F、I、L、N、P、T、U、V、W、X、Y、Z”将所有拼块命名，如图 2-7 所示。由图可见，大多数命名都比较形象、直观，只有“F”这个拼块有点别扭。

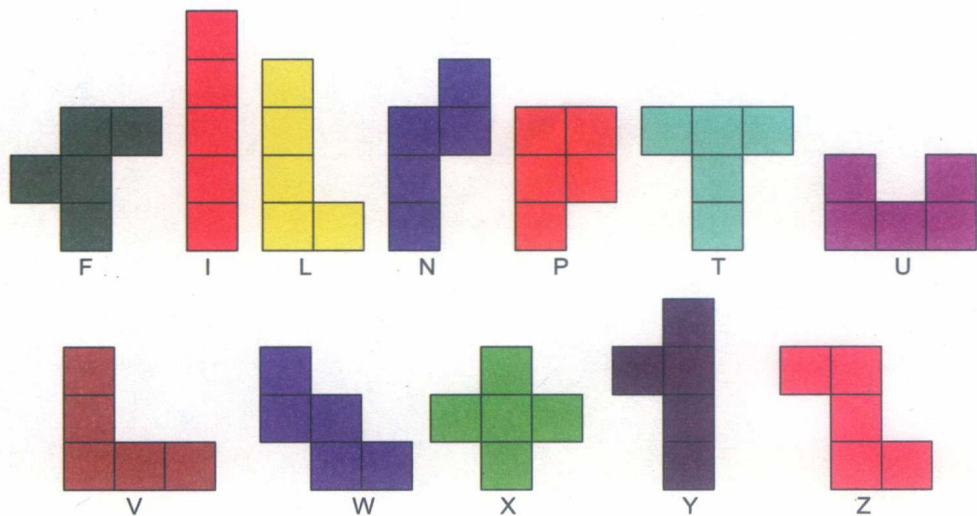


图 2-7 伤脑筋十二块、五格骨牌

2-3

多联骨牌拼块的数量

研究各种骨牌问题，首先得知道骨牌拼块的数量，这是多联骨牌最基本的问题。

给定一个数值 n ，能否由某一个函数公式计算出 n 格骨牌拼块的数量呢？

很遗憾，现在人们还没有找到这样的函数公式，也不知道这样的公式是否存在，目前只有一个大概的估值函数。

设 n 格骨牌拼块全部数量为 A_n （含反射相同的拼块），那么：

$$A_n \approx \frac{c\lambda^n}{n}, (n > 0, n \in \mathbf{N})$$

其中 $\lambda = 4.0626$, $c = 0.3169$, 这两个数值都不是精确值。

现在人们得到骨牌拼块的数量均由计算机枚举所得, 具体见“表 2-1”

表 2-1 骨牌拼块数量统计表

多联骨牌拼块数量统计表						
序号	中文名	英文名	含旋转反 射相同	含反 射相同	不含旋转 反射相同	含空洞 拼块数量
1	单格骨牌	Monomino	1	1	1	0
2	双格骨牌	Domino	2	1	1	0
3	三格骨牌	Tromino	6	2	2	0
4	四格骨牌	Tetromino	19	7	5	0
5	五格骨牌	Pentomino	63	18	12	0
6	六格骨牌	Hexomino	216	60	35	0
7	七格骨牌	Heptomino	760	196	108	1
8	八格骨牌	Octomino	2725	704	369	6
9	九格骨牌	Nonomino	9910	2500	1285	37
10	十格骨牌	Decomino	36446	9189	4655	195
11	十一格骨牌	Undecomino	135268	33896	17073	979
12	十二格骨牌	Dodecomino	505861	126759	63600	4663